УДК 519.6 : 681.511.42

М. І. Сольський
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра електроприводу і комп’ютеризованих електромеханічних систем

УМОВИ РЕАЛІЗАЦІЇ ЦИФРОВИХ РЕГУЛЯТОРІВ НА ЦИФРОВИХ СИСТЕМАХ З ОБМЕЖЕНОЮ РОЗРЯДНІСТЮ

Встановлено залежність між розрядністю апаратної частини цифрових систем та мінімально допустимим з умов реалізації кроком дискретизації. Особливу увагу звернено на визначення граничних меж чутливості поліномів до похибок у задаванні їх коефіцієнтів на основі ланок 1-го та 2-го порядку. Визначено основні математичні співвідношення найменшого допустимого кроку дискретизації h до найбільшої сталої часу системи T.

Ключові слова: цифровий регулятор, обмежена розрядність, дискретна передатна функція, цифрові системи керування.

The dependence between digit capacity of hardware of digital systems and minimal admissible sampling step analyzed in this article. Particular attention was paid to definition of limit values of the sensitivity of the polynomials roots of the discrete transfer functions to changes in their coefficients based on 1st and 2nd order blocks. The basic mathematical equations of minimal admissible sampling step h to the largest system time constant T described.

Key words: digital regulator, finite precision, discrete transfer function, digital control systems.

Вступ

У період цифрових технологій доцільність використання цифрових систем керування електроприводами в промисловості не викликає жодного сумніву. У зв’язку з цим важливим є дослідження всіх впливів, що можуть спричинити їх некоректну роботу.

Потрібно відзначити, що однією з малодосліджених проблем у цифрових системах керування є вплив на їх поведінку обмеженої розрядності апаратної частини. Суть цієї проблеми полягає у тому, що у разі зменшення кроку дискретизації цифрова система керування теоретично мала б наближатися за своєю поведінкою до неперервного прототипу. Проте, наявність у системі обмеженої розрядності апаратної частини за задавання коефіцієнтів дискретної передатної функції призводить до відхилення у поведінці отриманої цифрової системи порівняно з неперервним прототипом [1, 2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Ефект від обмеженої розрядності апаратної частини цифрових систем керування наочно показано в роботах [1, 2]. Доведено, що обмежена розрядність даних у цифрових системах керування істотно впливає на їх практичну реалізацію, що пояснюється чутливістю значень її нулів та полюсів (і, відповідно, розміщенням в одиничному колі на комплексній площині) до похибок коефіцієнтів дискретної передавальної функції.

У роботах [3–5] описано проблему числової нестійкості розв’язку у випадку обмеженої розрядності обчислень з погляду прикладної математики. Однак результати проведених досліджень авторами цих робіт, зокрема, впливу похибок коефіцієнтів поліномів на точність знаходження їхніх коренів, у теорії цифрових систем керування наразі не є поширеними, тому потребують подальших досліджень.

У роботах [2, 6, 7] показано, що поліноми з кратними чи близькими коренями є дуже чутливими до похибок у задаванні коефіцієнтів поліномів. Як наслідок, у цифрових системах зменшення кроку дискретизації призводить до переміщення всіх нулів і полюсів дискретної передатної функції до одиниці, тобто, всі корені поліномів чисельника і знаменника стають дуже близькими, внаслідок чого поліноми стають погано обумовленими і, як результат, чутливими до точності задавання коефіцієнтів.

Мета статті

Метою проведених досліджень було вивчення впливу обмеженої точності записування коефіцієнтів дискретної передатної функції внаслідок обмеженої розрядності апаратної частини цифрової системи керування на її поведінку та встановлення взаємного зв'язку між точністю коефіцієнтів дискретної передатної функції цифрової системи та мінімальним кроком дискретизації з умови забезпечення працездатності такої системи.

Виклад основного матеріалу

Погана обумовленість поліномів чисельника і знаменника дискретної передатної функції, як вже було зазначено вище, випливає з переміщення всіх її нулів та полюсів до одиниці – межі стійкості дискретної системи *n*-го порядку, тому необхідно проаналізовану граничну можливість забезпечення умови стійкості – виконання нерівності $\left|e^{-h\cdot P_i^*}\right| < 1$ для всіх n її дискретних полюсів P_i^*, де $i = 1\mathbf{K}n$, враховуючи двійкову розрядність *N* системи.

Для визначення граничних меж чутливості поліномів до похибок у задаванні їх коефіцієнтів використано елементарні об’єкти:

1) ланка 1-го порядку – один дійсний полюс;
2) коливна ланка 2-го порядку – пара комплексно-спряжених полюсів.

Ланку першого порядку описують поліномом першого порядку з одним коефіцієнтом, який відповідає сталій часу *T*. У такому разі матимемо один неперервний полюс *P* і, після дискретизації, один дискретний полюс P^*:

$$\frac{1}{Ts+1} \quad \Rightarrow \quad P = -\frac{1}{T};\; P^* = e^{-\frac{h}{T}}. \tag{1}$$

У цьому випадку гранична умова стійкості дискретної системи стосовно відношення кроку дискретизації *h* до сталої часу *T* для системи з двійковою розрядністю *N* має такий вигляд:

$$\frac{2^N - 1}{2^N} \geq e^{-\frac{h}{T}}. \tag{2}$$

Наприклад, для типової промислової 16-розрядної системи матимемо $\frac{h}{T} \geq 1{,}526\cdot 10^{-5}$ (для задавання коефіцієнтів дискретної передатної функції без знака) та $\frac{h}{T} \geq 3{,}05\cdot 10^{-5}$ для випадку задавання коефіцієнтів дискретної передатної функції 16-розрядним двійковим числом зі знаком.

Для випадку одного дійсного полюса граничне відношення кроку дискретизації до найбільшої сталої часу узагальнено у табл. 1 для *N*-розрядних цифрових систем без знака та зі знаком, де *N* – двійкова розрядність, також це показано для аналогічної десяткової точності коефіцієнтів дискретної передатної функції.

Для ланки другого порядку з передатною функцією $\frac{1}{T^2 s^2 + 2xTs + 1}$ неперервні та, відповідно, дискретні полюси (позначені верхнім індексом *) будуть такими:

$$p_{1,2} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 1}}{T},\; P_{1,2}^* = e^{-x\frac{h}{T}} \cdot e^{\pm j\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{h}{T}}. \tag{3}$$

Як видно з формул (3), дискретні полюси ланки другого порядку містять дві складові:
1) перша складова відповідає довжині вектора комплексного числа, тобто, його модулю;
2) друга складова відповідає куту повороту вектора комплексного числа.

Таблиця 1

Відношення найменшого допустимого кроку дискретизації h до найбільшої сталої часу системи Ту випадку одного дійсного полюса

Двійкова розрядність системи без знака/зі знаком	Граничне відношення h/T (без знака/зі знаком)
8	$3{,}9\cdot10^{-3}/7{,}8\cdot10^{-3}$
12	$2{,}4\cdot10^{-4}/4{,}8\cdot10^{-4}$
16	$1{,}5\cdot10^{-5}/3\cdot10^{-5}$
32	$2{,}3\cdot10^{-10}/4.6\cdot10^{-10}$
Десяткова точність коефіцієнтів поліномів дискретної передатної функції	Граничне відношення h/T
2	10^{-2}
3	10^{-3}
4	10^{-4}
5	10^{-5}
6	10^{-6}

У випадку ланки другого порядку з парою комплексно-спряжених полюсів і цифрової системи, яка забезпечує точність задавання коефіцієнтів дискретної передатної функції N двійковими розрядами, граничне відношення кроку дискретизації h до найбільшої сталої часу T має аналогічний вигляд:

$$\frac{2^N-1}{2^N} \ge e^{-x\cdot\frac{h}{T}}; \ \frac{2^N-1}{2^N} \ge e^{\pm j\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{h}{T}}. \tag{4}$$

Для прикладу, в 16-розрядній цифровій системі без знака та зі знаком для складової, що відповідає довжині вектора комплексного числа (при ξ = 0,7), відношення граничного кроку дискретизації до найбільшої сталої часу має такий вигляд:

без знака – $\frac{h}{T} \ge 2{,}1\cdot10^{-5}$;

зі знаком – $\frac{h}{T} \ge 4{,}3\cdot10^{-5}$.

Потрібно відзначити, що у коливній ланці другого порядку з'являється додатковий параметр, а саме ξ – коефіцієнт вгамування, який у реальних системах змінюється в межах від 0,1 до 0,9 і вносить корективи у величину мінімально допустимого кроку дискретизації відповідно до умови стійкості дискретної системи $e^{-h/T} < 1$. У випадку ланки другого порядку з парою комплексно-спряжених полюсів граничне відношення кроку дискретизації до найбільшої сталої часу системи в N-розрядній цифровій системі, де N – її двійкова розрядність, або для десяткової точності задавання коефіцієнтів дискретної передатної функції наведені у табл. 2 для коефіцієнта вгамування ξ = 0,7.

Наприклад, для ланки 1-го та 2-го порядку для десяткової точності задавання коефіцієнтів дискретної передатної функції (чотирьох значущих цифр) відношення кроку дискретизації до найбільшої сталої часу має такий вигляд:

для ланки 1-го порядку – $\frac{h}{T} \ge 10^{-4}$;

для ланки 2-го порядку – $\frac{h}{T} \ge 1{,}4\cdot10^{-4}$.

Перехідні характеристики ланки 1-го та 2-го порядку для різних значень десяткової точності та різних співвідношень $\frac{h}{T}$ наведено у табл. 3.

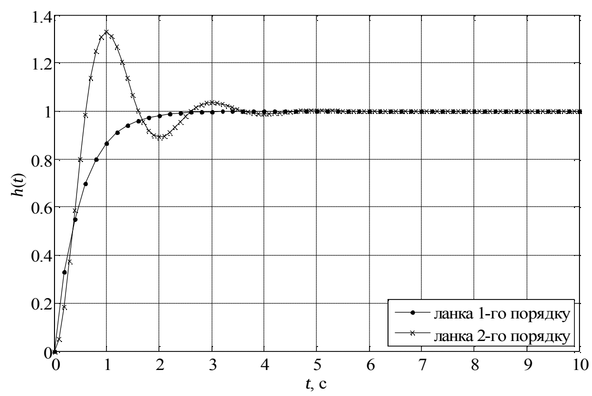
Таблиця 2

Відношення найменшого допустимого кроку дискретизації h до найбільшої сталої часу системи Ту випадку пари комплексно-спряжених полюсів

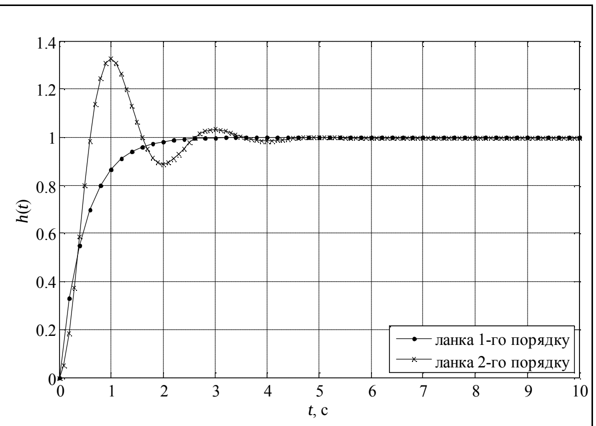
Двійкова розрядність системи	Граничне відношення h/T (без знака/зі знаком)
8	$5{,}6\cdot10^{-3}/1{,}1\cdot10^{-2}$
12	$3{,}4\cdot10^{-4}/6{,}8\cdot10^{-4}$
16	$2{,}1\cdot10^{-5}/4{,}3\cdot10^{-5}$
32	$3{,}3\cdot10^{-10}/6{,}6\cdot10^{-10}$
Десяткова точність коефіцієнтів поліномів дискретної передатної функції	**Граничне відношення h/T**
2	$1{,}4\cdot10^{-2}$
3	$1{,}4\cdot10^{-3}$
4	$1{,}4\cdot10^{-4}$
5	$1{,}4\cdot10^{-5}$
6	$1{,}4\cdot10^{-6}$

Таблиця 3

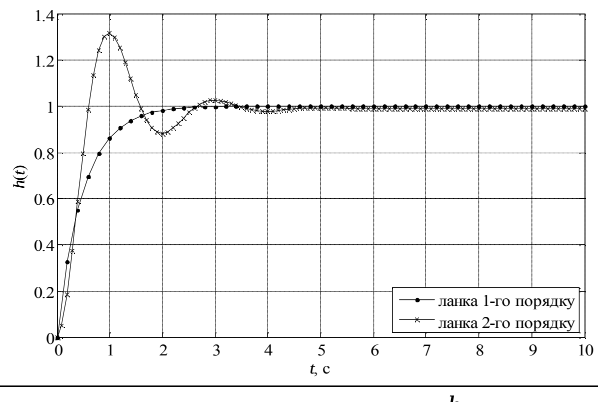
Перехідні характеристики ланки 1-го та 2-го порядку для різних значень десяткової точності та різних співвідношень $\frac{h}{T}$



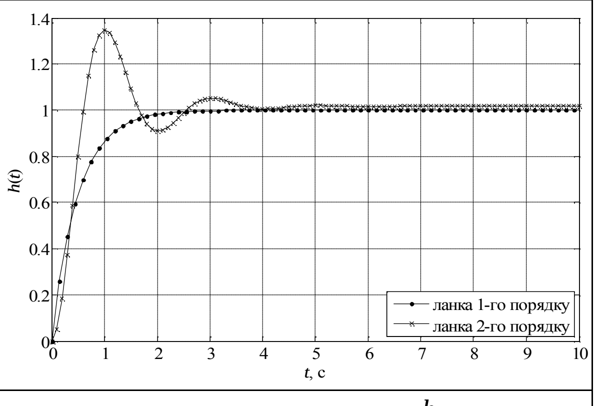
З точністю 4-значущі цифри при $\frac{h}{T} = 10^{-1}$



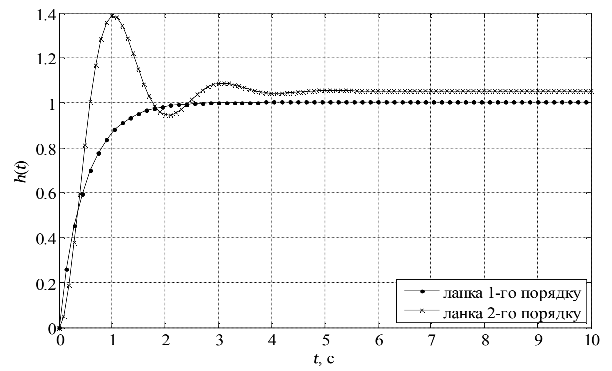
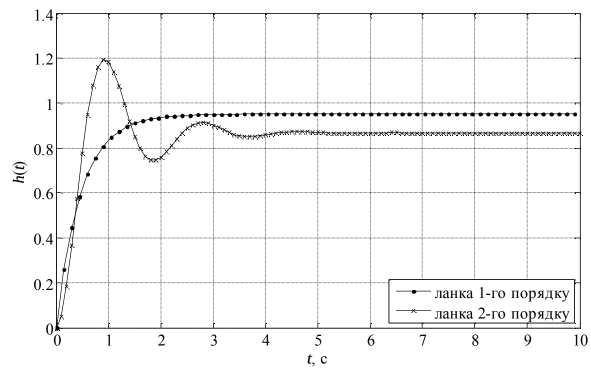
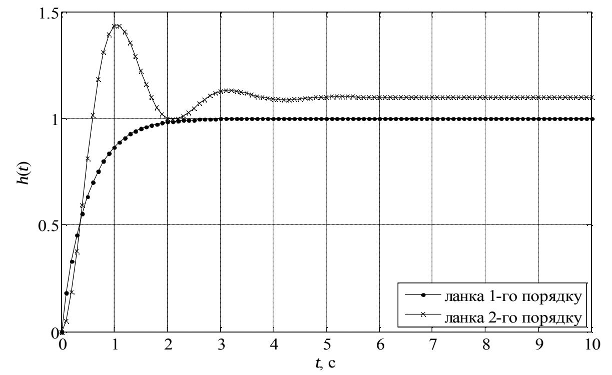
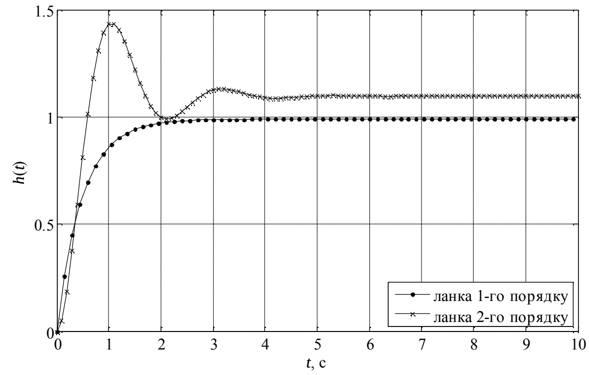
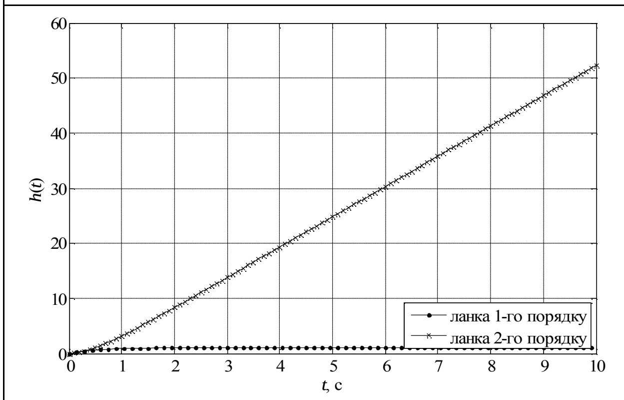
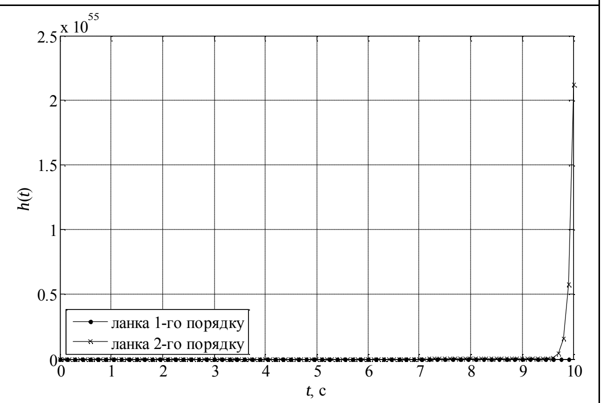
З точністю 3-значущі цифри при $\frac{h}{T} = 10^{-1}$



З точністю 2-значущі цифри при $\frac{h}{T} = 10^{-1}$



З точністю 4-значущі цифри при $\frac{h}{T} = 5\cdot10^{-2}$

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>З точністю 3-значущі цифри при $\dfrac{h}{T} = 5 \cdot 10^{-2}$</td>
<td>З точністю 2-значущі цифри при $\dfrac{h}{T} = 5 \cdot 10^{-2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>З точністю 4-значущі цифри при $\dfrac{h}{T} = 10^{-2}$</td>
<td>З точністю 3-значущі цифри при $\dfrac{h}{T} = 10^{-2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>З точністю 2-значущі цифри при $\dfrac{h}{T} = 10^{-2}$</td>
<td>З точністю 4-значущі цифри при $\dfrac{h}{T} = 10^{-3}$</td>
</tr>
</table>

Висновки

Встановлено залежність між розрядністю апаратної частини цифрових систем і мінімально допустимим з умов стійкості кроком дискретизації. З використанням отриманих залежностей (2) і (3)–(4) показано, що у цифрових системах зі скінченною розрядністю існує фундаментальне обмеження на мінімальний крок дискретизації, для якого виконується умова стійкості дискретної системи.

Під час проектування цифрових систем необхідно враховувати граничні співвідношення h/T з табл. 1, 2.

1. Мороз В. І. Умови реалізації цифрових регуляторів на цифрових системах з обмеженою розрядністю / Мороз В.І., Сольський М.І., Головач І.Р // Вісник Нац. техн. ун-ту "Харківський *політехнічний інститут". Тематичний випуск "Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика". – Харків: НТУ "ХПІ". – 2013. – № 36. – С. 313–314. 2. V.Moroz and M.Solskyi, "The investigation of the influence of data finite precision on realization of digital control systems," Computational problems of electrical engineering, vol. 3, no. 1, 2013, pp.69–74. 3. Daniel D. McCracken, William S. Dorn. Numerical methods and FORTRAN programming : with applications in engineering and science. – Wiley, 1964. – 457 p. 4. Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B. Computer Methods for Mathematical Computations. – Englewood Cliffs, New Jersey 07632. – Prentice Hall, Inc., 1977. – 259 p. 5. Cleve Moler. Numerical Computing with MATLAB. [©2004, Cleve Moler]. MathWorks, Inc. – http://www.mathworks.com/moler/chapters.html. 6. Локализация корней полинома. Классические формы преподавания математики и ее приложений на основе современных информационно-компьютерных технологий. [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу : http://pmpu.ru/vf4/polynomial/zero_local. 7. Мороз В. І. Вплив методів дискретизації передатних функцій на реалізацію цифрових систем з обмеженою розрядністю / Мороз В.І., Сольський М.І // Збірник наукових праць «Математичне та комп'ютерне моделювання», Серія: Технічні науки, Вип. 11, Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2014. – С.87–95.*