ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.768 № 768, (2013) с. 63–70

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY "LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.768 No 768, (2013) 63–70

МНОЖИНИ АБСОЛЮТНОЇ СТІЙКОСТІ ДО ЗБУРЕНЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З ДІЙСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Гладун В. Р.

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 25 вересня 2013 р.)

Стаття присвячена вивченню умов, за виконання яких нескінченні гіллясті ланцюгові дроби зі змінною кількістю гілок розгалуження є стійкими до збурень їх елементів. Побудовано та досліджено множини абсолютної стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з дійсними частинними чисельниками і знаменниками, що дорівнюють одиниці. Встановлено оцінки абсолютних похибок підхідних дробів таких гіллястих ланцюгових дробів.

Ключові слова: гіллястий ланцюговий дріб, підхідні дроби, множини абсолютної стійкості до збурень, оцінки абсолютних похибок підхідних дробів гіллястих ланцюгових дробів.

2000 MSC: 11J70

УДК: 517.524

Вступ

Однією з фундаментальних властивостей неперервних та гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД), як ефективного математичного апарата теорії функцій, обчислювальної математики, алгебри і теорії чисел, є властивість стійкості до збурень [4, 6, 9, 14, 24].

В.П. Терських, застосовуючи неперервні дроби та частинні випадки гіллястих ланцюгових дробів у технічних розрахунках, вперше звернув увагу на властивість стійкості неперервних дробів та їх узагальнень [25]. Питанню стійкості алгоритмів обчислення підхідних дробів неперервних дробів присвячені роботи Г. Бланч [1], В. Гаучі [2], Н. Мейкона, М. Баскервіла [5], У. Джоунса, В. Трона [3, 17]. Властивість відносної стійкості до збурень ГЛД з додатними елементами, а також ГЛД, елементи яких задовольняють умови багатовимірних узагальнень теорем Ворпіцького та Слешинського-Прінгсгейма, досліджувалась в роботах П.І. Боднарчука, В.Я.Скоробогатька [13, 14, 24], Д.І. Боднара [10, 11, 12], М.О. Недашковського [20, 21], В.В. Іванова [18] та ін. Питання абсолютної стійкості континуального аналогу ГЛД – інтегральних ланцюгових дробів розглянуто у роботах Т.М. Антонової [7, 22].

Відомо, що проста область збіжності неперервного дробу $\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \dfrac{a_{i(k)}}{1}$ з дійсними частинними чисельниками не може містити точок, які лежать зліва від точки $-\dfrac{1}{4}$. Збіжність ГЛД

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1}, \qquad (1)$$

$a_{i(k)} \in \mathbb{R}$, досліджувалаль у випадку, коли

$$a_{i(k)} \geq -\frac{1}{N}\rho\,(1-\rho)\,,\; 0 \leq \rho < \frac{1}{2}\ [19].$$

У роботі [9] Д.І. Боднар встановив ознаку збіжності ГЛД (1) у випадку, коли

$$a_{i(k)} \geq -\frac{1}{4N}.$$

Задачу збіжності і стійкості до збурень ГЛД з від'ємними та знакозмінними частинними чисельниками, а також деяких послідовностей їх підхідних дробів розглядали в роботах [8, 15, 16]. Подальше вивчення питання стійкості до збурень ГЛД з дійсними елементами є предметом досліджень цієї роботи.

I. Основні поняття та означення

Об'єктом дослідження є ГЛД

$$a_0 \left(1 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \qquad (2)$$

де $N_{i(k)} \in \mathbb{N}$ – кількість гілок розгалуження, $i(0) = i_0 = 0$, $i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k$, $i_p = \overline{1, N_{i(k-1)}}$, $p = \overline{1,k}$, $k = 1, 2, \ldots,$ – мультиіндекси.

Розглянемо такі множини мультиіндексів

$$I_0 = \{0\},$$

$$I_k = \{i(k) : i_p = \overline{1, N_{i(k-1)}},\, p = \overline{1,k}\},\ k = 1, 2, \ldots.$$

Скінченні ГЛД

$$f^{(0)} = a_0,\ f^{(s)} = a_0 \left(1 + \overset{s}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1},$$

$s = 1, 2, \ldots,$ називають s -ми підхідними дробами ГЛД (2). Величини, які визначаються рекурентними співвідношеннями

$$Q_{i(p)}^{(s)} = 1 + \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \frac{a_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{(s)}},$$

$i(p) \in I_p$, $p = s-1, s-2, \ldots, 0$, $s = 1, 2, \ldots$, причому $Q^{(s)}_{i(s)} = b_{i(s)}$, $i(s) \in I_s$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, називають залишками s -го підхідного дробу ГЛД (2). Позначимо $g^{(s)}_{i(p)} = \dfrac{a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p-1)} Q^{(s)}_{i(p)}}$, $i(p) \in I_p$, $p = \overline{1, s}$, $s = 1, 2, \ldots$.

Нехай $\widehat{a}_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, – збурені значення елементів $a_{i(k)}$ ГЛД (1). ГЛД

$$\widehat{a}_0 \left(1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{\widehat{a}_{i(k)}}{1} \right)^{-1} \tag{3}$$

називатимемо збуреним до дробу (2).

Нехай $\{E_{i(k)}\}$, $\emptyset \neq E_{i(k)} \subset \mathbb{R}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, – послідовність множин елементів ГЛД (2) і збуреного до нього ГЛД (3), тобто

$$a_{i(k)} \in E_{i(k)},\ \widehat{a}_{i(k)} \in E_{i(k)},\ i(k) \in I_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Сукупність множин $\{E_{i(k)}\}$ називають послідовністю множин збіжності ГЛД (2), якщо умова $a_{i(k)} \in E_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, забезпечує збіжність цього дробу, тобто існує скінченна границя послідовності його підхідних дробів: $\lim\limits_{s\to\infty} f^{(s)} = f$, $f \in \mathbb{R}$.

Надалі, під час дослідження збіжності, використовуватимемо формулу різниці двох підхідних дробів ГЛД (2) [9], яку, враховуючи вигляд досліджуваного дробу, запишемо у вигляді
$f^{(n)} - f^{(m)} =$

$$= (-1)^{m+1} \sum_{i_1=1}^{N_0} \sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}} \cdots \sum_{i_{m+1}=1}^{N_{i(m)}} \frac{\prod\limits_{k=0}^{m+1} a_{i(k)}}{\prod\limits_{k=0}^{m} Q^{(m)}_{i(k)} \prod\limits_{k=0}^{m+1} Q^{(n)}_{i(k)}},$$

$n > m$.

Означення 1. Послідовність множин збіжності $\{E_{i(k)}\}$, $\emptyset \neq E_{i(k)} \subset \mathbb{R}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ГЛД (2) назвемо послідовністю множин абсолютної стійкості до збурень цього дробу, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для кожного елемента $a_{i(k)} \in E_{i(k)}$ і кожного $\widehat{a}_{i(k)} \in E_{i(k)}$ такого, що

$$|\widehat{a}_{i(k)} - a_{i(k)}| < \delta,\ i(k) \in I_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

виконуються нерівності

$$|\widehat{f}^{(s)} - f^{(s)}| < \varepsilon,\ s = 0, 1, 2, \ldots .$$

II. Формули абсолютних похибок підхідних дробів

Нехай $\Delta a_{i(k)}$, $\Delta \dfrac{a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}}$ – абсолютні похибки елементів $a_{i(k)}$ ГЛД (2) і величин $\dfrac{a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}}$ відповідно, тобто

$$\Delta a_{i(k)} = \widehat{a}_{i(k)} - a_{i(k)},\ i\,(k) \in I_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

$$\Delta \frac{a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}} = \frac{\widehat{a}_{i(p)}}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(p)}} - \frac{a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}},\ i\,(p) \in I_p,\ p = \overline{0, s},$$

$s = 0, 1, 2, \ldots .$

Використовуючи методику, запропоновану в роботі [22], встановимо рекурентні формули для абсолютних похибок величин $\dfrac{a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}}$:

$$\Delta \frac{a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}} = \frac{\widehat{a}_{i(p)} Q^{(s)}_{i(p)} - a_{i(p)} \widehat{Q}^{(s)}_{i(p)}}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(p)} Q^{(s)}_{i(p)}} =$$

$$= \frac{\Delta a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}} - \frac{\widehat{a}_{i(p)}}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(p)} Q^{(s)}_{i(p)}} \left(\widehat{Q}^{(s)}_{i(p)} - Q^{(s)}_{i(p)} \right) =$$

$$= \frac{\Delta a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}} - \frac{\widehat{a}_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)} \widehat{Q}^{(s)}_{i(p)}} \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \Delta \frac{a_{i(p+1)}}{Q^{(s)}_{i(p+1)}},$$

$$\Delta \frac{a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}} = \frac{\Delta a_{i(p)}}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(p)}} - \frac{a_{i(p)}}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(p)} Q^{(s)}_{i(p)}} \left(\widehat{Q}^{(s)}_{i(p)} - Q^{(s)}_{i(p)} \right) =$$

$$= \frac{\Delta a_{i(p)}}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(p)}} - \frac{a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)} \widehat{Q}^{(s)}_{i(p)}} \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \Delta \frac{a_{i(p+1)}}{Q^{(s)}_{i(p+1)}}.$$

Отже,

$$\Delta \frac{a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}} = \frac{\Delta a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}} - \frac{\widehat{a}_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)} \widehat{Q}^{(s)}_{i(p)}} \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \Delta \frac{a_{i(p+1)}}{Q^{(s)}_{i(p+1)}}, \tag{4}$$

$$\Delta \frac{a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}} = \frac{\Delta a_{i(p)}}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(p)}} - \frac{a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)} \widehat{Q}^{(s)}_{i(p)}} \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \Delta \frac{a_{i(p+1)}}{Q^{(s)}_{i(p+1)}}, \tag{5}$$

$i\,(p) \in I_p$, $p = \overline{0, s-1}$, $s = 1, 2, \ldots$, причому

$$\Delta \frac{a_{i(s)}}{Q^{(s)}_{i(s)}} = \Delta a_{i(s)},\ i\,(s) \in I_s,\ s = 0, 1, \ldots .$$

Почергово використовуючи формули (4), (5), отримуємо

$$\Delta \frac{a_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)}} = \frac{\Delta a_{i(p)}}{Q'^{(s)}_{i(p)}} + \frac{a'_{i(p)}}{Q^{(s)}_{i(p)} \widehat{Q}^{(s)}_{i(p)}} \sum_{k=p+1}^{s} (-1)^{k-p} \times$$

$$\times \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \sum_{i_{p+2}=1}^{N_{i(p+1)}} \cdots \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{\Delta a_{i(k)}}{Q'^{(s)}_{i(k)}} \prod_{l=p+1}^{k-1} \frac{a'_{i(l)}}{Q^{(s)}_{i(l)} \widehat{Q}^{(s)}_{i(l)}}, \tag{6}$$

де

$$a'_{i(p+k)} = \begin{cases} \widehat{a}_{i(p+k)}, k = 2m, \\ a_{i(p+k)}, k = 2m+1, \end{cases} \tag{7}$$

$$Q'^{(s)}_{i(p+k)} = \begin{cases} \widehat{Q}^{(s)}_{i(p+k)}, k = 2m+1, \\ Q^{(s)}_{i(p+k)}, k = 2m, \end{cases} \tag{8}$$

$k = \overline{0, s-p}$, $p = \overline{0, s}$.

Приймаючи в (6) $p=0$, отримуємо формулу для абсолютної похибки s -го підхідного дробу ГЛД (2):

$$\Delta f^{(s)} = \frac{\Delta a_0}{Q_0^{'(s)}} + \frac{a_0'}{Q_0^{(s)}\widehat{Q}_0^{(s)}} \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \times$$

$$\times \sum_{i_1=1}^{N_0} \sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}} \cdots \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{\Delta a_{i(k)}}{Q_{i(k)}^{'(s)}} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{a_{i(l)}'}{Q_{i(l)}^{(s)}\widehat{Q}_{i(l)}^{(s)}}, \qquad (9)$$

де величини $a_{i(k)}'$, $Q_{i(k)}^{'(s)}$ визначаються згідно з (7), (8) відповідно.

У формулі (9) перетворимо величини

$$P_{i(k)} := \frac{a_0'}{Q_0^{(s)}\widehat{Q}_0^{(s)}} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{a_{i(l)}'}{Q_{i(l)}^{(s)}\widehat{Q}_{i(l)}^{(s)}} \frac{\Delta a_{i(k)}}{Q_{i(k)}^{'(s)}}.$$

При $k=2n+1$ маємо

$$P_{i(2n+1)} = \frac{\widehat{a}_0}{\widehat{Q}_0^{(s)}} \frac{a_{i(1)}}{Q_0^{(s)}Q_{i(1)}^{(s)}} \frac{\widehat{a}_{i(2)}}{\widehat{Q}_{i(1)}^{(s)}\widehat{Q}_{i(2)}^{(s)}} \times \ldots$$

$$\times \frac{a_{i(2n-1)}}{Q_{i(2n-2)}^{(s)}Q_{i(2n-1)}^{(s)}} \frac{\widehat{a}_{i(2n)}}{\widehat{Q}_{i(2n)}^{(s)}\widehat{Q}_{i(2n)}^{(s)}} \frac{\Delta a_{i(2n+1)}}{Q_{i(2n)}^{(s)}\widehat{Q}_{i(2n+1)}^{(s)}},$$

при $k=2n$ маємо

$$P_{i(2n)} = \frac{\widehat{a}_0}{\widehat{Q}_0^{(s)}} \frac{a_{i(1)}}{Q_0^{(s)}Q_{i(1)}^{(s)}} \frac{\widehat{a}_{i(2)}}{\widehat{Q}_{i(1)}^{(s)}\widehat{Q}_{i(2)}^{(s)}} \times \ldots$$

$$\times \frac{\widehat{a}_{i(2n-2)}}{\widehat{Q}_{i(2n-3)}^{(s)}\widehat{Q}_{i(2n-2)}^{(s)}} \frac{a_{i(2n-1)}}{Q_{i(2n-2)}^{(s)}Q_{i(2n-1)}^{(s)}} \frac{\Delta a_{i(2n)}}{\widehat{Q}_{i(2n-1)}^{(s)}Q_{i(2n)}^{(s)}}.$$

Тоді формула (9) набуде вигляду

$$\Delta f^{(s)} = \frac{\Delta a_0}{Q_0^{(s)}} + \frac{\widehat{a}_0}{\widehat{Q}_0^{(s)}} \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \times$$

$$\times \sum_{i_1=1}^{N_0} \sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}} \cdots \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{\Delta a_{i(k)}}{Q_{i(k-1)}^{'(s)}Q_{i(k)}^{'(s)}} \prod_{l=1}^{k-1} q_{i(l)}^{'(s)}, \qquad (10)$$

де величини $Q_{i(k)}^{'(s)}$ визначаються згідно з (8), а

$$q_{i(k)}^{'(s)} = \begin{cases} g_{i(k)}^{(s)}, k=2m+1, \\ \widehat{g}_{i(k)}^{(s)}, k=2m, \end{cases} \quad k=\overline{1,s}. \qquad (11)$$

Змінивши почерговість використання рекурентних формул (4), (5) і зробивши аналогічні перетворення, отримуємо

$$\Delta f^{(s)} = \frac{\Delta a_0}{\widehat{Q}_0^{(s)}} + \frac{a_0}{Q_0^{(s)}} \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \times$$

$$\times \sum_{i_1=1}^{N_0} \sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}} \cdots \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{\Delta a_{i(k)}}{Q_{i(k-1)}^{''(s)}Q_{i(k)}^{''(s)}} \prod_{l=1}^{k-1} q_{i(l)}^{''(s)}, \qquad (12)$$

де

$$Q_{i(k)}^{''(s)} = \begin{cases} \widehat{Q}_{i(k)}^{(s)}, k=2m, \\ Q_{i(k)}^{(s)}, k=2m+1, \end{cases} \quad k=\overline{0,s},$$

$$q_{i(k)}^{''(s)} = \begin{cases} g_{i(k)}^{(s)}, k=2m, \\ \widehat{g}_{i(k)}^{(s)}, k=2m+1, \end{cases} \quad k=\overline{1,s}.$$

III. Достатні умови абсолютної стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з дійсними частинними чисельниками та знаменниками, що дорівнюють одиниці

Встановимо умови, у разі виконання яких множини

$$E_0 = \{x \in \mathbb{R} : |x| \le \mu_0\}, \qquad (13)$$

$$E_{i(k)} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{N_{i(k-1)}} \rho_{i(k)} \left(1-\rho_{i(k-1)}\right) \le x \le \mu_{i(k)} \right\},$$

$$i(k) \in I_k,\ k=1,2,\ldots, \qquad (14)$$

де $\frac{1}{2} \le \rho_{i(k)} \le 1$, $\mu_{i(k)} \ge 0$, $i(k) \in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$ – задані дійсні сталі, є множинами абсолютної стійкості до збурень нескінченного ГЛД (2).

Теорема 1. *Нехай абсолютні похибки елементів ГЛД (2) є рівномірно обмеженими:*

$$\left|\Delta a_{i(k)}\right| \le \Delta,\ \Delta>0,\ i(k) \in I_k,\ k=0,1,2,\ldots. \qquad (15)$$

Сукупність множин (13), (14) є послідовністю множин абсолютної стійкості до збурень ГЛД (2), якщо збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \prod_{l=0}^{k-1} \frac{1}{1+\eta_l}, \qquad (16)$$

де

$$\xi_k = \max_{i(k)\in I_k} \left\{ \frac{1}{\rho_{i(k)}} \sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \frac{1}{\rho_{i(k+1)}} \right\},\ k=0,1,2,\ldots,$$

$$\eta_k = \min_{i(k)\in I_k} \left\{ \left(2\rho_{i(k)}-1\right) \left(\sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \frac{\nu_{i(k+1)}}{\rho_{i(k+1)}} \right)^{-1} \right\},$$

$k=0,1,2,\ldots,$

$$\nu_{i(k)} = \max\left\{ \mu_{i(k)}, \frac{1}{N_{i(k-1)}} \rho_{i(k)} \left(1-\rho_{i(k-1)}\right) \right\},$$

$i(k) \in I_k$, $k=1,2,\ldots$, причому для абсолютних похибок підхідних дробів справджуються оцінки

$$\left|\Delta f^{(0)}\right| \le \Delta, \qquad (17)$$

$$\left|\Delta f^{(1)}\right| \leq \frac{\Delta}{\rho_0}\left(1+\mu_0\xi_0\right), \tag{18}$$

$$\left|\Delta f^{(s)}\right| \leq \frac{\Delta}{\rho_0}\left(1+\mu_0\left(\xi_0+\sum_{k=1}^{s-1}\xi_k\prod_{l=0}^{k-1}\frac{1}{1+\eta_l}\right)\right), \tag{19}$$

$s=2,3,\ldots$.

□ *Доведення.* Доведемо, що сукупність множин (13), (14) є послідовністю множин збіжності ГЛД (2).

Методом математичної індукції доведемо, що $Q_{i(p)}^{(s)} \geq$

$$1+\underset{k=p+1}{\overset{s}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\frac{-N_{i(k-1)}^{-1}\rho_{i(k)}\left(1-\rho_{i(k-1)}\right)}{1} \geq \rho_{i(p)}, \tag{20}$$

$i\,(p)\in I_p$, $p=\overline{0,s-1}$.

При $p=s-1$ нерівності (20) очевидні. У припущенні, що нерівності (20) справджуються при $p=k+1$, $k=\overline{0,s-2}$, при $p=k$ маємо

$$Q_{i(k)}^{(s)} \geq 1+\sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}}\frac{-N_{i(k)}^{-1}\rho_{i(k+1)}\left(1-\rho_{i(k)}\right)}{Q_{i(k+1)}^{(s)}} \geq$$

$$1+\sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}}\frac{-N_{i(k)}^{-1}\rho_{i(k+1)}\left(1-\rho_{i(k)}\right)}{1+\underset{l=k+2}{\overset{s}{\mathrm{D}}}\sum_{i_l=1}^{N_{i(l-1)}}\frac{-N_{i(l-1)}^{-1}\rho_{i(l)}\left(1-\rho_{i(l-1)}\right)}{1}} \geq$$

$$\geq 1+\sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}}\frac{-N_{i(k)}^{-1}\rho_{i(k+1)}\left(1-\rho_{i(k)}\right)}{\rho_{i(k+1)}} = \rho_{i(k)}.$$

Для величин $\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}}\left|g_{i(p)}^{(s)}\right|$ шукатимемо оцінки у вигляді

$$\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}}\left|g_{i(p)}^{(s)}\right| \leq \frac{1}{1+L_{i(p-1)}}, \tag{21}$$

де $L_{i(p-1)} \geq 0$, $i\,(p-1)\in I_{p-1}$, $p=\overline{1,s}$.

Нерівність (21) еквівалентна нерівності

$$L_{i(p-1)}\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}}\frac{\left|a_{i(p)}\right|}{Q_{i(p)}^{(s)}} \leq Q_{i(p-1)}^{(s)}-\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}}\frac{\left|a_{i(p)}\right|}{Q_{i(p)}^{(s)}}.$$

Враховуючи те, що

$$\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}}\frac{\left|a_{i(p)}\right|}{Q_{i(p)}^{(s)}} \leq \sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}}\frac{\nu_{i(p)}}{\rho_{i(p)}},$$

$$Q_{i(p-1)}^{(s)}-\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}}\frac{\left|a_{i(p)}\right|}{Q_{i(p)}^{(s)}} =$$

$$=1+\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}}\frac{a_{i(p)}}{Q_{i(p)}^{(s)}}-\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}}\frac{\left|a_{i(p)}\right|}{Q_{i(p)}^{(s)}} \geq$$

$$\geq 1-2\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}}\frac{N_{i(p-1)}^{-1}\rho_{i(p)}\left(1-\rho_{i(p)}\right)}{Q_{i(p)}^{(s)}} \geq 2\rho_{i(p-1)}-1,$$

нерівність (21) справджується, якщо

$$L_{i(p-1)}=\left(2\rho_{i(p-1)}-1\right)\left(\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}}\frac{\nu_{i(p)}}{\rho_{i(p)}}\right)^{-1}.$$

Таким чином, $\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}}\left|g_{i(p)}^{(s)}\right| \leq$

$$\leq\left(1+\frac{2\rho_{i(p-1)}-1}{\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}}\frac{\nu_{i(p)}}{\rho_{i(p)}}}\right)^{-1} \leq \frac{1}{1+\eta_{p-1}}. \tag{22}$$

Із формули різниці двох підхідних дробів $f^{(n)}$, $f^{(m)}$, $n>m$, ГЛД (2) випливає $\left|f^{(n)}-f^{(m)}\right| \leq$

$$\leq \frac{|a_0|}{Q_0^{(m)}}\sum_{i_1=1}^{N_0}\sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}}\cdots\sum_{i_{m+1}=1}^{N_{i(m)}}\prod_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left|g_{i(2k+1)}^{(n)}\right|\prod_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left|g_{i(2k)}^{(m)}\right| \leq$$

$\leq \dfrac{\mu_0}{\rho_0}\prod_{k=0}^{m}\dfrac{1}{1+\eta_k}$, якщо $m=2l$,

$\left|f^{(n)}-f^{(m)}\right| \leq$

$$\leq \frac{|a_0|}{Q_0^{(n)}}\sum_{i_1=1}^{N_0}\sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}}\cdots\sum_{i_{m+1}=1}^{N_{i(m)}}\prod_{k=1}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}\left|g_{i(2k)}^{(n)}\right|\prod_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left|g_{i(2k+1)}^{(m)}\right| \leq$$

$\leq \dfrac{\mu_0}{\rho_0}\prod_{k=0}^{m}\dfrac{1}{1+\eta_k}$, якщо $m=2l-1$, тобто

$$\left|f^{(n)}-f^{(m)}\right| \leq \frac{\mu_0}{\rho_0}\prod_{k=0}^{m}\frac{1}{1+\eta_k}.$$

Оскільки $\xi_k \geq 1$, $k=0,1,2,\ldots$, то із збіжності ряду (16) випливає збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{l=0}^{k-1}\dfrac{1}{1+\eta_l}$. Тоді $\prod_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{1+\eta_k}=0$ і сукупність множин (13), (14) є послідовністю множин збіжності ГЛД (2) і збуреного до нього ГЛД (3).

Із формули (10) випливає оцінка $\left|\Delta f^{(s)}\right| \leq \dfrac{|\Delta a_0|}{Q_0^{(s)}}+$

$$+\frac{\left|\widehat{a}_0\right|}{\widehat{Q}_0^{(s)}}\sum_{k=1}^{s}\sum_{i_1=1}^{N_0}\sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}}\cdots\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\frac{\left|\Delta a_{i(k)}\right|}{Q_{i(k-1)}^{\prime(s)}Q_{i(k)}^{\prime(s)}}\prod_{l=1}^{k-1}\left|q_{i(l)}^{\prime(s)}\right| \leq$$

$$\Delta\left(\frac{1}{Q_0^{(s)}}+\frac{\left|\widehat{a}_0\right|}{\widehat{Q}_0^{(s)}}\sum_{k=1}^{s}\sum_{i_1=1}^{N_0}\sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}}\cdots\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\frac{\prod_{l=1}^{k-1}\left|q_{i(l)}^{\prime(s)}\right|}{Q_{i(k-1)}^{\prime(s)}Q_{i(k)}^{\prime(s)}}\right). \tag{23}$$

Оскільки $\widehat{a}_{i(k)} \in E_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то для величин $\sum\limits_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}} \left|\widehat{g}_{i(p)}^{(s)}\right|$ справджуються оцінки (22). Отже,

$$\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}} \left|q_{i(p)}^{'(s)}\right| \leq \frac{1}{1+\eta_{p-1}}, \, i(p-1) \in I_{p-1}, \, p = \overline{1, s}. \tag{24}$$

Оскільки $Q_{i(p)}^{(s)} \geq \rho_{i(p)}$, $\widehat{Q}_{i(k)}^{(s)} \geq \rho_{i(p)}$, $i(p) \in I_p$, $p = \overline{0, s}$, то

$$\frac{1}{Q_{i(p-1)}^{'(s)}} \sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}} \frac{1}{Q_{i(p)}^{'(s)}} \leq \frac{1}{\rho_{i(p-1)}} \sum_{i_k=1}^{N_{i(p-1)}} \frac{1}{\rho_{i(p)}} \leq \xi_{p-1}, \tag{25}$$

$i(p-1) \in I_{p-1}$, $p = \overline{1, s}$.

Враховуючи нерівності (24), (25), для абсолютних похибок підхідних дробів ГЛД (2) отримуємо оцінки (17), (18), (19).

Із збіжності ряду (16) випливає, що

$$\left|\Delta f^{(s)}\right| \leq \frac{\Delta}{\rho_0} \left(1 + \mu_0 \left(\xi_0 + M\right)\right),$$

де M – сума цього ряду. Отже, якщо

$$\left|\Delta a_{i(k)}\right| \leq \Delta < \frac{\rho_0 \varepsilon}{1 + \mu_0 \left(\eta_0 + M\right)},$$

$i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, де ε – довільна додатна стала, то для абсолютних похибок усіх підхідних дробів ГЛД (2) справджуються нерівності $\left|\Delta f^{(s)}\right| < \varepsilon$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, що доводить виконання умов означення множин абсолютної стійкості до збурень ГЛД (2).

Якщо існує такий номер p , що усі $a_{i(p)} = 0$, $i(p) \in I_p$, або усі $\widehat{a}_{i(p)} = 0$, $i(p) \in I_p$, то $g_{i(p)}^{(s)} = 0$ або $\widehat{g}_{i(p)}^{(s)} = 0$, $i(p) \in I_p$, відповідно. Враховуючи оцінку (23), і оцінку
$\left|\Delta f^{(s)}\right| \leq$

$$\Delta \left(\frac{1}{\widehat{Q}_0^{(s)}} + \frac{|a_0|}{Q_0^{(s)}} \sum_{k=1}^{s} \sum_{i_1=1}^{N_0} \sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}} \cdots \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{\prod\limits_{l=1}^{k-1} \left|q_{i(l)}^{''(s)}\right|}{Q_{i(k-1)}^{''(s)} Q_{i(k)}^{''(s)}} \right),$$

одержану із формули (12), маємо

$$\left|\Delta f^{(s)}\right| \leq \frac{\Delta}{\rho_0} \left(1 + \mu_0 \left(\xi_0 + M_{s,p}\right)\right),$$

де

$$M_{s,p} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{s-1} \xi_k \prod\limits_{l=0}^{k-1} \dfrac{1}{1+\eta_l}, \; s < p, \\ \sum\limits_{k=1}^{p} \xi_k \prod\limits_{l=0}^{k-1} \dfrac{1}{1+\eta_l}, \; s \geq p. \end{cases}$$

■

Приймаючи в (14) $\rho_{i(k)} = 1$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ отримуємо ознаку абсолоюної стійкості до збурень ГЛД (2) з невід'ємними елементами.

Теорема 2. *Нехай абсолютні похибки елементів ГЛД (2) задовольняють умови (15). Сукупність множин*
$E_{i(k)} =$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \mu_{i(k)}\right\}, i(k) \in I_k, \, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $\mu_{i(k)} > 0$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ – *задані дійсні додатні сталі, є послідовністю множин абсолютної стійкості до збурень ГЛД (2), якщо збігається ряд (16), де*

$$\xi_k = \max_{i(k) \in I_k} \left\{N_{i(k)}\right\}, \, k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

$$\eta_k = \left(\max_{i(k) \in I_k} \left\{ \sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \mu_{i(k+1)} \right\} \right)^{-1}, \; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

причому для абсолютних похибок підхідних дробів справджуються оцінки (17)-(19).

Якщо у (14) прийняти $\rho_{i(k)} = \dfrac{1}{2}$, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то з оцінок (20) залишків $Q_{i(p)}^{(s)}$ випливає, що

$$Q_{i(p)}^{(s)} \geq 1 + \underset{k=p+1}{\overset{s}{\mathrm{D}}} \frac{a_k}{1} = \frac{s-p+2}{2(s-p+1)},$$

де $a_k = -\dfrac{1}{4}$, $k = \overline{p+1, s}$. Тоді

$$\frac{1}{Q_{i(p-1)}^{'(s)}} \sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}} \frac{1}{Q_{i(p)}^{'(s)}} \leq 4N_{i(p-1)} \frac{s-p+1}{s-p+3},$$

$$\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}} \frac{\left|a_{i(p)}\right|}{Q_{i(p)}^{(s)}} \leq \frac{2(s-p+1)}{s-p+2} \sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}} \nu_{i(p)},$$

$$Q_{i(p-1)}^{(s)} - \sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}} \frac{\left|a_{i(p)}\right|}{Q_{i(p)}^{(s)}} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{1}{2N_{i(p-1)}} \sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}} \frac{1}{Q_{i(p)}^{(s)}} \geq \frac{1}{s-p+2},$$

величини $L_{i(p)}$ в нерівностях (21) будуть залежними від s:

$$L_{i(p-1)} = L_{i(p-1)}^{(s)} = \frac{1}{2(s-p+1) \sum\limits_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}} \nu_{i(p)}}$$

і для величин $\sum\limits_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}} \left| q'^{(s)}_{i(p)} \right|$ справджуються оцінки

$$\sum_{i_p=1}^{N_{i(p-1)}} \left| q'^{(s)}_{i(p)} \right| \le \frac{2(s-p+1)\zeta_{p-1}}{1+2(s-p+1)\zeta_{p-1}},$$

де

$$\zeta_k = \max_{i(k)\in I_k} \left\{ \sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \nu_{i(k+1)} \right\},\ k=0,1,2,\ldots.$$

Отже,

$$\left|\Delta f^{(s)}\right| \le 2\Delta \frac{s+1}{s+2} \times$$

$$\left(1+4\mu_0\left(\frac{N_0 s}{s+2}+\sum_{k=1}^{s-1}\frac{\xi_k(s-k)}{s-k+2}\prod_{l=0}^{k-1}\frac{2(s-l)\zeta_l}{1+2(s-l)\zeta_l}\right)\right),$$

де величини ξ_k визначаються згідно з (26).

Легко перевірити, що при $\zeta_k \ge \frac{1}{4}$, $k=0,1,2,\ldots$, виконуються нерівності

$$\frac{s-k}{s-k+2} \le \frac{2(s-k)\zeta_k}{1+2(s-k)\zeta_k},\ k=\overline{1,s-1}.$$

Якщо $\mu_{i(k)} = \frac{1}{4N_{i(k-1)}}$, $i(k)\in I_k$, $k=1,2,\ldots$, то $\zeta_k = \frac{1}{4}$, $k=0,1,2,\ldots$ і для абсолютної похибки $\Delta f^{(s)}$ маємо оцінку

$$\left|\Delta f^{(s)}\right| \le 2\Delta \frac{s+1}{s+2} \times$$

$$\times\left(1+4\mu_0\left(\frac{N_0 s}{s+2}+\sum_{k=1}^{s-1}\xi_k\frac{(s-k)(s-k+1)}{(s+1)(s+2)}\right)\right).$$

Оскільки

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{k=1}^{s-1}\xi_k\frac{(s-k)(s-k+1)}{(s+1)(s+2)}=\infty,$$

то питання про стійкість до збурень ГЛД (2), множинами елементів якого є множини (13) і

$$E_{i(k)} = \left\{ x\in R : -\frac{1}{4N_{i(k-1)}} \le x \le \mu_{i(k)} \right\}$$

$i(k)\in I_k$, $k=1,2,\ldots$, залишається відкритим.

Нехай $N_{i(k)}=N$, $i(k)\in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$. Приймаючи в (14)

$$\rho_{i(k)} = \frac{1}{2}+\varepsilon,\ 0<\varepsilon\le\frac{1}{2},\ \mu_{i(k)}=\mu,\ \mu>0,$$

з теореми 1 отримуємо

Наслідок 1. Нехай абсолютні похибки елементів ГЛД (2) задовольняють умови (15). Множини

$$E_0 = \{x\in\mathbb{R} : |x|\le\mu\},$$

$$E_{i(k)} = \left\{ x\in\mathbb{R} : -\frac{1}{N}\left(\frac{1}{4}-\varepsilon^2\right) \le x \le \mu \right\},$$

$i(k)\in I_k$, $k=1,2,\ldots$, де $0<\varepsilon\le\frac{1}{2}$, $\mu>0$ – задані дійсні додатні сталі, є множинами абсолютної стійкості до збурень ГЛД (2), причому для абсолютних похибок підхідних дробів справджуються оцінки (17),

$$\left|\Delta f^{(s)}\right| \le \frac{2\Delta}{1+2\varepsilon}\left(1+\frac{4N\mu}{(1+2\varepsilon)^2}\frac{1-q^s}{1-q}\right),\ s=1,2,\ldots,$$

де $q=\frac{N\nu}{N\nu+\varepsilon(1+2\varepsilon)}$, $\nu=\max\left\{\mu,\frac{1}{N}\left(\frac{1}{4}-\varepsilon^2\right)\right\}$.

Приймаючи в (14)

$$\rho_{i(k)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2(k+2)}},\ i(k)\in I_k,\ k=0,1,2,\ldots,$$

$$\mu_{i(k)} = \frac{\rho_{i(k)}}{N\left(2\rho_{i(k-1)}-1\right)},\ i(k)\in I_k,\ k=1,2,\ldots,$$

з теореми 1 отримуємо

Наслідок 2. Нехай абсолютні похибки елементів ГЛД (2) задовольняють умови (15). Сукупність множин

$$E_0 = \{x\in\mathbb{R} : |x|\le\mu\},\ \mu>0,$$

$$E_{i(k)} =$$

$$\left\{ x\in\mathbb{R} : -\frac{1}{4N}\left(1+\sqrt{\frac{2}{k+2}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{2}{k+1}}\right) \le x \le \right.$$

$$\left. \le \frac{\sqrt{k+1}}{2N}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)\right\},\ i(k)\in I_k,\ k=1,2,\ldots,$$

є послідовністю множин абсолютної стійкості до збурень ГЛД (2), причому для абсолютних похибок підхідних дробів справджуються оцінки (17),

$$\left|\Delta f^{(s)}\right| \le \Delta\left(1+4\mu N\sum_{k=0}^{s-1}\xi_k\delta_k\right),\ s=1,2,\ldots,$$

де $\xi_k = \frac{\sqrt{(k+2)(k+3)}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{k+2}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{k+3}\right)}$,

$\delta_k = \frac{6}{(k+2)(k+3)}$, $k=0,1,2,\ldots$.

Висновки

У випадку додатних залишків підхідних дробів, встановлено умови, у разі виконання яких сукупність множин (13), (14) є послідовністю множин абсолютної стійкості до збурень нескінченного ГЛД (2) зі змінною кількістю гілок розгалуження. Встановлено оцінки абсолютних похибок підхідних дробів.

Надалі доцільно дослідити абсолютну стійкість ГЛД (2), у випадку коли не всі залишки підхідних дробів є додатними.

Література

[1] Blanch G. Numerical evaluation of continued fractions. – SIAM Rev. – 1964. – P. 383–421.

[2] Gautschi W. Computational aspects of three-term recurrence relations. – SIAM Rev. – 1967. – P. 24–82.

[3] Jones W. B., Thton W. J. Numerical stability in evaluating continued fractions. – Math. Comp. – 1974. – Vol. **28**. – P. 795–810.

[4] Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fractions with Application. –Amsterdam: North-Holland. – 1992. – 606 p.

[5] Macon N., Baskervill M. On the generation of errors in the digital evaluation of continued fractions. – J. Assoc. Comp. Mach. – 1956. – Vol. **5**. – P. 211–221.

[6] Wall H. S. Analytic theory of continued fractions. – New York: van Nostrand. – 1948. – 433 p.

[7] Антонова Т. М. Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками. – Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – 45, №**1**. – С. 11–15.

[8] Антонова Т.М., Гладун В.Р. Деякі достатні умови збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками. – Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, №**4**. – С. 27–35.

[9] Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка. – 1986. – 176 с.

[10] Боднар Д. І., Воделанд Х., Кучмінська Х. Й., Сусь О.М. Про стійкість гіллястих ланцюгових дробів. – Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1994. – **37**. – С. 3-7.

[11] Боднар Д. І., Гладун В. Р. Достатні умови стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами. –Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45** №**1**. – С 22–27.

[12] Боднар Д. І., Гладун В. Р. Про стійкість до зурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами. –Мат. студії. – 2006. – Т. **25**, № **2**. – С. 207–212.

[13] Боднарчук П.И., Иванел В. К., Пустомельников И.П., Дзюбка Б. Е., Слоневский Р. В. Вычислительная устойчивость цепных и ветвящихся цепных дробей. – В кн.: Цепные дроби и их применение. – К.: ИМ АН УССР. – 1976. – С. 12–14.

[14] Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – К.: Наук. думка. – 1974. – 272 с.

[15] Гладун В. Р. Умови збіжності та стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками. – Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № **4**. – С. 16–26.

[16] Гладун В. Р. Множини збіжності та стійкості деяких послідовностей підхідних дробів гіллястих ланцюгових дробів з дійсними елементами. – Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2004. – Вип. **63**. – С. 48–58.

[17] Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир. 1985. – 414 с.

[18] Иванов В. В., Бесараб П.Н., Данильченко Л.С. и др. Оценки погрешностей округления для цепных и ветвящихся цепных дробей. – В кн.: Цепные дроби и их применения. – К.: ИМ АН УССР. 1976. – С. 20–24.

[19] Кучминская Х.И., Боднар Д.И. Вычислительная устойчивость разложений функций многих переменных в ветвящиеся цепные дроби. – В кн.: Однородные цитровые вычисления и интегрирующие структуры. – Таганрог, 1977. Вып. **8**. – С. 145–151.

[20] Недашковский Н. А. О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. **20**. – С. 27–31.

[21] Недашковский Н. А. Решение систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями.: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – К.: КГУ. 1980. – 17 с.

[22] Одноволова Т. Н. Некоторые оценки погрешности вычисления интегральных цепных дробей // Докл. АН УССР. Сер А. – 1984. – № **7**. – С. 19–22.

[23] Одноволова Т. Н. Оценка погрешности вычисления одного класса интегральных цепных дробей // Вестн. Львов. политехн. ин-та. –1984. – № **182**. – С. 96–98.

[24] Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука. 1983. – 312 с.

[25] Терских В. П. Метод цепных дробей в применении к исследованию колебаний механических систем: В 2 т. – Л.: Судпромгиз. – 1955. – Т. 1. – 376 с.; – Т. 2. – 332 с.

МНОЖЕСТВА АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ К ВОЗМУЩЕНИЯМ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Гладун В. Р.

Национальный университет "Львивськa политэхника",
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

Статья посвящена изучению условий, при выполнении которых бесконечные ветвящиеся цепные дроби с переменным количеством веток ветвления устойчивы к возмущениям их элементов. Построены и исследованы множества абсолютной устойчивости к возмущениям ветвящихся цепных дробей с действительными частными числителями и знаменателями, равными единице. Установлено оценки абсолютных погрешностей подходящих дробей таких ветвящихся цепных дробей.

Ключевые слова: ветвящаяся цепная дробь, подходящие дроби, множества абсолютной устойчивости к возмущениям, оценки абсолютных погрешностей подходящих дробей ветвящихся цепных дробей.

2000 MSC: 11J70

УДК: 517.524

SETS OF ABSOLUTE STABILITY TO PERTURBATIONS OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS WITH REAL ELEMENTS

Hladun V. R.

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

The article deals with investigation of the conditions under which the infinite branched continued fractions with variable number of branches are stability to perturbations of their elements. We construct and investigate the sets of absolute stability to perturbations of branched continued fractions with real partial numerators and denominators equal to one.Besides, we establish the errors estimates of approximants of such branched continued fractions.

Key words: branched continued fraction, approximants, the sets of absolute stability to perturbations, the estimates of absolute errors of approximants of branched continued fractions.

2000 MSC: 11J70

УДК: 517.524