ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.768 № 768, (2013) с. 71–75

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.768 No 768, (2013) 71–75

ЗОБРАЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ МОМЕНТІВ НА ВІДРІЗКУ ДІЙСНОЇ ОСІ

Чип М. М.

Національний університет "Львівська політехніка"
79013, Львів, вул. С.Бандери, 12

(Отримано 1 липня 2013 р.)

Розглядаються узагальнені моментні зображення членів послідовності дійсних чисел на відрізку дійсної осі. Встановлено рекурентні співвідношення для узагальнених моментів. Зображено узагальнені моменти у вигляді суми скінченної кількості доданків і у вигляді числового ряду та у вигляді інтеграла на симетричному відрізку дійсної осі.

Ключові слова: проблема моментів, рекурентні співвідношення.

2000 MSC: 30B40, 30E05, 30E20

УДК: 517.53

Вступ

Інтегральні зображення узагальнених моментів запроваджено на вимірних множинах комплексної площини ([1]). Твірні функції послідовностей узагальнених моментів зображено в інтегральному вигляді ([2]) та у вигляді раціональних наближень в околі точки ([3]).

Розглянемо зображення узагальнених моментів на відрізку дійсної осі та встановимо їхні властивості.

Узагальнене моментне зображення послідовності $\{s_n\}_0^\infty \subset \mathbb{R}$ на відрізку $[a;b] \subset \mathbb{R}$ з мірою $\mathrm{d}\mu(x)$ на ньому має вигляд

$$s_{k+l} = \int\limits_a^b a_k(x) b_l(x) \mathrm{d}\mu(x), \tag{1}$$

в якому послідовності $\{a_k(x)\}_0^\infty$ та $\{b_l(x)\}_0^\infty$ є відшукуваними послідовностями з простору $\mathbb{L}_2\big([a;b];\mathrm{d}\mu(x)\big)$. Члени послідовності $\{s_n\}_0^\infty$ називають узагальненими моментами.

Перетворення підінтегральних виразів та властивості підінтегральних функцій на відрізку дійсної осі визначають інші форми зображення узагальнених моментів.

I. Рекурентні співвідношення

Застосуємо теореми про середні значення в інтегральному численні для встановлення рекурентних співвідношень між узагальненими моментами.

Нехай справджується зображення (1), яке запишемо у вигляді

$$s_{k+l} = \int\limits_a^b a_k(x) b_l(x) \mu'(x) \mathrm{d}x, \tag{2}$$

вважаючи функцію $\mu(x)$ диференційованою на проміжку $(a;b)$.

Застосуємо першу теорему про середнє значення. Нехай на відрізку $[a;b]$ функції $a_k(x)$ неперервні, причому $a_0(x) = 1$. Функції $b_l(x)\mu'(x)$ не змінюють знака. Тоді існує послідовність $\{c_k\}_0^\infty \subset (a;b)$ така, що

$$s_{k+l} = a_k(c_k) \int\limits_a^b b_l(x)\mu'(x)\mathrm{d}x = a_k(c_k) s_l,$$

значення c_k не залежать від l, в кінці пункту наведено приклад. Приймемо $a_k(c_k) = a_k$ і одержуємо рекурентні співвідношення

$$s_{k+l} = a_k s_l,\ k = 0,1,2,\ldots,\ l = 0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

які запишемо у вигляді

$$s_n = a_k s_{n-k},\ n = 0,1,2,\ldots,\ k = 0,1,2,\ldots,n. \tag{4}$$

Моменти s_n на основі одержаних співвідношень виражаються у виглядах середнього арифметичного

$$s_n = \frac{a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \ldots + a_n s_0}{n}, \tag{5}$$

середнього геометричного

$$s_n = \sqrt[n]{a_1 s_{n-1} \cdot a_2 s_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_n s_0}, \tag{6}$$

середнього гармонічного

$$s_n = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1 s_{n-1}} + \dfrac{1}{a_2 s_{n-2}} + \ldots + \dfrac{1}{a_n s_0}} \tag{7}$$

значень попередніх моментів.

Моменти s_n виражаються в явному вигляді

$$s_n = \left(\frac{s_1}{s_0}\right)^n s_0, \tag{8}$$

а їхня твірна функція $f(z)$ має вигляд

$$f(z) := \sum_{n=0}^\infty s_n z^n = \frac{s_0^z}{s_0 - s_1 z} \tag{9}$$

і є аналітичною функцією в крузі $\left\{z : |z| < \left|\dfrac{s_0}{s_1}\right|\right\}$.

Застосуємо першу теорему про середнє значення два рази. Нехай на відрізку $[a;b]$ функції $a_k(x)$ та $b_l(x)$ неперервні, функції $b_l(x)$ та $\mu'(x)$ не змінюють знака. Тоді існують послідовності $\{c_k\}_0^\infty \subset (a;b)$ та $\{d_l\}_0^\infty \subset (a;b)$ такі, що

$$s_{k+l} = a_k(c_k)b_l(d_l)\int_a^b \mathrm{d}\mu(x) = a_k(c_k)b_l(d_l)\big[\mu(b)-\mu(a)\big].$$

Приймемо $a_k(c_k) = a_k$, $b_l(d_l) = b_l$, $\mu(b) - \mu(a) = c$ і одержуємо співвідношення

$$s_{k+l} = c\, a_k b_l,\ k = 0,1,2,\dots,\ l = 0,1,2,\dots, \tag{10}$$

які запишемо у вигляді

$$s_n = c\, a_k b_{n-k},\ n = 0,1,2,\dots,\ k = 0,1,2,\dots,n. \tag{11}$$

Моменти s_n на основі одержаних співвідношень виражаються у виглядах:
середнього арифметичного

$$s_n = c\,\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0}{n+1}, \tag{12}$$

середнього геометричного

$$s_n = c\,\sqrt[n+1]{a_0b_n \cdot a_1b_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_nb_0}, \tag{13}$$

середнього гармонічного

$$s_n = c\frac{n+1}{\dfrac{1}{a_0b_n} + \dfrac{1}{a_1b_{n-1}} + \ldots + \dfrac{1}{a_nb_0}} \tag{14}$$

значень правих частин, а також в явному вигляді (8) з твірною функцією (9).

Застосуємо другу теорему про середнє значення. Нехай на відрізку $[a;b]$ функції $a_k(x)$ монотонні. Тоді існує послідовність $\{t_k\}_0^\infty \subset (a;b)$ така, що

$$s_{k+l} = a_k(a)\int_a^{t_k} b_l(x)\mathrm{d}\mu(x) + a_k(b)\int_{t_k}^b b_l(x)\mathrm{d}\mu(x). \tag{15}$$

Приймемо $a_0(x) = 1$. Тоді моменти s_{k+l} можна зобразити в одному з виглядів

$$s_{k+l} = a_k(a)s_l + \big[a_k(b) - a_k(a)\big]\int_{t_k}^b b_l(x)\mathrm{d}\mu(x), \tag{16}$$

$$s_{k+l} = a_k(b)s_l + \big[a_k(a) - a_k(b)\big]\int_a^{t_k} b_l(x)\mathrm{d}\mu(x). \tag{17}$$

Додаючи обидва співвідношення, одержуємо

$$\begin{aligned} 2s_{k+l} &= \big[a_k(a) + a_k(b)\big]s_l + \\ &+ \big[a_k(a) - a_k(b)\big]\left(\int_a^{t_k} b_l(x)\mathrm{d}\mu(x) - \int_{t_k}^b b_l(x)\mathrm{d}\mu(x)\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Застосуємо другу теорему про середнє значення два рази. Нехай на відрізку $[a;b]$ функції $a_k(x)$ та $b_l(x)$ монотонні. Тоді існують послідовності $\{t_k\}_0^\infty \subset (a;b)$, $\{p_l\}_0^\infty \subset (a;t_k)$, $\{q_l\}_0^\infty \subset (t_k;b)$ такі, що

$$\begin{aligned} s_{k+l} = a_k(a)&\left[b_l(a)\int_a^{p_l}\mathrm{d}\mu(x) + b_l(t_k)\int_{p_l}^{t_k}\mathrm{d}\mu(x)\right] + \\ + a_k(b)&\left[b_l(t_k)\int_{t_k}^{q_l}\mathrm{d}\mu(x) + b_l(b)\int_{q_l}^{b}\mathrm{d}\mu(x)\right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Одержане співвідношення запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} s_{k+l} = {} & a_k(b)b_l(b)\mu(b) - \\ & - a_k(b)\big[b_l(b) - b_l(t_k)\big]\mu(q_l) - \\ & - b_l(t_k)\big[a_k(b) - a_k(a)\big]\mu(t_k) - \\ & - a_k(a)\big[b_l(t_k) - b_l(a)\big]\mu(p_l) - \\ & - a_k(a)b_l(a)\mu(a), \end{aligned} \tag{20}$$

в якому моменти s_{k+l} виражаються через значення функції $\mu(x)$ на кінцях відрізка $[a;b]$ та в його внутрішніх точках.

Приклад. Приймемо $b_l(x) = h_l g(x)$, де $\{h_l\}_0^\infty$ — послідовність дійсних чисел, причому $h_l \neq 0$, $g(x)$ — інтегровна на відрізку $[a;b]$ функція. Позначимо

$$\int_a^b a_k(x)g(x)dx = \sigma_k,\ \int_a^b g(x)dx = \sigma \neq 0.$$

Обчислюючи величини узагальнених моментів та застосовуючи першу теорему про середнє значення, відповідно, знаходимо

$$s_{k+l} = h_l\sigma_k,\ s_{k+l} = a_k(c_{kl})h_l\sigma,$$

звідки встановлюємо співвідношення

$$a_k(c_{kl}) = \frac{\sigma_k}{\sigma},$$

тобто значення c_{kl} не залежать від l.

II. Зображення у вигляді суми

Застосуємо метод інтегрування частинами для встановлення зображення узагальнених моментів у вигляді суми скінченної кількості доданків.

Нехай $\{a_k(x)\}_0^\infty$ та $\{b_l(x)\}_0^\infty$ утворюють системи алгебраїчних многочленів степенів k та l відповідно з дійсними коефіцієнтами;

$$a_k(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_{ki}x^i,\ b_l(x) = \sum_{j=0}^l \beta_{lj}x^j, \tag{21}$$

$$\{\alpha_{ki}\} \subset \mathbb{R},\ \alpha_{kk} \neq 0,\ \{\beta_{lj}\} \subset \mathbb{R},\ \beta_{ll} \neq 0.$$

Приймемо $\mu(x) = x$. Перетворюючи інтеграл в зображенні (1) за формулою інтегрування частинами, маємо

$$s_{k+l} = \int\limits_a^b a_k(x)b_l(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b a_k(x)\mathrm{d}b_{l1}(x) =$$

$$= a_k(b)b_{l1}(b) - a_k(a)b_{l1}(a) - \int\limits_a^b a_k'(x)b_{l1}(x)\mathrm{d}x,$$

$$b_{l1}(x) = \int\limits_a^x b_l(t)\mathrm{d}t.$$

Інтегруючи частинами k разів, на основі методу математичної індукції, встановлюємо зображення моментів s_{k+l} у вигляді

$$s_{k+l} = \sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu \left[a_k^{(\nu)}(b)b_{l,\nu+1}(b) - a_k^{(\nu)}(a)b_{l,\nu+1}(a)\right] + \\ + (-1)^k k!\alpha_{kk}\left[b_{l,k+1}(b) - b_{l,k+1}(a)\right]. \tag{22}$$

Функції $b_{l,\nu+1}(x)$ мають вираження

$$b_{l,\nu+1}(x) = \int\limits_a^x b_{l\nu}(t)\mathrm{d}t,$$

звідки на основі методу математичної індукції, змінюючи порядок інтегрування, встановлюємо

$$b_{l,\nu+1}(x) = \frac{1}{\nu!}\int\limits_a^x (x-t)^\nu b_l(t)\mathrm{d}t. \tag{23}$$

Моменти алгебраїчних многочленів (21), приймаючи $\mu(x) = x$ та виконуючи дію інтегрування, зобразимо у вигляді

$$s_{k+l} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}\alpha_{ki}\beta_{lj}\frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}; \tag{24}$$

звідси при $a = 0$ маємо

$$s_{k+l} = b\sum_{i=0}^{k}\alpha_{ki}b^i\sum_{j=0}^{l}\frac{\beta_{lj}}{i+j+1}b^j.$$

Узагальнені моменти s_{k+l} алгебраїчних многочленів (21), приймаючи

$$\int\limits_a^b x^n\mathrm{d}\mu(x) = \sigma_n,\ n = 0,1,2,\ldots,$$

виразимо через класичні моменти σ_{i+j}. Справді, підставляючи (21) в (1), одержуємо

$$s_{k+l} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}\alpha_{ki}\beta_{lj}\sigma_{i+j}. \tag{25}$$

Якщо функції $a_k(x)$ та $b_l(x)$ зображаються степеневими рядами, тобто

$$a_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{ki}x^i,\ |x| < r_1,$$

$$b_l(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\beta_{lj}x^j,\ |x| < r_2,$$

то зображення (24) та (25) відповідно перетворюються в зображення

$$s_{k+l} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{ki}\beta_{lj}\frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1},$$

$$s_{k+l} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{ki}\beta_{lj}\sigma_{i+j}.$$

Нехай $\{a_k(x)\}_0^\infty$ та $\{b_l(x)\}_0^\infty$ утворюють такі системи функцій, що:
функції $a_k(x)$ диференційовані довільну кількість разів на проміжку $(a;b)$,
функції $b_l(x)$ інтегровані довільну кількість разів на відрізку $[a;b]$,
після кожного інтегрування частинами одержані інтеграли збіжні.
Тоді узагальнені моменти s_{k+l} зображаються подвійними числовими рядами.

III. Моменти на симетричному відрізку

Встановимо зображення узагальнених моментів у виглядах інтегралів добутків парних частин та непарних частин систем функцій $\{a_k(x)\}_0^\infty$ та $\{b_l(x)\}_0^\infty$.

Зображення (1) запишемо у вигляді

$$s_{k+l} = \int\limits_{-c}^{c} a_k(x)b_l(x)\mathrm{d}\mu(x),\ c > 0. \tag{26}$$

Розглянемо функції

$$\begin{aligned} a_k^+(x) &= a_k(x) + a_k(-x),\\ a_k^-(x) &= a_k(x) - a_k(-x), \end{aligned} \tag{27}$$

які утворюють парну частину та відповідно непарну частину функцій $a_k(x)$. Зауважимо, що

$$a_k(x) = \frac{a_k^+(x) + a_k^-(x)}{2}.$$

Розглянемо функції

$$\begin{aligned} b_l^+(x) &= b_l(x) + b_l(-x),\\ b_l^-(x) &= b_l(x) - b_l(-x), \end{aligned} \tag{28}$$

які утворюють парну частину та відповідно непарну частину функцій $b_l(x)$. Зауважимо, що

$$b_l(x) = \frac{b_l^+(x) + b_l^-(x)}{2}.$$

Нехай функція $\mu(x)$ парна. Тоді з (27) і (28), враховуючи (26), приймаючи $-x=t$, встановлюємо

$$4s_{k+l}=\int\limits_{-c}^{c}a_k^+(x)b_l^-(x)\mathrm{d}\mu(x)+ \\ +\int\limits_{-c}^{c}a_k^-(x)b_l^+(x)\mathrm{d}\mu(x), \tag{29}$$

$$\int\limits_{-c}^{c}a_k^+(x)b_l^+(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int\limits_{-c}^{c}a_k^-(x)b_l^-(x)\mathrm{d}\mu(x)=0.$$

Нехай функція $\mu(x)$ непарна. Тоді з (27) і (28), враховуючи (26), приймаючи $-x=t$, встановлюємо

$$4s_{k+l}=\int\limits_{-c}^{c}a_k^+(x)b_l^+(x)\mathrm{d}\mu(x)+\int\limits_{-c}^{c}a_k^-(x)b_l^-(x)\mathrm{d}\mu(x), \tag{30}$$

$$\int\limits_{-c}^{c}a_k^+(x)b_l^-(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int\limits_{-c}^{c}a_k^-(x)b_l^+(x)\mathrm{d}\mu(x)=0.$$

Інтеграли добутків функцій $a_k^\pm(x)$ та $b_l^\pm(x)$ на симетричному відрізку $[-c;c]$, $c>0$, з мірою $\mathrm{d}\mu(x)$ на ньому можуть зображати узагальнені моменти s_{k+l} в ефективнішому вигляді.

Висновки

Рекурентні співвідношення створюють можливість повнішого вивчення алгебраїчних властивостей узагальнених моментів. Зображення узагальнених моментів у вигляді суми чи ряду виражає зв'язок між континуальною проблемою моментів та дискретною проблемою моментів. Властивості парності чи непарності підінтегральних функцій визначають властивості узагальнених моментів на симетричному відрізку.

Література

[1] Дзядик В. К. Про узагальнення проблеми моментів // ДАН УРСР, Серія А. – 1981. – №6. – С.8–12.

[2] Чип М. М. Метод моментів зображення функції рядом та інтегралом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т.46, №4. – С.65–72.

[3] Голуб А. П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. – К.: Ін-т математики НАН України, 2002. – 222 с.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ МОМЕНТОВ НА ОТРЕЗКЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Чып М. Н.

Национальный университет “Львивська политэхника”,
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

Рассматриваются обобщенные моментные представления членов последовательности действительных чисел на отрезке действительной оси. Установлено рекуррентные соотношения для обобщенных моментов. Представлено обобщенные моменты в виде суммы конечного количества слагаемых и в виде числового ряда, а также в виде интеграла по симметричному отрезку действительной оси.

Ключевые слова: проблема моментов, рекуррентные соотношения.

2000 MSC: 30B40, 30E05, 30E20

УДК: 517.53

REPRESENTATIONS OF GENERALIZED MOMENTS ON A SEGMENT OF REAL AXIS

Chyp M. M.

Lviv Polytechnic National University
79013, Lviv, 12 S. Bandera str.

Generalized moment representations for members of a sequence of real numbers on a segment of real axis are considered. Recurrence formulae for generalized moments are obtained. Generalized moments are represented in the form of sum of finite numbers of items and the form of number series, in the form of integral taken over a symmetric segment on the real axis.

Key words: the pronlem of moments, recurrence relations.

2000 MSC: 30B40, 30E05, 30E20

УДК: 517.53