ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.768 № 768, (2013) с. 82–84

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.768 No 768, (2013) 82–84

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ЗВ'ЯЗАНИХ З ОПЕРАТОРОМ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Лопотко О. В.

Національний лісотехнічний університет України
вул. Генерала Чупринки, 103, Львів, 79057, Україна

(Отримано 28 травня 2012 р.)

Доведено теорему про інтегральне зображення додатно визначених функцій двох змінних $k(x)$ $(x \in \mathbb{R}^2)$, для яких ядро $K(x,y)$ додатно визначено. Ця теорема є узагальненням теореми про інтегральне зображення експоненціально випуклих функцій двох змінних.

Ключові слова: інтегральне зображення, оператор, додатно визначена функція.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9

У роботах [1, 2] запропоновано метод одержання інтегральних зображень для додатно визначених ядер $K(x,y)$ $(x,y \in \mathbb{R}^n)$ з використанням власних функцій диференціальних операторів. Застосовуючи цей метод, у монографії [3, глава VIII] доведено теорему 4.2 про інтегральне зображення таких ядер. У випадку $\mathbb{R}^2$ інтегральне зображення ядер матиме такий вигляд:

$$K(x,y) = \int\limits_{R^2} \sum_{\alpha,\beta \in A} \chi_\alpha(x;\lambda)\overline{\chi_\beta(y;\lambda)} d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \quad (x,y \in \mathbb{R}^2),$$

де

$$d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2}\Omega_\lambda}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial y_1^{\beta_1}\partial y_2^{\beta_2}} \right)(a,a)d\rho(\lambda),$$

$$\Omega_\lambda(x,y) = \sum_{\alpha,\beta \in A} \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2}\Omega}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial y_1^{\beta_1}\partial y_2^{\beta_2}} \right)(a,a)\chi_\alpha(x;\lambda)\overline{\chi_\beta(y;\lambda)},$$

$a = (a_1, a_2)$ – векторний індекс, який змінюється по цілочисленному паралелепіпеду A з координатами $\alpha_1 = 0, \dots, r_1 - 1; \alpha_2 = 0, \dots, r_2 - 1;$

$$\chi_\alpha(x;\lambda) = \chi^{(1)}_{\alpha_1}(x_1;\lambda) \cdot \chi^{(2)}_{\alpha_2}(x_2;\lambda);$$

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2;$$

$\chi^{(j)}_0(x_j;z), \dots, \chi^{(j)}_{j-1}(x_j;z)$ — фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння

$$L^{(j)}u(x_1;x_2) - zu(x_1;x_2) = 0, \quad (j = 1,2), \qquad (1)$$

яка задовольняє умови:

$$\frac{d^k}{dx_j^k}\chi_m(x_j;z)\left.\right|_{x_j=a_j} = \delta_{mk} \ (m,k=0,\dots,r_j-1; j=1,2),$$

δ_{mk} – символ Кронеккера, що дорівнює 1, якщо $m = k$, і 0 якщо $m \neq k$.

За допомогою цієї теореми одержано інтегральні зображення для ядер

$k(y_1 - x_1; y_2 - x_2)$, якщо у (1) $L^{(j)} = i\dfrac{d}{dx_j}$ $(j = 1,2)$;

$\dfrac{1}{2}\left[k(x_1 + y + 1; x_2 + y_2) + k(x_1 - y_1; x_2 - y_2)\right]$, якщо у (1) $L^{(j)} = -\dfrac{d^2}{dx_j^2}$ $(j = 1,2)$;

$k(x_1 + y_1; x_2 + y_2)$, якщо у (1) $L^{(j)} = \frac{d}{dx_j}$ $(j = 1,2)$.

У статті доведено теорему про інтегральне зображення додатно визначеного ядра, якщо у (1) $L^{(j)} = \frac{d}{dx_j} + p(x_j)$ $(j = 1,2)$, де $p(x)$ – неперервна функція.

Інтегральне зображення додатно визначеного ядра, якщо $L = \dfrac{d}{dx} + p(x)$ $(x \in \mathbb{R}^1)$ доведено у [4].

Означення. Неперервну функцію $k(x_2, x_2)$ будемо називати додатно визначеною, якщо виконується нерівність

$$\int\limits_{R^2}\int\limits_{R^2} K(x;y)\, u(y)\, \overline{u(x)}\, dxdy \geq 0 \quad (u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)), \quad (2)$$

де $\quad K(x,y) = \dfrac{a(x+y)}{a(x)a(y)}k(x+y),$

$$a(x) = a(x_1;x_2) = exp\left\{ \int\limits_0^{x_1} p(x_1)dx_1 + \int\limits_0^{x_2} p(x_2)dx_2 \right\}.$$

Теорема. *Для того, щоб ядро $K(x,y)$ було додатно визначеним, необхідно і достатньо, щоб функція $k(x_1,x_2) \in C^1(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1)$ мала таке зображення:*

$$k(x_1;x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}_0(x_1;\lambda_1)\chi^{(2)}_0(x_2;\lambda_2)d\sigma(\lambda_1,\lambda_2), \qquad (3)$$

де $d\sigma(\lambda_1,\lambda_2)$ – невід'ємна скінченна міра, а $\chi^{(j)}_0(x_j;\lambda_j)$ – розв'язок рівняння (1), який задовольняє умову $\chi^{(j)}_0(0;\lambda_j) = 1$ $(j = 1,2)$.

□ *Доведення. Необхідність.* Нехай ядро $K(x,y)$ додатно визначено і для нього легко перевірити, що виконується співвідношення

$$L^{(j)}_{x_j}[K(x,y)] = L^{(j)}_{y_j}[K(x,y)] \ (j = 1,2).$$

Тому для ядра $K(x,y)$, згідно з теоремою 4.2 [3, глава VIII], можна написати таке інтегральне зображення:

$$K(x;y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_0^{(1)}(x_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(x_2;\lambda_2)\chi_0^{(1)}(y_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(y_2;\lambda_2)d\sigma(\lambda_1,\lambda_2), \quad (4)$$

де $d\sigma(\lambda_1,\lambda_2)$ – невід'ємна скінченна міра, а $\chi_0^{(j)}(x_j;\lambda_j)$ – розв'язок рівняння $\frac{du}{dx_j} + +p(x_j)u = \lambda u$ $(j=1,2)$, який задовольняє умову $\chi_0^{(j)}(0;\lambda_j) = 1$ $(j=1,2)$.

Прийнявши у (4) $y_1 = 0, y_2 = 0$, одержимо (3). Необхідність доведено.

Достатність. Маємо інтегральне зображення (3) і ядро $K(x,y) = \frac{a(x+y)}{a(x)a(y)}\cdot k(x+y)$. Покажемо, що це ядро додатно визначено. Для цього спочатку введемо оператор загального зсуву. Нехай $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, позначимо через $u(x,y)$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} + p(x_j)u = \frac{\partial u}{\partial y_j} + p(y_j)u \qquad (j=1,2) \qquad (5)$$

$$u(x_j;0) = f(x_j). \qquad (6)$$

Якщо позначимо через

$$a(x) = \exp\left\{\int_0^{x_1} p(x_1)dx_1 + \int_0^{x_2} p(x_2)dx_2\right\},$$

і $v = a(x)a(y)u$, то задачу Коші (5)–(6) можна звести до задачі

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \qquad (j=1,2) \qquad (7)$$

$$v(x_j;0) = a(x_j)f(x_j). \qquad (8)$$

Оскільки розв'язок задачі (7)–(8) має вигляд

$$v(x;y) = a(x+y)f(x+y),$$

то розв'язок задачі (5)–(6) матиме такий вигляд:

$$u(x;y) = \frac{a(x+y)}{a(x)a(y)}f(x+y). \qquad (9)$$

Введемо тепер оператор зсуву T_y, прийнявши

$$(T_y f)(x) = u(x;y) \qquad (x,y \in \mathbb{R}^2). \qquad (10)$$

Застосовуючи оператор T_y до обох частин інтегрального зображення (3), одержимо

$$(T_y k)(x) = \int\int_{\mathbb{R}^1\mathbb{R}^1} T_y\chi_0^{(1)}(x_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(x_2;\lambda_2)d\sigma(\lambda_1,\lambda_2). \quad (11)$$

Тут, оскільки

$$(T_y k)(x) = \frac{a(x+y)}{a(x)a(y)}k(x+y),$$

$$T_y\chi_0^{(1)}(x_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(x_2;\lambda_2) = \frac{a(x+y)}{a(x)a(y)}\chi_0^{(1)}(x_1+y_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(x_2+y_2;\lambda_2) =$$

$$= \frac{a(x+y)}{a(x)a(y)}e^{\lambda_1(x_1+y_1)-\int_0^{x_1+y_1} p(x_1+y_1)d(x_1+y_1)}e^{\lambda_2(x_2+y_2)-\int_0^{x_2+y_2} p(x_2+y_2)d(x_2+y_2)} =$$

$$= \frac{e^{\lambda_1(x_1+y_1)+\lambda_2(x_2+y_2)}}{a(x)a(y)} = \chi_0^{(1)}(x_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(x_2;\lambda_2)\chi_0^{(1)}(y_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(y_2;\lambda_2),$$

тому що

$$\chi_0(x_j;\lambda_j) = e^{\lambda_j x_j - \int_0^{x_j} p(x_j)dx_j} \qquad (j=1,2)$$

є розв'язок рівняння

$$\frac{du}{dx_j} + p(x_j)u = \lambda_j u \qquad (j=1,2).$$

Тому рівність (11) набуде вигляду

$$\frac{a(x+y)}{a(x)a(y)}k(x+y) = \qquad (12)$$

$$= \int\int_{\mathbb{R}^1\mathbb{R}^1} \chi_0^{(1)}(x_1;\lambda_1)\chi_0^{(1)}(y_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(x_2;\lambda_2)\chi_0^{(2)}(y_2;\lambda_2)d\sigma(\lambda_1,\lambda_2).$$

За допомогою (12) перевіряється умова (1).

Теорему доведено. ■

Висновки

Доведена теорема дозволяє знайти додатно визначене ядро, пов'язане з оператором $\frac{d}{dx_j} + p(x_j)$ $(j=1,2)$. Якщо $p(x_j) = 0$, то одержимо інтегральне зображення експоненціально випуклих функцій двох змінних.

Можна також використовувати цю теорему під час дослідження інфінітезимальних операторів першого порядку [5].

Література

[1] Березанский Ю.М. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов // УМЖ. – 1959. – 11, 1. – С.16–24.

[2] Березанский Ю.М. Одно обобщение многомерной теоремы Бохнера // ДАН СССР – Т. 136, № 5, 1961. – С.1011–1014.

[3] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[4] Лопотко О.В. Інтегральне зображення додатно визначених функцій однієї змінної зв'язаних з оператором першого порядку // Вісник Нац. ун-ту "Львівської політехніки". – № 718, 2011. – С.78–80.

[5] Левитан Б.М. Теория операторов обобщенного сдвига. – М.: Наука. 1973. – 312 с.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАТОРОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Лопотко О. В.

Национальный лесотехнический университет Украины,
ул. Генерала Чупрынки, 103, Львов, 79057, Украина

Доказано теорему об интегральном представлении положительно определенных функций двух переменных $k(x)$ $(x \in \mathbb{R}^2)$, для которых ядро $K(x, y)$ положительно определено. Эта теорема есть обобщением теоремы об интегральном представлении экспоненциально выпуклых функций двух переменных.

Ключевые слова: интегральное представление, оператор, положительно определенные функции.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9

INTEGRAL REPRESENTATION OF POSITIVELY DEFINITE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES ASSOCIATED WITH AN OPERATOR OF FIRST ORDER

Lopotko O. V.

National University Forest of Lviv
103 General Chuprinka Str., Lviv, 79057, Ukraine

Integral representation is obtained for positive definite functions of two variables. This representation is generalization of integral representation for exponential convex functions of two variables.

Key words: integral representation, operator, positive definite functions.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9