ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.768 № 768, (2013) с. 85–99

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.768 No 768, (2013) 85–99

ТРИТОЧКОВА РІЗНИЦЕВА СХЕМА ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ЦИЛІНДРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

Кунинець А. В. , Кутнів М. В.

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С.Бандери 12, Львів, 79013, Україна

(Отримано 20 вересня 2013 р.)

Розроблено алгоритмічну реалізацію точної триточкової різницевої схеми розв'язування нелінійних звичайних диференціальних рівнянь у циліндричній системі координат через триточкові різницеві схеми рангу $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$ (m –ціле додатне, $[\cdot]$ – ціла частина). Доведено існування та єдиність розв'язку триточкової різницевої схеми рангу $\bar{m}$ та отримана оцінка точності. Результати теоретичних досліджень підтверджено на чисельному прикладі.

Ключові слова: нелінійні звичайні диференціальні рівняння, метод лінеаризації та принцип стискувальних відображень, точна триточкова різницева схема, триточкова різницева схема високого порядку точності, ітераційний метод Ньютона.

2000 MSC: 65L10, 65L12

УДК: 519.6

Вступ

Стаціонарне рівняння дифузії або теплопровідності в циліндричній системі координат у випадку осьової симетрії, має вигляд

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \quad x \in [0,R]. \tag{1}$$

При $x = 0$ ставиться умова обмеженості $|u(0)| < \infty$, яка еквівалентна умові

$$\lim_{x\to 0} xk(x)\frac{du}{dx} = 0, \tag{2}$$

а при $x = R$ — крайова умова першого роду

$$u(R) = \mu_2. \tag{3}$$

Достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі (1)—(3), які випливають з принципу стискувальних відображень, мають вигляд (див. [1])

$$0 < c_1 \le k(x) \le c_2 \quad \forall x \in [0,R],\ k(x) \in Q^1[0,R], \tag{4}$$

$$\begin{gathered} f_u(x) \equiv f(x,u) \in Q^0[0,R], \quad |f(x,u)| \le K \\ \forall x \in [0,R],\ u \in \Omega([0,R],\rho), \end{gathered} \tag{5}$$

$$|f(x,u)-f(x,v)| \le L|u-v|\ \forall x\in[0,R],\ u,v\in\Omega([0,R],\rho), \tag{6}$$

$$q = \frac{LR^2}{4c_1}\max(1, 2c_1) < 1. \tag{7}$$

Тут $Q^p[0,R]$ — клас функцій з кусково-неперервними похідними до p-го порядку включно із скінченною кількістю точок розриву першого роду, а $\Omega([0,R],r)$ — множина функцій вигляду

$$\Omega([0,R],r) = \left\{u(x) : u(x) \in W^1_\infty[0,R],\ u(x), xk(x)\frac{du}{dx} \in C[0,R],\ \left\|u - u^{(0)}\right\|^*_{1,\infty,[0,R]} \le r\right\},$$

$$r = \frac{KR^2}{4c_1}\max(1, 2c_1), \quad \|u\|_{0,\infty,[0,R]} = \max_{x\in[0,R]}|u(x)|, \quad \|u\|^*_{1,\infty,[0,R]} = \max\left\{\|u\|_{0,\infty,[0,R]},\ \left\|xk\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,[0,R]}\right\}.$$

Для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) другого порядку з крайовими умовами Діріхле у праці [2] вперше був запропонований підхід до побудови на рівномірній сітці точних триточкових різницевих схем (ТТРС) та розроблена їх алгоритмічна реалізація через триточкові різницеві схеми (ТРС) порядку точності m (m – ціле додатне). Ці результати були розвинуті та повністю обґрунтовані в [3]. Нова алгоритмічна реалізація ТТРС на нерівномірній сітці через ТРС порядку точності $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$ ($[\cdot]$ – ціла частина) розроблена у працях [4, 5].

У цій праці для задачі (1)—(3) побудовано та обґрунтовано алгоритмічну реалізацію ТТРС, запропонованої в [1].

I. Точна триточкова різницева схема

На відрізку $[0, R]$ введемо нерівномірну сітку

$$\widehat{\overline{\omega}}_h = \{x_j \in [0, R], \quad j = 0, 1, \ldots, N, \quad x_0 = 0, \ x_N = R\},$$
$$h_j = x_j - x_{j-1} > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \quad |h| = \max_{1 \le j \le N} h_j$$

так, щоб точки розриву функцій $k(x), f(x, u)$ збігалися з вузлами сітки $\widehat{\omega}_h = \{x_j, \ j = 1, 2, \ldots, N-1\}$. Множину всіх точок розриву позначимо через ρ і припустимо, що N таке, що $\rho \subseteq \widehat{\omega}_h$. Будемо вважати, що в точках розриву розв'язок задачі (1)—(3) задовольняє умови неперервності

$$u(x_i - 0) = u(x_i + 0), \quad xk(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_i-0} = $$
$$= xk(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_i+0} \quad \forall x_i \in \rho.$$

У просторі сіткових функцій введемо множину

$$\Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r) = \left\{(v_j)_{j=0}^N : \|v - u^{(0)}\|^*_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h} \le r\right\}$$

та норми

$$\|y\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-} = \max_{\xi \in \widehat{\omega}_h^-} |y(\xi)|, \ \widehat{\omega}_h^- = \widehat{\overline{\omega}}_h \backslash x_N,$$

$$\|y\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+} = \max_{\xi \in \widehat{\omega}_h^+} |y(\xi)|, \ \widehat{\omega}_h^+ = \widehat{\overline{\omega}}_h \backslash x_0,$$

$$\|y\|^*_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h} = \max\left\{\|y\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-}, \ \left\|xk\frac{dy}{dx}\right\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+}\right\},$$

$$\|y\|_{0,1,\widehat{\omega}_h^+ \backslash x_1} = \sum_{\xi \in \widehat{\omega}_h^+ \backslash x_1} h(\xi)|y(\xi)|.$$

ТТРС для задачі (1)—(3) (див. [1]) має вигляд

$$u_{x,0} = -\varphi(x_0, u), \quad a_2 u_{x,1}/(\hbar_1 x_1) = -\varphi(x_1, u),$$
$$\frac{1}{x_j}(a u_{\bar{x}})_{\hat{x},j} = -\varphi(x_j, u), \ j = 2, 3, \ldots, N-1, \ u_N = \mu_2, \tag{8}$$

де

$$u_{\bar{x},j} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}, \quad u_{x,j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{h_{j+1}}, \quad u_{\hat{x},j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\hbar_j}, \quad \hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2},$$
$$a_j = a(x_j) = \left[\frac{1}{h_j} V_1^j(x_j)\right]^{-1}, \quad j = 2, 3, \ldots, N-1, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_0, u) = \frac{1}{h_1}\left(u_0 - Y_1^1(x_1, u)\right), \\
&\varphi(x_1, u) = \frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^1(x_1, u) - Z_1^1(x_1, u) + \frac{Y_2^1(x_1, u) - u_2}{x_1 V_2^1(x_1)}\right], \\
&\varphi(x_j, u) = \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^j(x_j, u) + + (-1)^\alpha \frac{Y_\alpha^j(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{x_j V_\alpha^j(x_j)}\right], \quad j = 2, 3, \ldots, N-1,
\end{aligned} \tag{10}$$

а функції $Y_1^1(x_1, u), Z_1^1(x_1, u), \ Y_\alpha^j(x_j, u), Z_\alpha^j(x_j, u), \ j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \ \alpha = 1, 2$ —розв'язки задач Коші

$$\begin{aligned}
&\frac{dY_1^1(x, u)}{dx} = \frac{Z_1^1(x, u)}{k(x)}, \quad \frac{dZ_1^1(x, u)}{dx} = -f(x, Y_1^1(x, u)) - \frac{Z_1^1(x, u)}{x}, \quad 0 < x < x_1, \\
&Y_1^1(0, u) = u_0, \quad \lim_{x \to 0} Z_1^1(x, u) = 0,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dY_\alpha^j(x, u)}{dx} = \frac{Z_\alpha^j(x, u)}{k(x)}, \quad \frac{dZ_\alpha^j(x, u)}{dx} = -f(x, Y_\alpha^j(x, u)) - \frac{Z_\alpha^j(x, u)}{x}, \quad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \\
&Y_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = u_{j+(-1)^\alpha}, \quad Z_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},
\end{aligned} \tag{12}$$

функції $\bar{V}_\alpha^j(x) = (-1)^{\alpha+1} V_\alpha^j(x)$ — розв'язки задач Коші

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{V}_\alpha^j(x)}{dx} = \frac{1}{xk(x)}, \quad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \\
&\bar{V}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}) = 0, \quad j = 3-\alpha, 4-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Отже, для побудови ТТРС (8)–(10) необхідно для $\forall x_j \in \hat{\omega}_h$ розв'язати чотири задачі Коші (11) або (12) і (13). Якщо задачі (11)—(13) розв'язувати чисельно, то отримаємо відсічені ТРС.

II. Триточкова різницева схема високого порядку точності

Задачі Коші (11)—(13) будемо розв'язувати чисельно за допомогою будь-яких однокрокових методів (див., напр., [6])

$$\begin{aligned} &Y_1^{(\bar m)1}(x_1,u)=u_0+h_1\widetilde\Phi_1\left(x_0,u_0,0,h_1\right),\\ &Z_1^{(m)1}(x_1,u)=h_1\widetilde\Phi_2\left(x_0,u_0,0,h_1\right), \end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned} &Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)=u_{j+(-1)^\alpha}+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right),\\ &Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)=(ku')_{j+(-1)^\alpha}+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right),\\ &\bar V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)=(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right),\quad j=3-\alpha,4-\alpha,...,N+1-\alpha,\ \alpha=1,2, \end{aligned}\tag{15}$$

де $\widetilde\Phi_1(x,u,y,h)$, $\widetilde\Phi_2(x,u,y,h)$, $\Phi_1(x,u,y,h)$, $\Phi_2(x,u,y,h)$, $\Phi_3(x,u,h)$ — функції приросту, $(ku')_{j+(-1)^\alpha}=$ $=k(x)\dfrac{du}{dx}\Big|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}$, $Z_1^{(m)1}(x_1,u),Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)$ апроксимують значення $Z_1^1(x_1,u),Z_\alpha^j(x_j,u)$ з порядком точності m (m – ціле додатне), $Y_1^{(\bar m)1}(x_1,u),Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u),V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)$ апроксимують відповідно $Y_1^1(x_1,u),Y_\alpha^j(x_j,u),V_\alpha^j(x_j)$ з порядком точності $\bar m=2[(m+1)/2]$ ($[\cdot]$ – ціла частина). Якщо $k(x)$ та права частина диференціального рівняння $f(x,u)$ достатньо гладкі, то існують розклади

$$Y_1^1(x_1,u)=Y_1^{(\bar m)1}(x_1,u)+h_1^{\bar m+1}\psi_1^1(x_0,u)+O(h_1^{\bar m+2}),\tag{16}$$

$$Z_1^1(x_1,u)=Z_1^{(m)1}(x_1,u)+h_1^{m+1}\tilde\psi_1^1(x_0,u)+O(h_1^{m+2}),\tag{17}$$

$$Y_\alpha^j(x_j,u)=Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)+[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{\bar m+1}\psi_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}),\tag{18}$$

$$Z_\alpha^j(x_j,u)=Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)+[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{m+1}\tilde\psi_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)+O(h_{j-1+\alpha}^{m+2}),\tag{19}$$

$$\bar V_\alpha^j(x_j)=\bar V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)+[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{\bar m+1}\bar\psi_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}).\tag{20}$$

У випадку методу рядів Тейлора

$$\widetilde\Phi_1\left(x_0,u_0,0,h_1\right)=-h_1\frac{f(x_0,u_0)}{4k(x_0)}-\sum_{p=3}^{\bar m}\frac{h_1^{p-1}}{p!}\left[\sum_{j=0}^{p-2}\begin{pmatrix}p-1\\ j\end{pmatrix}\frac{p-j-1}{p-j}\frac{d^{p-j-2}f}{dx^{p-j-2}}\Big|_{x=x_0}\frac{d^j}{dx^j}\frac{1}{k(x)}\Big|_{x=x_0}\right],$$

$$\widetilde\Phi_2\left(x_0,u_0,0,h_1\right)=-\frac12 f(x_0,u_0)-\sum_{p=2}^{m}\frac{h_1^{p-1}}{(p-1)!(p+1)}\frac{d^{p-1}f}{dx^{p-1}}\Big|_{x=x_0},$$

$$\begin{aligned} &\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right)=\\ &\qquad=\left[1-(-1)^{\alpha+1}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}\left(\frac{1}{x_{j+(-1)^\alpha}}+\frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right]u'_{j+(-1)^\alpha}-\\ &\qquad-(-1)^{\alpha+1}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}\frac{f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha})}{k_{j+(-1)^\alpha}}+\sum_{p=3}^{\bar m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{p-1}}{p!}\frac{d^pY_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)}{dx^p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right)=\\ &\qquad=-f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha})-\frac{(ku')_{j+(-1)^\alpha}}{x_{j+(-1)^\alpha}}+\sum_{p=2}^{m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{p-1}}{p!}\frac{d^pZ_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)}{dx^p}, \end{aligned}$$

$$\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right)=\frac{1}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}}+\sum_{p=2}^{\bar m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{p-1}}{p!}\left[\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\frac{1}{xk(x)}\right]\Big|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}.$$

Лема 1. *Нехай*

$$0<c_1\le k(x)\le c_2\quad\forall x\in[0,R],\quad k(x)\in Q^{m+1}[0,R],$$

$$f(x,u)\in\bigcup_{j=1}^{N}C^m\left([x_{j-1},x_j]\times\Omega([0,R],r+\triangle)\right)$$

і для чисельних методів (15) існують розклади (18)—(20), тоді справджуються співвідношення

$$Y_\alpha^j(x_j,u)=Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha},u)+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}),\tag{21}$$

$$Z_{\alpha}^{j}(x_j,u)=Z_{\alpha}^{(m)j}(x_j,u)+[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{m+1}\tilde{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^{\alpha}},u)+O(h_{j-1+\alpha}^{m+2}), \tag{22}$$

$$V_{\alpha}^{j}(x_j)=V_{\alpha}^{(\bar{m})j}(x_j)+h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1}\bar{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^{\alpha}})+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2}), \tag{23}$$

$$j=3-\alpha,\ 4-\alpha,...,N+1-\alpha,\quad \alpha=1,2.$$

□ *Доведення.* З того, що метод (15) має порядок точності $\bar{m}$ та виконуються умови гладкості, випливає, що існують розклади (18)—(20) (див., напр., [6, с.168]). Згідно з (18), (19)

$$\begin{aligned} Y_1^{j}(x_j,u)-Y_1^{(\bar{m})j}(x_j,u)=&Y_1^{j}(x_j,u)-u(x_j-h_j)-h_j\Phi_1(x_j-h_j,u(x_j-h_j),ku'|_{x=x_j-h_j},h_j)=\\ =&h_j^{\bar{m}+1}\psi_1^{j}(x_j-h_j,u)+O(h_j^{\bar{m}+2}),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} Z_1^{j}(x_j,u)-Z_1^{(m)j}(x_j,u)=&Z_1^{j}(x_j,u)-ku'|_{x=x_j-h_j}-h_j\Phi_2(x_j-h_j,u(x_j-h_j),ku'|_{x=x_j-h_j},h_j)=\\ =&h_j^{m+1}\tilde{\psi}_1^{j}(x_j-h_j,u)+O(h_j^{m+2}).\end{aligned} \tag{25}$$

Зазначимо, що

$$Y_2^{j}(x_j,u)-Y_2^{(\bar{m})j}(x_j,u)=Y_2^{j}(x_j,u)-u_{j+1}+h_{j+1}\Phi_1(x_{j+1},u_{j+1},(ku')_{j+1},-h_{j+1}),$$

$$Z_2^{j}(x_j,u)-Z_2^{(m)j}(x_j,u)=Z_2^{j}(x_j,u)-(ku')_{j+1}+h_{j+1}\Phi_2(x_{j+1},u_{j+1},(ku')_{j+1},-h_{j+1}).$$

Підставимо в рівності (24), (25) замість h_j величину $-h_{j+1}$ і врахуємо, що $Y_1^{j}(x_j,u)=Y_2^{j}(x_j,u)$, $Z_1^{j}(x_j,u)=Z_2^{j}(x_j,u)$, тоді отримаємо

$$Y_2^{j}(x_j,u)-u_{j+1}+h_{j+1}\Phi_1(x_{j+1},u_{j+1},(ku')_{j+1},-h_{j+1})=-h_{j+1}^{\bar{m}+1}\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u)+O(h_{j+1}^{\bar{m}+2}),$$

$$Z_2^{j}(x_j,u)-(ku')_{j+1}+h_{j+1}\Phi_2(x_{j+1},u_{j+1},(ku')_{j+1},-h_{j+1})=(-1)^{m+1}h_{j+1}^{m+1}\tilde{\psi}_1^{j+1}(x_{j+1},u)+O(h_{j+1}^{m+2}).$$

Звідси випливають співвідношення (21), (22). Аналогічно до (21) доводиться рівність

$$\bar{V}_{\alpha}^{j}(x_j)=\bar{V}_{\alpha}^{(\bar{m})j}(x_j)+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1}\bar{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^{\alpha}})+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2}),$$

з якої з урахуванням того, що $\bar{V}_{\alpha}^{j}(x)=(-1)^{\alpha+1}V_{\alpha}^{j}(x)$, випливає (23). ■

Замість ТТРС (8) — (10) можна тепер скористатися ТРС рангу $\bar{m}$ вигляду

$$\begin{aligned} &y_{x,0}^{(\bar{m})}=-\varphi^{(\bar{m})}(x_0,y^{(\bar{m})}),\quad a_2^{(\bar{m})}y_{x,1}^{(\bar{m})}/(\hbar_1x_1)=-\varphi^{(\bar{m})}(x_1,y^{(\bar{m})}),\\ &\frac{1}{x_j}\left(a^{(\bar{m})}y_{\bar{x}}^{(\bar{m})}\right)_{\hat{x},j}=-\varphi^{(\bar{m})}(x_j,y^{(\bar{m})}),\quad j=2,3,\dots,N-1,\quad y_N^{(\bar{m})}=\mu_2,\end{aligned} \tag{26}$$

де

$$\begin{aligned} &a^{(\bar{m})}(x_j)=\left[\frac{1}{h_j}V_1^{(\bar{m})j}(x_j)\right]^{-1},\quad \varphi^{(\bar{m})}(x_0,u)=\frac{1}{h_1}\left(u_0-Y_1^{(\bar{m})1}(x_1,u)\right),\\ &\varphi^{(\bar{m})}(x_1,u)=\frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^{(m)1}(x_1,u)-Z_1^{(m)1}(x_1,u)+\frac{Y_2^{(\bar{m})1}(x_1,u)-u_2}{x_1V_2^{(\bar{m})1}(x_1)}\right],\\ &\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)=\frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha}\left[Z_{\alpha}^{(m)j}(x_j,u)+(-1)^{\alpha}\frac{Y_{\alpha}^{(\bar{m})j}(x_j,u)-u_{j+(-1)^{\alpha}}}{x_jV_{\alpha}^{(\bar{m})j}(x_j)}\right].\end{aligned}$$

Для доведення існування та єдиності розв'язку ТРС (26), а також для встановлення її точності необхідна

Лема 2. *Нехай виконані умови леми 1; тоді виконуватимуться оцінки*

$$\left|a^{(\bar{m})}(x_j)-a(x_j)\right|\le M|h|^{\bar{m}}, \tag{27}$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_0,u)-\varphi(x_0,u)=h_1^{\bar{m}}\psi_1^{1}(x_0,u)+O(h_1^{\bar{m}+1}), \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)=&\left\{h_j^{m+1}\left[k(x)\left(\psi_1^{j}(x,u)-\bar{\psi}_1^{j}(x)xk(x)\frac{du}{dx}\right)-\tilde{\psi}_1^{j}(x,u)\right]_{x=x_j+0}\right\}_{\hat{x}}+\\ &+O\left(\frac{h_j^{m+2}+h_{j+1}^{m+2}}{\hbar_j}\right),\quad j=1,2,\dots,N-1,\end{aligned} \tag{29}$$

якщо m непарне,

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) = \left\{ h_j^m \left[k(x) \left(\psi_1^j(x, u) - \bar{\psi}_1^j(x) x k(x) \frac{du}{dx} \right) \right]_{x=x_j+0} \right\}_{\hat{x}} + \\ + O\left(\frac{h_j^{m+1} + h_{j+1}^{m+1}}{\hbar_j} \right), \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{30}$$

якщо m парне; крім того

$$\begin{aligned} &\left| \varphi^{(\bar{m})}(x_0, u) \right| \le M|h|, \\ &\left| \varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) \right| \le K + M|h| \ \forall u \in \Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r + \triangle), \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &\left| \varphi^{(\bar{m})}(x_0, u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_0, v) \right| \le M|h| \cdot \|u - v\|^*_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h}, \\ &\left| \varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_j, v) \right| \le (L + M|h|) \|u - v\|^*_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h} \forall u, v \in \Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r + \triangle), \quad j = 1, 2, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{32}$$

Тут і надалі через M позначатимемо різні сталі, що не залежать від $|h|$, якщо це не буде спричиняти непорозуміння.

□ *Доведення.* Нерівність (27) випливає з (23), а співвідношення (28) — з (16). Дійсно,

$$a^{(\bar{m})}(x_j) - a(x_j) = \frac{h_j [V_1^j(x_j) - V_1^{(\bar{m})j}(x_j)]}{V_1^j(x_j) V_1^{(\bar{m})j}(x_j)} = O(h_j^{\bar{m}}),$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_0, u) - \varphi(x_0, u) = \frac{1}{h_1} \left(Y_1^1(x_1, u) - Y_1^{(\bar{m})1}(x_1, u) \right) = h_1^{\bar{m}} \psi_1^1(x_0, u) + O(h_1^{\bar{m}+1}).$$

Доведемо (29), (30). Зауважимо, що

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_1, u) - \varphi(x_1, u) = \frac{1}{\hbar_1} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^\alpha \left(Z_\alpha^{(m)1}(x_1, u) - Z_\alpha^1(x_1, u) \right) + \\ + \frac{1}{x_1} \left(\frac{Y_2^{(\bar{m})1}(x_1, u) - u_2}{V_2^{(\bar{m})1}(x_1)} - \frac{Y_2^1(x_1, u) - u_2}{V_2^1(x_1)} \right) \right], \tag{33}$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) = \frac{1}{\hbar_j} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^\alpha \left[Z_\alpha^{(m)j}(x_j, u) - Z_\alpha^j(x_j, u) + \\ + \frac{(-1)^\alpha}{x_j} \left(\frac{Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)} - \frac{Y_\alpha^j(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^j(x_j)} \right) \right]. \tag{34}$$

З леми 1 та рівності

$$Y_\alpha^j(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha} = (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha} \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} + O(h_{j-1+\alpha}^2)$$

маємо

$$\begin{aligned} &Z_1^{(m)1}(x_1, u) - Z_1^1(x_1, u) = -h_1^{m+1} \tilde{\psi}_1^1(x_0, u) + O(h_1^{m+2}), \\ &Z_\alpha^{(m)j}(x_j, u) - Z_\alpha^j(x_j, u) = -[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}]^{m+1} \tilde{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, u) + O(h_{j-1+\alpha}^{m+2}), \\ &\frac{Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)} - \frac{Y_\alpha^j(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^j(x_j)} = \\ &= \frac{Y_\alpha^j(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha} - (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1} \psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, u) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2})}{V_\alpha^j(x_j) - h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1} \bar{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2})} - \\ &- \frac{Y_\alpha^j(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^j(x_j)} = -\frac{(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1} \psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{V_\alpha^j(x_j)} + \\ &+ \frac{(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2} \bar{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}) \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}}{\left[V_\alpha^j(x_j) \right]^2} + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1}). \end{aligned} \tag{35}$$

З урахуванням (35) та співвідношення

$$V_\alpha^j(x_j) = \frac{h_{j-1+\alpha}}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}} + O(h_{j-1+\alpha}^2),$$

рівності (33), (34) за непарних m зводяться до

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar m)}(x_1,u) - \varphi(x_1,u) = \frac{1}{\hbar_1}\Big\{ &\frac{1}{x_1}\left[h_2^{m+1}x_2k_2\psi_1^2(x_2,u) - h_1^{m+1}x_0k_0\psi_1^1(x_0,u) - \right.\\ &\left.-h_2^{m+1}x_2k_2\bar\psi_1^2(x_2)(xku')_2 + h_1^{m+1}x_0k_0\bar\psi_1^1(x_0)(xku')_0\right] - \\ &-h_2^{m+1}\tilde\psi_1^2(x_2,u) + h_1^{m+1}\tilde\psi_1^1(x_0,u)\Big\} + O\left(\frac{h_1^{m+2}+h_2^{m+2}}{\hbar_1}\right),\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar m)}(x_j,u) - \varphi(x_j,u) = \frac{1}{\hbar_j}\Big\{ &\frac{1}{x_j}\left[h_{j+1}^{m+1}k_{j+1}\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u) - h_j^{m+1}k_{j-1}\psi_1^j(x_{j-1},u) - \right.\\ &\left.-h_{j+1}^{m+1}k_{j+1}\bar\psi_1^{j+1}(x_{j+1})(xku')_{j+1} + h_j^{m+1}k_{j-1}\bar\psi_1^j(x_{j-1})(xku')_{j-1}\right] - \\ &-h_{j+1}^{m+1}\tilde\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u) + h_j^{m+1}\tilde\psi_1^j(x_{j-1},u)\Big\} + O\left(\frac{h_j^{m+2}+h_{j+1}^{m+2}}{\hbar_j}\right),\end{aligned} \tag{37}$$

а за парних m – до виразів

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar m)}(x_1,u) - \varphi(x_1,u) = &\frac{1}{x_1\hbar_1}\left[h_2^{m}x_2k_2\psi_1^2(x_2,u) - h_1^{m}x_0k_0\psi_1^1(x_0,u) - \right.\\ &\left.-h_2^{m}x_2k_2\bar\psi_1^2(x_2)(xku')_2 + h_1^{m}x_0k_0\bar\psi_1^1(x_0)(xku')_0\right] + O\left(\frac{h_1^{m+1}+h_2^{m+1}}{\hbar_1}\right),\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar m)}(x_j,u) - \varphi(x_j,u) = &\frac{1}{x_j\hbar_j}\left[h_{j+1}^{m}k_{j+1}\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u) - h_j^{m}k_{j-1}\psi_1^j(x_{j-1},u) - \right.\\ &\left.-h_{j+1}^{m}k_{j+1}\bar\psi_1^{j+1}(x_{j+1})(xku')_{j+1} + h_j^{m}k_{j-1}\bar\psi_1^j(x_{j-1})(xku')_{j-1}\right] + O\left(\frac{h_j^{m+1}+h_{j+1}^{m+1}}{\hbar_j}\right).\end{aligned} \tag{39}$$

Оскільки

$$k_{j-1}\psi_1^j(x_{j-1},u) = k_j\psi_1^j(x_j,u) + O(h_j),\ \ \tilde\psi_1^j(x_{j-1},u) = \tilde\psi_1^j(x_j,u) + O(h_j),$$
$$k_{j-1}\bar\psi_1^j(x_{j-1})(xku')_{j-1} = k_j\bar\psi_1^j(x_j)(xku')_j + O(h_j),$$

то з урахуванням $x_j = x_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}$ із (36)—(39) випливають оцінки (29), (30).

Доведемо нерівності (31), (32). Із (14), (15) випливають співвідношення

$$\widetilde\Phi_1(x,u,0,0) = 0,\ \ \frac{\partial\widetilde\Phi_1(x,u,0,0)}{\partial h} = -\frac{f(x,u)}{4k(x)},\ \ \widetilde\Phi_2(x,u,0,0) = -\frac{f(x,u)}{2},$$

$$\Phi_1(x,u,y,0) = \frac{y}{k(x)},\ \ \frac{\partial\Phi_1(x,u,y,0)}{\partial h} = -\frac{1}{2}\left(\frac{f(x,u)}{k(x)} + \frac{y}{k(x)x} + \frac{yk'(x)}{k^2(x)}\right),$$

$$\Phi_2(x,u,y,0) = -f(x,u) - \frac{y}{x},\ \ \Phi_3(x,0,0) = \frac{1}{xk(x)},\ \ \frac{\partial\Phi_3(x,0,0)}{\partial h} = -\frac{1}{2xk(x)}\left(\frac{1}{x} + \frac{k'(x)}{k(x)}\right).$$

Отже, справджуються рівності

$$\begin{aligned}Y_1^{(\bar m)1}(x_1,u) =& u_0 + h_1\widetilde\Phi_1(x_0,u_0,0,0) + h_1^2\frac{\partial\widetilde\Phi_1(x_0,u_0,0,0)}{\partial h} + \frac{h_1^3}{2}\frac{\partial^2\widetilde\Phi_1\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar h}\right)}{\partial h^2} = \\ =& u_0 - h_1^2\frac{f(x_0,u_0)}{4k_0} + \frac{h_1^3}{2}\frac{\partial^2\widetilde\Phi_1\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar h}\right)}{\partial h^2},\end{aligned}$$

$$Z_1^{(m)1}(x_1,u) = h_1\widetilde\Phi_2(x_0,u_0,0,0) + h_1^2\frac{\partial\widetilde\Phi_2\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar h}\right)}{\partial h} = -h_1\frac{f(x_0,u_0)}{2} + h_1^2\frac{\partial\widetilde\Phi_2\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar h}\right)}{\partial h},$$

$$Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u) = u_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}}{2}\left(\frac{1}{x_{j+(-1)^\alpha}} + \frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right] u'_{j+(-1)^\alpha} -$$
$$-\frac{h_{j-1+\alpha}^2}{2}\frac{f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha})}{k_{j+(-1)^\alpha}} + (-1)^{\alpha+1}\frac{h_{j-1+\alpha}^3}{2}\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, (ku')_{j+(-1)^\alpha}, \bar h\right)}{\partial h^2},$$

$$Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u) = \left(1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}}{x_{j+(-1)^\alpha}}\right)(ku')_{j+(-1)^\alpha} - (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha} f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}) +$$
$$+ h_{j-1+\alpha}^2 \frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, (ku')_{j+(-1)^\alpha}, \tilde h\right)}{\partial h},$$

$$V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j) = \frac{h_{j-1+\alpha}}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}} + (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^2\frac{\partial\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, \breve h\right)}{\partial h},$$

$$V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j) = \frac{h_{j-1+\alpha}}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}}\left(1 - (-1)^{\alpha+1}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}\left(\frac{1}{x_{j+(-1)^\alpha}} + \frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right) + \frac{h_{j-1+\alpha}^3}{2}\frac{\partial^2\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, \breve h\right)}{\partial h^2}.$$

Звідси

$$\varphi^{(\bar m)}(x_0,u) = \frac{1}{h_1}\left(u_0 - Y_1^{(\bar m)1}(x_1,u)\right) =$$
$$= \frac{1}{h_1}\left(h_1^2\frac{f(x_0,u_0)}{4k_0} + \frac{h_1^3}{2}\frac{\partial^2\widetilde\Phi_1\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar h}\right)}{\partial h^2}\right) = h_1\frac{f(x_0,u_0)}{4k_0} + O(h_1^2), \tag{40}$$

$$\varphi^{(\bar m)}(x_1,u) = \frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^{(m)1}(x_1,u) - Z_1^{(m)1}(x_1,u) + \frac{Y_2^{(\bar m)1}(x_1,u) - u_2}{x_1 V_2^{(\bar m)1}(x_1)}\right] =$$
$$= \frac{1}{\hbar_1}\left\{\frac{h_1}{2}f(x_0,u_0) + \left[1 - \frac{1}{x_1V_2^{(\bar m)1}(x_1)}\frac{h_2}{2k_2}\right]h_2 f(x_2,u_2) +\right.$$
$$+\left[1 + \frac{h_2}{x_2} - \frac{h_2}{x_1V_2^{(\bar m)1}(x_1)}\left(\frac{1}{k_2} + \frac{h_2}{2}\left(\frac{k_2'}{k_2^2} + \frac{1}{(xk)_2}\right)\right)\right](ku')_2 - h_1^2\frac{\partial\widetilde\Phi_2\left(x_0,u_0,0,\hat{\tilde h}\right)}{\partial h} + \tag{41}$$
$$\left. + h_2^2\frac{\partial\Phi_2\left(x_2,u_2,(ku')_2,\tilde h\right)}{\partial h} - \frac{h_2^3}{2x_1V_2^{(\bar m)1}(x_1)}\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_2,u_2,(ku')_2,\bar h\right)}{\partial h^2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{h_1}{2}f(x_0,u_0) + \frac{h_2}{2}f(x_2,u_2)\right) + O\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{\hbar_1}\right),$$

$$\varphi^{(\bar m)}(x_j,u) = \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u) + (-1)^\alpha\frac{Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{x_jV_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}\right] =$$
$$= \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\left[1 - \frac{1}{x_jV_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2k_{j+(-1)^\alpha}}\right]h_{j-1+\alpha}f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}) +\right.$$
$$+ (-1)^\alpha\left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}}{x_{j+(-1)^\alpha}} - \frac{h_{j-1+\alpha}}{x_jV_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{k_{j+(-1)^\alpha}} - \frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}}{2}\left(\frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k^2_{j+(-1)^\alpha}} + \frac{1}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right)\right](ku')_{j+(-1)^\alpha} + \tag{42}$$
$$+ (-1)^\alpha h_{j-1+\alpha}^2\frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, (ku')_{j+(-1)^\alpha}, \tilde h\right)}{\partial h} +$$
$$\left. + \frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^3}{2x_jV_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, (ku')_{j+(-1)^\alpha}, \bar h\right)}{\partial h^2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}) + O\left(\frac{h_j^2 + h_{j+1}^2}{\hbar_j}\right).$$

Тоді

$$\left|\varphi^{(\bar{m})}(x_0,u)\right| \le M|h|, \quad |\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)| \le K + M|h|.$$

Доведемо оцінку (32). Оскільки

$$|\varphi^{(\bar{m})}(x_0,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_0,v)| \le \frac{h_1}{4k_0}|f(x_0,u_0) - f(x_0,v_0)| + \\ + \frac{h_1^2}{2}\left|\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_1\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar{h}}\right)}{\partial h^2} - \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_1\left(x_0,v_0,0,\hat{\bar{h}}\right)}{\partial h^2}\right|,$$

$$|\varphi^{(\bar{m})}(x_1,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_1,v)| \le \frac{1}{\hbar_1}\left[\frac{h_1}{2}|f(x_0,u_0) - f(x_0,v_0)| + \frac{h_2}{2}|f(x_2,u_2) - f(x_2,v_2)| \times\right. \\ \times\left[1 + \frac{h_2^2}{|V_2^{(\bar{m})1}(x_1)|}\left|\frac{\partial\Phi_3\left(x_2,0,\check{h}\right)}{\partial h}\right|\right] + \frac{h_2^3}{2x_2|V_2^{(\bar{m})1}(x_1)|}\left|\frac{\partial^2\Phi_3\left(x_2,0,\hat{h}\right)}{\partial h^2}\right|\|xku' - xkv'\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h^+} + \\ + h_1^2\left|\frac{\partial\widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar{h}}\right)}{\partial h} - \frac{\partial\widetilde{\Phi}_2\left(x_0,v_0,0,\hat{\bar{h}}\right)}{\partial h}\right| + \\ + h_2^2\left|\frac{\partial\Phi_2\left(x_2,u_2,(ku')_2,\tilde{h}\right)}{\partial h} - \frac{\partial\Phi_2\left(x_2,v_2,(kv')_2,\tilde{h}\right)}{\partial h}\right| + \\ \left. + \frac{h_2^3}{2x_1|V_2^{(\bar{m})1}(x_1)|}\left|\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_2,u_2,(ku')_2,\bar{h}\right)}{\partial h^2} - \frac{\partial^2\Phi_1\left(x_2,v_2,(kv')_2,\bar{h}\right)}{\partial h^2}\right|\right],$$

$$|\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_j,v)| \le \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}|f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha}) - f(x_{j+(-1)^\alpha},v_{j+(-1)^\alpha})| \times\right. \\ \times\left[1 + \frac{h_{j-1+\alpha}^2}{|V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)|}\left|\frac{\partial\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,\check{h}\right)}{\partial h}\right|\right] + \\ + \frac{h_{j-1+\alpha}^3}{2x_j|V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)|}\left|\frac{\partial^2\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,\tilde{h}\right)}{\partial h^2}\right|\|xku' - xkv'\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h^+} + \\ + \frac{h_{j-1+\alpha}^3}{2x_j|V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)|}\left|\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\bar{h}\right)}{\partial h^2} - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},v_{j+(-1)^\alpha},(kv')_{j+(-1)^\alpha},\bar{h}\right)}{\partial h^2}\right| + \\ + h_{j-1+\alpha}^2\left|\frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\tilde{h}\right)}{\partial h} - \right. \\ \left.\left. - \frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},v_{j+(-1)^\alpha},(kv')_{j+(-1)^\alpha},\tilde{h}\right)}{\partial h}\right|\right\},$$

то за формулою скінченних приростів знайдуться $\hat{u},\hat{y},\bar{u},\bar{y},\tilde{u},\tilde{y}$ такі, що

$$|\varphi^{(\bar{m})}(x_0,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_0,v)| \le M|h|\|u-v\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h^-},$$

$$|\varphi^{(\bar{m})}(x_1,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_1,v)| \le (L + M|h|)\|u-v\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h^-} + M|h|^2\|xku' - xkv'\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h^+} + \\ + M|h|\left[\left|\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_2\left(x_0,\hat{u},0,\hat{\bar{h}}\right)}{\partial h\partial u}\right| + \left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_2,\tilde{u},(ku')_2,\tilde{h}\right)}{\partial h\partial u}\right| + \left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_2,\bar{u},(ku')_2,\bar{h}\right)}{\partial h^2\partial u}\right|\right]\|u-v\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h^-} + \\ + M|h|\left[\left|\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,\hat{y},\hat{\bar{h}}\right)}{\partial h\partial y}\right| + \left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_2,u_2,\tilde{y},\tilde{h}\right)}{\partial h\partial y}\right| + \left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_2,u_2,\bar{y},\bar{h}\right)}{\partial h^2\partial y}\right|\right]\|xku' - xkv'\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h^+},$$

$$
\begin{aligned}
&|\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_j,v)|\le (L+M|h|)\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-}+M|h|^2\|xku'-xkv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}+\\
&+M|h|\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},\tilde u,(ku')_{j+(-1)^\alpha},\tilde h\right)}{\partial h\partial u}\right|+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},\bar u,(ku')_{j+(-1)^\alpha},\bar h\right)}{\partial h^2\partial u}\right|\right]\right\}\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-}+\\
&+M|h|\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},\tilde y,\tilde h\right)}{\partial h\partial y}\right|+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},\bar y,\bar h\right)}{\partial h^2\partial y}\right|\right]\right\}\|xku'-xkv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}.
\end{aligned}
$$

Звідси отримаємо оцінки (32). ■

На основі попередніх тверджень доводиться

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (4)—(7), леми 1, тоді* $\exists h_0>0$ *таке, що при* $|h|\le h_0$ *ТРС (26) має єдиний розв'язок, точність якого характеризується оцінкою*

$$
\left\|y^{(\bar m)}-u\right\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}=\max\left\{\left\|y^{(\bar m)}-u\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-},\ \left\|xk\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}-xk\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}\right\}\le M|h|^{\bar m},
$$

де

$$
\left[xk\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_1}=x_1Z_1^{(m)1}(x_1,y^{(\bar m)}),
$$

$$
\left[xk\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_j}=x_jZ_1^{(\bar m)j}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)+\frac{y_j^{(\bar m)}-Y_1^{(\bar m)j}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)}{V_1^{(\bar m)j}(x_j)},\quad j=2,3,...,N.
$$

□ *Доведення.* Покажемо, що за умов теореми ТРС рангу $\bar m$ (26) має єдиний розв'язок $y^{(\bar m)}(x)$, $x\in\widehat{\bar\omega}_h$. Використаємо принцип стискувальних відображень (див., напр., [7, 8]). Розглянемо операторне рівняння

$$
y_i^{(\bar m)}=\Re_h(x_i,(y_j^{(\bar m)})_{j=0}^N)=\sum_{\xi\in\hat\omega_h}\hbar(\xi)G^{(\bar m)}(x_i,\xi)\varphi^{(\bar m)}\left(\xi,y^{(\bar m)}\right)+\mu_2+h_1\varphi^{(\bar m)}\left(x_0,y^{(\bar m)}\right)\delta_{i,0},\tag{43}
$$

де $\delta_{i,j}$ – символ Кронеккера, $G^{(\bar m)}(x,\xi)$ – функція Гріна задачі (26) вигляду (див., напр., [9, с.184])

$$
G^{(\bar m)}(x,\xi)=\begin{cases}\xi V^{(\bar m)}(\xi), & 0\le x\le\xi,\\ \xi V^{(\bar m)}(x), & \xi\le x\le R,\end{cases}
$$

$$
V^{(\bar m)}(x_j)=\sum_{k=j+1}^{N}\frac{h_k}{a^{(\bar m)}(x_k)}=\sum_{k=j+1}^{N}V_1^{(\bar m)k}(x_k).
$$

Зауважимо, що

$$
\left[xk\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_1}=O\left(|h|^2\right),\quad \left[xk\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_j}=a^{(\bar m)}(x_j)y^{(\bar m)}_{\bar x,j}+O\left(|h|\right),\quad j=2,3,...,N.
$$

Враховуючи формулу підсумовування за частинами (див., напр., [10, с. 233]), отримаємо

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N-1}G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\hbar_j=V^{(\bar m)}(x_i)\sum_{j=1}^{i}x_j\hbar_j+\sum_{j=i+1}^{N-1}V^{(\bar m)}(x_j)x_j\hbar_j=\frac12V^{(\bar m)}(x_i)x_{i+1}x_i+\\
&+\frac12\sum_{j=i+1}^{N-1}V^{(\bar m)}(x_j)(x_jx_{j-1})_{\hat x,j}\hbar_j=-\frac12\sum_{j=i+1}^{N}\left(V^{(\bar m)}(x_j)-V^{(\bar m)}(x_{j-1})\right)x_jx_{j-1}=\\
&=\frac12\sum_{j=i+1}^{N}V_1^{(\bar m)j}(x_j)x_jx_{j-1}\le\frac{1}{2c_1}\sum_{j=i+1}^{N}x_jh_j\le\frac{1}{4c_1}\sum_{j=i+1}^{N}\left(x_j^2+h_j^2\right)\le\frac{R^2}{4c_1}+M|h|,
\end{aligned}\tag{44}
$$

$$\left|a^{(\bar m)}(x_i)\right|\sum_{j=1}^{N-1}\left|\left(G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\right)_{\bar x,i}\right|\hbar_j=\frac{h_i\left|V_{\bar x,i}^{(\bar m)}(x_i)\right|}{\left|V_1^{(\bar m)i}(x_i)\right|}\sum_{j=1}^{i-1}x_j\hbar_j=\sum_{j=1}^{i-1}x_j\hbar_j=\frac{1}{2}x_ix_{i-1}\le\frac{R^2}{2}. \tag{45}$$

Отже,

$$\begin{aligned}&\left\|\Re_h(x,(u_j)_{j=0}^N)-u^{(0)}(x)\right\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h}\le\max\left\{\frac{R^2}{4c_1}+M|h|,\frac{R^2}{2}\right\}(K+M|h|)=\\&=\frac{KR^2}{4c_1}\max(1,2c_1)+M|h|=r+M|h|\le r+\Delta\quad\forall(u_j)_{j=0}^N\in\Omega(\widehat{\omega}_h,r+\Delta),\end{aligned} \tag{46}$$

тобто оператор $\Re_h(x,(u_j)_{j=0}^N)$ переводить $\Omega(\widehat{\omega}_h,r+\Delta)$ в себе.

Крім того, враховуючи нерівності (32),

$$\begin{aligned}&\left\|\Re_h(x,(u_j)_{j=0}^N)-\Re_h(x,(v_j)_{j=0}^N)\right\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h}\le\\&\le\max\left\{\frac{R^2}{4c_1}+M|h|,\frac{R^2}{2}\right\}\max_{j=\overline{1,N-1}}\left|\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_j,v)\right|+h_1\left|\varphi^{(\bar m)}(x_0,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_0,v)\right|\le\\&\le\left(\frac{LR^2}{4c_1}\max(1,2c_1)+M_2|h|\right)\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h}=q_2\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h}\quad\forall(u_j)_{j=0}^N,(v_j)_{j=0}^N\in\Omega(\widehat{\omega}_h,r+\Delta).\end{aligned} \tag{47}$$

Якщо вибрати h_0 таким, що $q_2=q+M_2|h|<1$, то відображення $\Re_h(x,(u_j)_{j=0}^N)$ стискувальне.

Для похибки $z(x)=y^{(\bar m)}-u(x),\ x\in\hat\omega_h$ отримаємо задачу

$$\begin{aligned}&z_{x,0}=\varphi(x_0,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_0,y^{(\bar m)}),\quad a_2^{(\bar m)}z_{x,1}/(\hbar_1x_1)=\varphi(x_1,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_1,y^{(\bar m)})+\left(a_2-a_2^{(\bar m)}\right)u_{x,1}/(\hbar_1x_1),\\&\frac{1}{x_j}(a^{(\bar m)}z_{\bar x})_{\hat x,j}=\varphi(x_j,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_j,y^{(\bar m)})+\frac{1}{x_j}\left[\left(a-a^{(\bar m)}\right)u_{\bar x}\right]_{\hat x,j},\quad j=2,3,\ldots,N-1,\quad z_N=0,\end{aligned}$$

розв'язок якої за допомогою функції Гріна можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}z_i=&\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_jG^{(\bar m)}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar m)}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)-\varphi(x_j,u)\right]+\\&+\sum_{j=2}^{N-1}\hbar_j\frac{1}{x_j}G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\left[\left(a^{(\bar m)}(x_j)-a(x_j)\right)u_{\bar x,j}\right]_{\hat x,j}+\frac{1}{x_1}G^{(\bar m)}(x_i,x_1)\left(a_2^{(\bar m)}-a_2\right)u_{x,1}+\\&+h_1\left\{\varphi^{(\bar m)}\left(x_0,y^{(\bar m)}\right)-\varphi(x_0,u)\right\}\delta_{i,0}=\\&=\sum_{j=2}^{N}h_j\left[\frac{1}{x_j}G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\right]_{\bar x,j}\left[a(x_j)-a^{(\bar m)}(x_j)\right]u_{\bar x,j}+\\&+\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_jG^{(\bar m)}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar m)}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)-\varphi(x_j,u)\right]+h_1\left\{\varphi^{(\bar m)}\left(x_0,y^{(\bar m)}\right)-\varphi(x_0,u)\right\}\delta_{i,0},\end{aligned} \tag{48}$$

Для непарного m з урахуванням (28), (29), з (48) отримаємо

$$\begin{aligned}z_i=&\sum_{j=2}^{N}h_j\left\{\frac{1}{x_j}G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\right\}_{\bar x,j}\left[a(x_j)-a^{(\bar m)}(x_j)\right]u_{\bar x,j}-\\&-\sum_{j=1}^{N}h_j^{m+2}\left\{G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\right\}_{\bar x,j}\left[k(x)\left(\psi_1^j(x,u)-\bar\psi_1^j(x)xk(x)\frac{du}{dx}\right)-\tilde\psi_1^j(x,u)\right]_{x=x_j+0}+\\&+\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_jG^{(\bar m)}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar m)}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)-\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)\right]+\\&+h_1\left\{\varphi^{(\bar m)}\left(x_0,y^{(\bar m)}\right)-\varphi^{(\bar m)}(x_0,u)\right\}\delta_{i,0}+O(|h|^{m+1}).\end{aligned}$$

Тоді

$$|z_i|\le\left(\frac{1}{c_1x_i}+M|h|\right)\|a-a^{(m+1)}\|_{0,1,\hat\omega_h^+\setminus x_1}\|u_{\bar x}\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+}+M|h|^{m+1}+q_2\|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h}\le M|h|^{m+1}+q_2\|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h}.$$

Якщо m – парне, то, враховуючи (28), (30), рівність (48) запишемо у вигляді

$$z_i = \sum_{j=2}^{N} h_j \left\{ \frac{1}{x_j} G^{(\bar{m})}(x_i, x_j) \right\}_{\bar{x},j} \left[a(x_j) - a^{(\bar{m})}(x_j) \right] u_{\bar{x},j} -$$
$$- \sum_{j=1}^{N} h_j^{m+1} \left\{ G^{(\bar{m})}(x_i, x_j) \right\}_{\bar{x},j} \left[k(x) \left(\psi_1^j(x,u) - \bar{\psi}_1^j(x) x k(x) \frac{du}{dx} \right) \right]_{x=x_j+0} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j G^{(\bar{m})}(x_i, x_j) \left[\varphi^{(\bar{m})} \left(x_j, y^{(\bar{m})} \right) - \varphi^{(\bar{m})} (x_j, u) \right] +$$
$$+ h_1 \left\{ \varphi^{(\bar{m})} \left(x_0, y^{(\bar{m})} \right) - \varphi^{(\bar{m})} (x_0, u) \right\} \delta_{i,0} + O(|h|^m).$$

Звідси

$$|z_i| \le \left(\frac{1}{c_1 x_i} + M|h| \right) \|a - a^{(m)}\|_{0,1,\widehat{\omega}_h^+ \setminus x_1} \|u_{\bar{x}}\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+} + M|h|^m + q_2 \|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h} \le M|h|^m + q_2 \|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}.$$

Отже,

$$|z_i| \le M|h|^{\bar{m}} + q_2 \|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}.$$

Враховуючи рівність $y_j^{(\bar{m})} = Y_1^j(x_j, y_j^{(\bar{m})})$ (див. лему 3.1 [1]), отримаємо

$$\left| \left[xk \frac{dz}{dx} \right]_{x=x_1} \right| \le x_1 \left| Z_1^{(m)1}(x_1, y^{(\bar{m})}) - Z_1^1(x_1, y^{(\bar{m})}) \right| + \left| x_1 Z_1^1(x_1, y^{(\bar{m})}) - x_1 Z_1^1(x_1, u) \right|,$$

$$\left| \left[xk \frac{dz}{dx} \right]_{x=x_j} \right| \le x_j \left| Z_1^{(m)j}(x_j, y^{(\bar{m})}) - Z_1^j(x_j, y^{(\bar{m})}) \right| + \left| x_j Z_1^j(x_j, y^{(\bar{m})}) - x_j Z_1^j(x_j, u) \right| +$$
$$+ \frac{1}{\left| V_1^{(\bar{m})j}(x_j) \right|} \left| Y_1^j(x_j, y^{(\bar{m})}) - Y_1^{(\bar{m})j}(x_j, y^{(\bar{m})}) \right|, \quad j = 2, 3, ..., N.$$

Зауважимо, що розв'язок ТТРС (8) можна записати у вигляді

$$u(x) = \Re_h(x, (u_j)_{j=0}^N) = \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \mu_2, \tag{49}$$

де $G(x,\xi)$—функція Гріна задачі (1)—(3), функція $u(x)$ в правій частині (49) визначається формулою

$$u(x) = Y_1^j(x,u), \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, 2, ..., N.$$

Оскільки згідно з лемою 3.3 з [1] оператор $\Re_h(x, (u_j)_{j=0}^N)$ є стискувальний, то

$$\left| x_j Z_1^j(x_j, y^{(\bar{m})}) - x_j Z_1^j(x_j, u) \right| \le \left\| \Re_h(x, (y_j^{\bar{m}})_{j=0}^N) - \Re_h(x, (u_j)_{j=0}^N) \right\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h} \le$$
$$\le (q + M_1|h|) \|y^{\bar{m}} - u\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h} = q_1 \|y^{\bar{m}} - u\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}, \quad j = 1, 2, ..., N.$$

Тоді

$$\left| \left[xk \frac{dz}{dx} \right]_{x=x_j} \right| \le M|h|^{\bar{m}} + q_1 \|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}, \quad j = 1, 2, ..., N.$$

Отже,

$$\|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h} \le \frac{M|h|^{\bar{m}}}{1 - \max(q_1, q_2)},$$

з якої в силу того, що $\max(q_1, q_2) < 1$ при $|h| \le h_0$ випливає

$$\|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h} \le M|h|^{\bar{m}}.$$

Теорема доведена. ■

Розв'язок нелінійної ТРС (26) може бути знайдено методом послідовних наближень.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови Теореми 1, тоді розв'язок задачі (26) може бути знайдено за допомогою методу послідовних наближень*

$$y_{x,0}^{(\bar m,n)} = -\varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n-1)}), \quad a_2^{(\bar m)} y_{x,1}^{(\bar m,n)}/(\hbar_1 x_1) = -\varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n-1)}),$$

$$\frac{1}{x_j}\left(a^{(\bar m)} y_{\bar x}^{(\bar m,n)}\right)_{\hat x,j} = -\varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n-1)}), \quad j = 2,3,\ldots,N-1, \tag{50}$$

$$y_N^{(\bar m,n)} = \mu_2, \quad n = 1,2,\ldots\ , \quad y_j^{(\bar m,0)} = \mu_2, \quad j = 0,1,\ldots,N$$

і справджується оцінка

$$\left\| y^{(\bar m,n)} - u \right\|_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}^{*} \le M(|h|^{\bar m} + q_2^n),$$

де

$$\left[xk\frac{dy^{(\bar m,n)}}{dx} \right]_{x=x_1} = x_1 Z_1^{(m)1}(x_1, y^{(\bar m,n)}),$$

$$\left[xk\frac{dy^{(\bar m,n)}}{dx} \right]_{x=x_j} = x_j Z_1^{(m)j}(x_j, y^{(\bar m,n)}) + \frac{y_j^{(\bar m)} - Y_1^{(\bar m)j}\left(x_j, y^{(\bar m,n)}\right)}{V_1^{(\bar m)j}(x_j)}, \quad j = 2,3,...,N,$$

стала M не залежить від $|h|, m, n$, а величина $q_2 = q + M_2|h| < 1$.

□ *Доведення.* В силу теореми 1 маємо

$$\left\| y^{(\bar m,n)} - u \right\|_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}^{*} \le \left\| y^{(\bar m)} - u \right\|_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}^{*} + \left\| y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m)} \right\|_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}^{*} \le M|h|^{\bar m} + \left\| y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m)} \right\|_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}^{*}. \tag{51}$$

Послідовність наближень

$$y^{(\bar m,n)}(x) = \Re_h(x, (y^{(\bar m,n-1)})_{j=0}^N), \quad x \in \widehat{\bar\omega}_h, \quad n = 1,2,...$$

збігається (див. доведення теореми 1) і має місце оцінка швидкості збіжності (див., напр., [8, с. 391])

$$\left\| y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m)} \right\|_{0,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}^{*} \le \frac{q_2^n}{1-q_2}(r+\Delta). \tag{52}$$

З нерівностей (51), (52) випливає оцінка (50). ■

З практичної точки зору для обчислення розв'язку ТРС (26) доцільніше використовувати ітераційний метод Ньютона. Лінеаризуємо (26) з урахуванням рівностей

$$\varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n)}) = \varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n-1)}) + \frac{h_1}{4k_0}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} + O(h_1^2),$$

$$\varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n)}) = \varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n-1)}) + \frac{h_1}{2\hbar_1}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} + \\ + \frac{h_2}{2\hbar_1}\frac{x_2}{x_1}\frac{\partial f(x_2, y_2^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_2^{(\bar m,n)} + O\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{\hbar_1}\right),$$

$$\varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n)}) = \varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n-1)}) + \frac{h_j}{2\hbar_j}\frac{x_{j-1}}{x_j}\frac{\partial f(x_{j-1}, y_{j-1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j-1}^{(\bar m,n)} + \\ + \frac{h_{j+1}}{2\hbar_1}\frac{x_{j+1}}{x_j}\frac{\partial f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j+1}^{(\bar m,n)} + O\left(\frac{h_j^2+h_{j+1}^2}{\hbar_j}\right),$$

тоді модифікований ітераційний метод Ньютона матиме вигляд

$$\begin{aligned}
&\nabla y_{x,0}^{(\bar m,n)} + \frac{h_1}{4k_0}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} = -\varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n-1)}) - y_{x,0}^{(\bar m,n-1)},\\
&\frac{a_2^{(\bar m)}\nabla y_{x,1}^{(\bar m)}}{\hbar_1 x_1} + \frac{h_1}{2\hbar_1}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} + \frac{h_2}{2\hbar_1}\frac{x_2}{x_1}\frac{\partial f(x_2, y_2^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_2^{(\bar m,n)} =\\
&\qquad\qquad = -\varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n-1)}) - \frac{a_2^{(\bar m)} y_{x,1}^{(\bar m,n-1)}}{\hbar_1 x_1},\\
&\frac{1}{x_j}\left(a^{(\bar m)}\nabla y_{\bar x}^{(\bar m,n)}\right)_{\hat x,j} + \frac{h_j}{2\hbar_j}\frac{x_{j-1}}{x_j}\frac{\partial f(x_{j-1}, y_{j-1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j-1}^{(\bar m,n)} +\\
&\qquad\qquad + \frac{h_{j+1}}{2\hbar_1}\frac{x_{j+1}}{x_j}\frac{\partial f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j+1}^{(\bar m,n)} =\\
&\qquad\qquad = -\varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n-1)}) + \frac{1}{x_j}\left(a^{(\bar m)} y_{\bar x}^{(\bar m,n-1)}\right)_{\hat x,j}, \quad \nabla y_N^{(\bar m,n)} = 0,\\
&\qquad y_j^{(\bar m,n)} = y_j^{(\bar m,n-1)} + \nabla y_j^{(\bar m,n)}, \quad j = 0,1,\dots,N, \quad n = 1,2,\dots
\end{aligned} \tag{53}$$

III. Чисельні експерименти

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\frac{du}{dx}\right] = u^3 - 3u^5, \quad x \in (0,1),$$

$$\lim_{x\to 0} x\frac{du}{dx} = 0, \quad u(1) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

з відомим точним розв'язком $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Задачу будемо розв'язувати чисельно на рівномірній сітці $\overline{\omega}_h = \{x_j = jh,\ j = 0,1,\dots,N,\ h = 1/N\}$ за допомогою схеми (26) при $m = \bar m = 4$. Для розв'язування допоміжних задач Коші (11), (12) застосуємо метод рядів Тейлора четвертого порядку точності, тоді отримаємо

$$\begin{aligned}
Y_1^{(4)1}(x_1, u) &= u_0 - \frac{h^2}{4} f(0, u_0) - \frac{h^3}{9}\frac{df(0,u_0)}{dx} - \frac{h^4}{32}\frac{d^2 f(0,u_0)}{dx^2},\\
Z_1^{(4)1}(x_1, u) &= -\frac{h}{2} f(0,u_0) - \frac{h^2}{3}\frac{df(0,u_0)}{dx} - \frac{h^3}{8}\frac{d^2 f(0,u_0)}{dx^2} - \frac{h^4}{30}\frac{d^3 f(0,u_0)}{dx^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_\alpha^{(4)j}(x_j, u) &= u_{j+(-1)^\alpha} +\\
&+ (-1)^{\alpha+1} h\left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{2(j+(-1)^\alpha)} + \frac{1}{3(j+(-1)^\alpha)^2} - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{4(j+(-1)^\alpha)^3}\right]\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} -\\
&- \frac{h^2}{2}\left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{3(j+(-1)^\alpha)} + \frac{1}{4(j+(-1)^\alpha)^2}\right] f\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}\right) -\\
&- (-1)^{\alpha+1}\frac{h^3}{6}\left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{4(j+(-1)^\alpha)}\right]\frac{df(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha})}{dx} -\\
&- \frac{h^4}{24}\frac{d^2 f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha})}{dx^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_\alpha^{(4)j}(x_j, u) &= \left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{j+(-1)^\alpha} + \frac{1}{(j+(-1)^\alpha)^2} - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(j+(-1)^\alpha)^3} + \frac{1}{(j+(-1)^\alpha)^4}\right]\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} -\\
&- (-1)^{\alpha+1} h\left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{2(j+(-1)^\alpha)} + \frac{1}{2(j+(-1)^\alpha)^2} - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{2(j+(-1)^\alpha)^3}\right] f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}) -\\
&- \frac{h^2}{2}\left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{3(j+(-1)^\alpha)} + \frac{1}{3(j+(-1)^\alpha)^2}\right]\left.\frac{df(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha})}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}\\
&- (-1)^{\alpha+1}\frac{h^3}{6}\left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{4(j+(-1)^\alpha)}\right]\left.\frac{d^2 f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha})}{dx^2}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}\\
&- \frac{h^4}{24}\left.\frac{d^3 f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha})}{dx^3}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}.
\end{aligned}$$

Розв'язок різницевої схеми (26) $y_j^{(4)},\ j = 0, 1, \dots, N$ шукатимемо за допомогою модифікованого ітераційного методу Ньютона, а для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (53) з тридіагональною матрицею — метод прогонки. Результати чисельного розв'язування задачі наведено в таблиці, де

$$error = \left\| z^{(4)} \right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_h} = \left\| y^{(4)} - u \right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_h} =$$

$$= \max\left\{ \left\| y^{(4)} - u \right\|_{0,\infty,\overline{\omega}_h^-},\ \left\| x\frac{dy^{(4)}}{dx} - x\frac{du}{dx} \right\|_{0,\infty,\overline{\omega}_h^+} \right\},$$

$$p = \log_2 \frac{\left\| z^{(4)} \right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_h}}{\left\| z^{(4)} \right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_{h/2}}},$$

NIT – кількість ітерацій.

Результати чисельного розв'язування задачі за допомогою ТРС порядку точності 4

N	NIT	$error$	p
20	9	0.7337E-05	
40	4	0.4527E-06	4
80	4	0.2802E-07	4
160	3	0.1741E-08	4
320	3	0.1091E-09	4

Висновки

Отже, у статті для чисельного розв'язування задачі (1)—(3) побудовано та обгрунтовано ТРС високого порядку точності. Результати теоретичних досліджень підтверджено чисельними розрахунками.

Література

[1] Kunynets A. V., Kutniv M. V. Exact three-point difference scheme for nonlinear stationary differential equations in cylindrical coordinates // Журнал обчислювальної та прикладної математики (Серія "Обчислювальна математика"). – 2011. – Вип. 2 (105) – С. 51–68.

[2] Макаров В. Л., Самарский А. А. Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 312, № 4. – С. 795–800.

[3] Кутнив М. В., Макаров В. Л., Самарский А. А. Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39, № 1. – С. 45–60.

[4] Kutniv M. V. Modified three-point difference schemes of high-accuracy order for second order nonlinear ordinary differential equations // Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM). – 2003. – Vol. 3, No. 2. – P. 287–312.

[5] Гнатів Л. Б., Кутнів М. В., Чухрай А. І. Узагальнені триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 59–69.

[6] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.:Мир, 1990. – 512 с.

[7] Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. – М.:Наука, 1988. – 304 с.

[8] Треногин В. А. Функциональный анализ. – М.:Наука, 1980. – 496 с.

[9] Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.

[10] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

ТРЕХТОЧЕЧНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Кунинец А. В., Кутнив М. В.

Национальный университет "Львiвська политэхника",
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

Разработано алгоритмическую реализацию точной трехточечной разностной схемы решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в цилиндрической системе координат через трехточечные разностные схемы ранга $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$ (m – целое положительное, $[\cdot]$ – целая часть). Доказано существование и единственность решения трехточечной разностной схемы ранга $\bar{m}$ и получена оценка точности. Результаты теоретических исследований подтверждено на численном примере.

Ключевые слова: нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, метод линеаризации и принцип сжимающих отображений, точная трехточечная разностная схема, трехточечная разностная схема высокого порядка точности, итерационный метод Ньютона.

2000 MSC: 65L10, 65L12

УДК: 519.6

THREE-POINT DIFFERENCE SCHEME OF HIGH ORDER ACCURACY FOR NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER IN CYLINDRICAL COORDINATES

Kunynets A. V. , Kutniv M. V.

Lviv Polytechnik National University
12 Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine

Algorithmic realization of three-point difference scheme for solving nonlinear ordinary differential equations in cylindrical coordinates with the use of truncated three-point difference schemes of range $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$ (m – a positive integer, $[\cdot]$ – is an integer part) are carried out. Existence and uniqueness of the solution of the three-point difference scheme of range $\bar{m}$ are proved and error estimate are given. Results of theoretical research are confirmed by a numerical example.

Key words: nonlinear ordinary differential equations, linearization method, principle of contraction mapping, exact three-point difference scheme, three-point difference scheme of high order accuracy, Newton iterative method.

2000 MSC: 65L10, 65L12

УДК: 519.6