ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.768 № 768, (2013) с. 12–19

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.768 No 768, (2013) 12–19

МІРА МНОЖИНИ РІВНЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І ЗНАКОСТАЛИМИ ПРАВИМИ ЧАСТИНАМИ

Ільків В. С.[a], Магеровська Т. В.[b], Нитребич З. М.[a]

[a]*Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна
[b]*Львівський державний університет внутрішніх справ*
вул. Городоцька 26, 79007, Львів, Україна

(Отримано 28 березня 2013 р.)

Знайдено оцінку міри множини рівня функції, яка на деякому відрізку є розв'язком неоднорідного звичайного диференціального рівняння першого або другого порядку зі сталими коефіцієнтами та відділеною від нуля правою частиною. Ця оцінка узагальнює результат відомої леми Пяртлі та інші відомі оцінки. Вивчено властивості та доведено екстремальність знайдених нерівностей.

Ключові слова: міра множини, діофантів аналіз, малі знаменники.

2000 MSC: 26A24, 11J83

УДК: 517.2

I. Постановка задачі і деякі відомі результати

Для ненульових дійсних чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, впорядкованих за незростанням абсолютних величин

$$|\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_n| > 0,$$

розглянемо диференціальні вирази

$$L_j = L_j\Big(\frac{d}{dx}\Big), \quad L_{(j)} = L_{(j)}\Big(\frac{d}{dx}\Big), \qquad j = 1, \ldots, n,$$

зі сталими коефіцієнтами та неперервні функції

$$g_1 = L_1\Big(\frac{d}{dx}\Big)f, \ldots, g_n = L_n\Big(\frac{d}{dx}\Big)f,$$

де f — неперервна разом з похідними $f', \ldots, f^{(n)}$ функція на проміжку $[a, b]$, тобто $f \in \mathbf{C}^n[a, b]$, і

$$L_j(\lambda) = (\lambda + \lambda_1) \cdots (\lambda + \lambda_j), \quad L_{(j)}(\lambda) = \lambda + \lambda_j.$$

Нехай $\mathbf{C}_{\delta, L_n}[a, b]$ — множина таких дійснозначних функцій $f \in \mathbf{C}^n[a, b]$, для яких праві частини диференціального рівняння $L_n f = g_n$ є знакосталими функціями на $[a, b]$ і

$$\min_{x \in [a,b]} |g_n(x)| \geq \delta > 0,$$

де число δ не залежить від f.

Вивчається оцінка зверху міри Лебеґа на прямій $\operatorname{meas} G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f)$ множини

$$G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f) = \{x \in [a, b] \colon |f(x)| < \varepsilon\} \qquad (1)$$

точок $x \in [a, b]$, для яких виконується нерівність $|f(x)| < \varepsilon$, де $f \in \mathbf{C}_{\delta, L_n}[a, b]$, а ε і δ — додатні числа.

Множину $G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f)$ називатимемо множиною рівня ε функції f.

Проблему знаходження такої оцінки остаточно розв'язано авторами [1] для нульових чисел λ_j, зокрема, якщо $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, то

$$\operatorname{meas} G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f) \leq \min\Big\{4\sqrt[n]{\frac{n!}{2}} \cdot \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}}, \ b - a\Big\}. \qquad (2)$$

Ця оцінка є точною на множині функцій $\mathbf{C}_{\delta, L_n}[a, b]$, в якій $L_n\Big(\frac{d}{dx}\Big) = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n = \frac{d^n}{dx^n}$.

Раніше подібні оцінки, що мають вигляд

$$\operatorname{meas} G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f) \leq C \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}},$$

де C — залежна від n стала, встановлено у лемі Пяртлі [3] без визначення цієї сталої та у роботах [4–10] зі сталими C, які є наближеннями до оптимальної сталої $4\sqrt[n]{n!/2}$.

Зокрема, у роботі [7] знайдено близьку до оптимальної сталу $C = 2n$, для якої $1 \leq \dfrac{2n}{4\sqrt[n]{n!/2}} < \dfrac{e}{2}$.

Для ненульових λ_j вперше таку задачу оцінювання міри множини $G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f)$ поставлено у роботі [2], де, зокрема, отримано оцінку

$$\operatorname{meas} G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f) \leq C_n \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}} \cdot e^{(b-a)|\lambda|/n}, \qquad (3)$$

якщо $C_n = 2n\sqrt[n]{n!}$ і $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda \in \mathbb{R}$, та оцінку

$$\operatorname{meas} G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f) \leq C_{n,1} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}} \cdot e^{(b-a)(|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|)/n}, \qquad (4)$$

якщо $C_{n,1} = n2^{(n+1)/2}$ і $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ є різними дійсними числами (зокрема, $C_1 = C_{1,1} = 2$, $C_2 = C_{2,1} = 4\sqrt{2}$).

Такі ж оцінки отримано [2, лема 5 і лема 7] і для загального випадку операторів L_n зі сталими та змінними дійсними коефіцієнтами, тобто

$$L_n\Big(\frac{d}{dx}\Big) = \Big(\frac{d}{dx} + \lambda_1\Big)^{n_1} \cdots \Big(\frac{d}{dx} + \lambda_p\Big)^{n_p}$$

та

$$L_n\Big(\frac{d}{dx}\Big) = \Big(\frac{d}{dx} + u_1(x)\Big)^{n_1} \cdots \Big(\frac{d}{dx} + u_p(x)\Big)^{n_p},$$

де $u_1, \dots, u_p$ — дійсні гладкі функції, $n_1 + \dots + n_p = n$, $p \geq 2$.

Хоча в операторах L_n зафіксовано значення $n_1, \dots, n_p$, проте у доведенні згаданих лем не використано умову попарної відмінності чисел λ_j чи функцій u_j, тому для $n = 2$, зокрема,

$$\operatorname{meas} G_{L_2}(\varepsilon, \delta, f) \leq \sqrt{\frac{32\varepsilon}{\delta}} \cdot e^{(b-a)|\lambda|/2}, \tag{5}$$

$$\operatorname{meas} G_{L_2}(\varepsilon, \delta, f) \leq \sqrt{\frac{32\varepsilon}{\delta}} \cdot e^{(b-a)(|\lambda_1|+|\lambda_2|)/2}, \tag{6}$$

якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ і $\lambda_1 \neq \lambda_2$ відповідно.

Права частина другої оцінки для близьких до λ значень λ_1 та λ_2 наближено дорівнює величині

$$\sqrt{\frac{32\varepsilon}{\delta}} \cdot e^{(b-a)|\lambda|} = \sqrt{\frac{32\varepsilon}{\delta}} \cdot e^{(b-a)|\lambda|/2} \cdot e^{(b-a)|\lambda|/2}.$$

Значить, при розщепленні чисел λ_1 і λ_2 оцінка міри множини $G_{L_2}(\varepsilon, \delta, f)$ погіршується, відбувається стрибок у правих частинах оцінок (5), (6).

Оскільки $G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f) \subset [a, b]$, то міра множини $G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f)$ не перевищує числа $b - a$.

Для $n = 1$ оцінка (3) уточнюється:

$$\operatorname{meas} G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f) \leq \min\Big\{\frac{2\varepsilon}{\delta} \cdot e^{(b-a)|\lambda_1|}, b - a\Big\} = \\ = \begin{cases} \dfrac{2\varepsilon}{\delta} \cdot e^{(b-a)|\lambda_1|}, & \varepsilon < \varepsilon_1^*, \\ b - a, & \varepsilon \geq \varepsilon_1^*, \end{cases}$$

де $\varepsilon_1^* = \dfrac{(b-a)}{2}\delta \cdot e^{-(b-a)|\lambda_1|}$.

Для $n > 1$ уточнення таке ж:

$$\operatorname{meas} G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f) \leq \\ \leq \begin{cases} C_{n,1}\sqrt[n]{\dfrac{\varepsilon}{\delta}} \cdot e^{(b-a)(|\lambda_1|+\dots+|\lambda_n|)/n}, & \varepsilon < \varepsilon_n^*, \\ b - a, & \varepsilon \geq \varepsilon_n^*, \end{cases}$$

де $\varepsilon_n^* = \Big(\dfrac{b-a}{C_{n,1}}\Big)^n \delta \cdot e^{-(b-a)(|\lambda_1|+\dots+|\lambda_n|)}$.

Із отриманих формул випливає прямування до нуля ε_n^*, якщо $b - a \to +\infty$, або $|\lambda_1| + \dots + |\lambda_n| \to +\infty$.

Отже, якщо $(a, b) = \mathbb{R}$ і $|\lambda_1| + \dots + |\lambda_n| > 0$, то оцінка (4) має вигляд

$$\operatorname{meas} G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f) \leq +\infty$$

не є інформативною і потребує корекції.

Тому у цій роботі розглянуто випадки $n = 1$ та $n = 2$ і уточнено оцінки міри множини $G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f)$.

Зокрема, доведено оптимальність на $\mathbf{C}_{\delta, L_1}[a, b]$ оцінки для міри множини $G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f)$.

II. Диференціальне рівняння першого порядку

Нехай для $\delta > 0$ функція f задовольняє умову

$$|g_1(x)| = |f'(x) + \lambda_1 f(x)| \equiv \Big|L_1\Big(\frac{d}{dx}\Big)f(x)\Big| \geq \delta \tag{7}$$

на проміжку $[a, b]$, де $L_1\Big(\dfrac{d}{dx}\Big) = \dfrac{d}{dx} + \lambda_1$, $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Зауважимо, що проміжок може бути нескінченним, якщо $a = -\infty$ і/або $b = +\infty$. Такі випадки розглядаються також.

Лема 1. *Нехай $f \in \mathbf{C}_{\delta, L_1}[a, b]$ для деякого $\delta > 0$, $L_1\Big(\dfrac{d}{dx}\Big) = \dfrac{d}{dx} + \lambda_1$ і $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ справджується нерівність*

$$\operatorname{meas} G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f) \leq \begin{cases} \Phi_1\Big(\dfrac{\varepsilon}{\delta}, |\lambda_1|\Big), & \varepsilon < \varepsilon_1, \\ b - a, & \varepsilon \geq \varepsilon_1, \end{cases} \tag{8}$$

де позначено

$$\Phi_1(\alpha, \beta) = \frac{2}{\beta}\operatorname{arcth}(\alpha\beta), \ \varepsilon_1 = \frac{\delta}{|\lambda_1|}\operatorname{th}\frac{(b-a)|\lambda_1|}{2}. \tag{9}$$

□ *Доведення.* Оскільки функція g_1 — знакостала, $G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f) = G_{L_1}(\varepsilon, \delta, -f)$ і $g_1 = -L_1(-f)$, то достатньо вважати функцією f ту, для якої $g_1(x) > 0$ на $[a, b]$. Подамо функцію g_1 у вигляді добутку

$$g_1(x) = e^{-\lambda_1 x}\big(e^{\lambda_1 x} f(x)\big)'$$

і позначимо

$$a_1 = \inf G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f), \ b_1 = \sup G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f).$$

Тоді $G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f) \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$ і $|f(a_1)| \leq \varepsilon$, $|f(b_1)| \leq \varepsilon$, зокрема, $|f(a_1)| = \varepsilon$, якщо $a < a_1$, і $|f(b_1)| = \varepsilon$, якщо $b_1 < b$, і виконуються нерівності

$$0 \leq \operatorname{meas} G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f) \leq b_1 - a_1 \leq b - a. \tag{10}$$

Якщо $a_1 = b_1$, то нерівність (8) справджується, в іншому разі розглянемо інтеграл

$$I_1 = \int_{a_1}^{b_1} e^{\lambda_1 x} g_1(x)\, dx$$

та його верхню і нижню оцінки.

У результаті припущень про функцію g_1, вибору чисел a_1 і b_1 та обчислення інтегралів маємо

$$I_1 = \int_{a_1}^{b_1} \Big(e^{\lambda_1 x} f(x)\Big)' dx = \\ = e^{\lambda_1 b_1} f(b_1) - e^{\lambda_1 a_1} f(a_1) < \varepsilon\big(e^{\lambda_1 b_1} + e^{\lambda_1 a_1}\big),$$

$$I_1 \geq \delta \int_{a_1}^{b_1} e^{\lambda_1 x} dx = \delta \frac{e^{\lambda_1 b_1} - e^{\lambda_1 a_1}}{\lambda_1} > 0,$$

тобто

$$\frac{e^{|\lambda_1| b_1} - e^{|\lambda_1| a_1}}{e^{|\lambda_1| b_1} + e^{|\lambda_1| a_1}} < \frac{|\lambda_1|\varepsilon}{\delta}.$$

Поділимо чисельник і знаменник лівого дробу на число $e^{(b_1+a_1)|\lambda_1|/2}$, тоді

$$\frac{e^{(b_1-a_1)|\lambda_1|/2} - e^{-(b_1-a_1)|\lambda_1|/2}}{e^{(b_1-a_1)|\lambda_1|/2} + e^{-(b_1-a_1)|\lambda_1|/2}} < \frac{|\lambda_1|\varepsilon}{\delta},$$

або

$$\operatorname{th} \frac{(b_1 - a_1)|\lambda_1|}{2} < \frac{|\lambda_1|\varepsilon}{\delta}. \tag{11}$$

Цю нерівність розв'язуємо щодо змінної $b_1 - a_1$.

Внаслідок бієктивності і строгої монотонності відображення $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ нерівність (11) справджується для всіх значень $b_1 - a_1$, враховуючи і значення $b_1 - a_1 = +\infty$, у разі $\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{\delta} \geq 1$, а у разі $\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{\delta} < 1$ еквівалентна нерівності

$$\frac{(b_1 - a_1)|\lambda_1|}{2} \leq \operatorname{arcth} \frac{|\lambda_1|\varepsilon}{\delta}.$$

Якщо $\lambda_1 > 0$, то з нерівності випливає

$$b_1 - a_1 \leq \Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\delta}, \lambda_1\Big).$$

З парності функції $\Phi_1(\alpha, \beta)$ щодо β маємо

$$b_1 - a_1 \leq \Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\delta}, |\lambda_1|\Big).$$

З нерівності (10) отримаємо оцінку

$$\max\big\{b_1 - a_1, \operatorname{meas} G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f)\big\} \leq \\ \leq \min\Big\{\Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\delta}, |\lambda_1|\Big), b - a\Big\}, \tag{12}$$

з якої (внаслідок монотонності за α функції $\Phi(\alpha, \beta)$) випливає формула (8) і доведення леми. ■

Зокрема, з формул (8) і (9) для нескінченного ($b_1 - a_1 = +\infty$) проміжку одержуємо $\varepsilon_1 = \frac{\delta}{|\lambda_1|}$ і

$$\operatorname{meas} G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f) \leq \begin{cases} \Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\delta}, |\lambda_1|\Big), & \varepsilon < \varepsilon_1, \\ +\infty, & \varepsilon \geq \varepsilon_1. \end{cases}$$

Отже, для малих ε формула (8) дає оцінку міри множини $G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f)$ і для скінченного, і для нескінченного проміжку (a, b).

Ця формула застосовна також для нульового λ_1, як граничний варіант. Підставляючи значення

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} \Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\delta}, |\lambda_1|\Big) = \frac{2\varepsilon}{\delta} = \Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\delta}, 0\Big)$$

у формулу (12), отримаємо оптимальний результат

$$\operatorname{meas} G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f) \leq \min\Big\{\Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\delta}, 0\Big), b - a\Big\} = \\ = \begin{cases} \frac{2\varepsilon}{\delta}, & \varepsilon < \frac{(b-a)\delta}{2}, \\ b - a, & \varepsilon \geq \frac{(b-a)\delta}{2}. \end{cases}$$

Якщо $b - a = +\infty$ і $\lambda_1 = 0$, то $\operatorname{meas} G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f) \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}$.

На рис. 1 зображено графіки правої частини нерівності (8) для різних значень параметра λ_1. Зі зростанням $|\lambda_1|$ зростає функція $\Phi(\alpha, |\lambda_1|)$. Виділений трикутник вказує на приріст $\Phi(\alpha, |\lambda_1|)$ від $|\lambda_1| = 0$ до $|\lambda_1| = 1/2$.

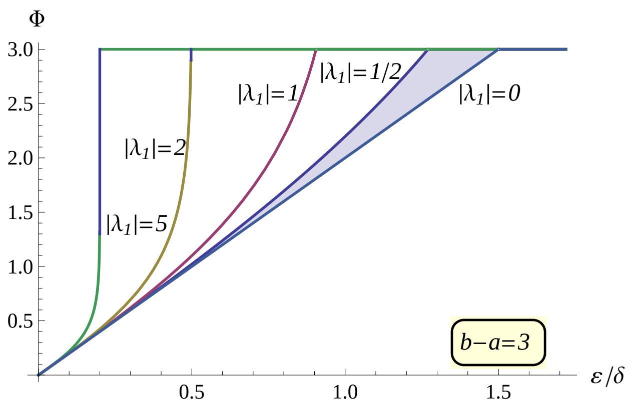

Рис. 1. Графіки функції $\min\big\{\Phi_1\big(\frac{\varepsilon}{\delta}, |\lambda_1|\big), b - a\big\}$ для чотирьох значень $|\lambda_1|$, зокрема, $1/2, 1, 2, 5$, і граничного значення $|\lambda_1| = 0$ з довжиною відрізка $b - a = 3$

Для малих значень α, тобто для малих ε при незмінному δ, відношення $\Phi_1(\alpha, \beta)/\alpha$ близьке до числа 2 і більше за нього, оскільки

$$\lim_{\alpha \to 0} \Phi_1(\alpha, \beta)/\alpha = 2.$$

Це означає, що для малих α функція $\Phi_1(\alpha, \beta)$ близька до граничної функції $\Phi_1(\alpha, 0) = 2\alpha$.

Розглянемо питання оптимальності (непокращуваності) результату леми 1, тобто питання можливості досягнення рівності у формулі (8) для розглядуваного класу функцій.

Теорема 1. *Оцінка (8) є точною на множині функцій $\mathbf{C}_{\delta, L_1}[a, b]$, тобто*

$$\max_{f \in \mathbf{C}_{\delta, L_1}[a,b]} \operatorname{meas} G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f) = \\ = \min\Big\{\Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\delta}, |\lambda_1|\Big), b - a\Big\}. \tag{13}$$

□ *Доведення.* Із загального розв'язку

$$y(x) = Ce^{-\lambda_1 x} + \frac{\delta}{\lambda_1}$$

диференціального рівняння

$$L_1\Big(\frac{d}{dx}\Big)y \equiv y' + \lambda_1 y = \delta, \quad \delta > 0, \ \lambda_1 > 0,$$

виберемо той розв'язок (див. рис. 2)

$$y^*(x) = \frac{\delta}{\lambda_1} - \Big(\varepsilon + \frac{\delta}{\lambda_1}\Big)e^{\lambda_1(a-x)} = \\ = \frac{\delta - (\lambda_1\varepsilon + \delta)e^{\lambda_1(a-x)}}{\lambda_1}, \tag{14}$$

який проходить через точку $(a, -\varepsilon)$. Він монотонно $(y^{*\prime}(x) = (\varepsilon\lambda_1 + \delta)e^{\lambda_1(a-x)} > 0)$ зростає, належить множині $G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f)$ для довільного $[a, b]$ у разі $\varepsilon \geq \delta/\lambda_1$, або, у разі $\varepsilon < \delta/\lambda_1$, перетинає пряму $y = \varepsilon$ у точці x^*, де $x^* > a$. Цю точку визначимо як єдиний розв'язок рівняння

$$y^*(x) = \frac{\delta}{\lambda_1} - \left(\varepsilon + \frac{\delta}{\lambda_1}\right)e^{\lambda_1(a-x)} = \varepsilon.$$

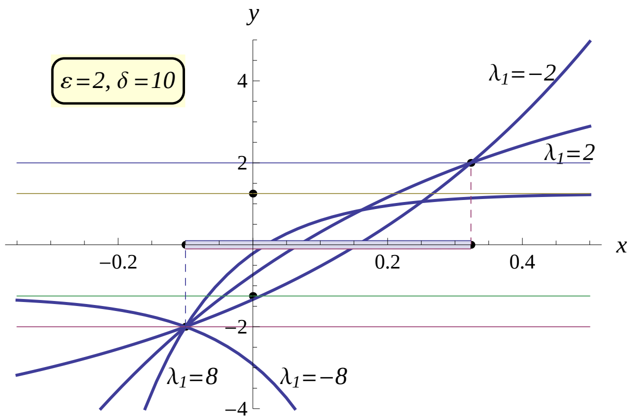

Рис. 2. Розв'язки $y = y(x)$ неоднорідної задачі Коші $L_1 y = y' + \lambda_1 y = \delta, \quad y(a) = -\varepsilon$, де $a = -1/10$, $\varepsilon = 2$, $\delta = 10$, $\lambda_1 = \pm 2, \ \pm 8$ і горизонтальні прямі $y = \pm\varepsilon = \pm 2$ та $y = \delta/\lambda_1 = \pm 5/4$ для $\lambda_1 = \pm 8$. На горизонтальній осі відзначено множину $G_{L_1}(\varepsilon, \delta, y)$ для випадку $|\lambda_1| = 2$. Екстремальні функції отримуємо горизонтальним перенесенням цих розв'язків і/або зміною їх знака

Звідси випливає рівність

$$e^{\lambda_1(a-x^*)} = \frac{-\varepsilon + \dfrac{\delta}{\lambda_1}}{\varepsilon + \dfrac{\delta}{\lambda_1}} = \frac{1 - \dfrac{\lambda_1\varepsilon}{\delta}}{1 + \dfrac{\lambda_1\varepsilon}{\delta}},$$

або

$$x^* - a = -\frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{1 - \dfrac{\lambda_1\varepsilon}{\delta}}{1 + \dfrac{\lambda_1\varepsilon}{\delta}} = \Phi_1\left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \lambda_1\right) > 0.$$

Число x^* може попадати, а може і не попадати в інтервал (a, b). У першому випадку

$$\operatorname{meas} G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f) = x^* - a = \Phi_1\left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \lambda_1\right) < b - a,$$

у другому — $\operatorname{meas} G_{L_1}(\varepsilon, \delta, f) = b - a \leq x^* - a$.

Отже, у першому випадку функціонал з лівої частини формули (13) досягає максимуму для функцій

$$\pm\left(\delta - (\lambda_1\varepsilon + \delta)e^{\lambda_1(\xi - x)}\right)/\lambda_1$$

з числом $\xi \in [a, a + b - x^*]$, яке задає зсув аргумента x, та з числом $\xi \in [a + b - x^*, a]$ — у другому разі.

Ці функції використовуються також для від'ємних значень λ_1. Теорему доведено. ■

III. Диференціальне рівняння другого порядку

Тепер нехай для деякого $\delta > 0$ функція f з множини $\mathbf{C}^2[a, b]$ задовольняє умову

$$\min_{x \in [a,b]} |g_1(x)| = \min_{x \in [a,b]} \left|L_2\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right| \geq \delta, \qquad (15)$$

тобто $f \in \mathbf{C}_{\delta, L_2}[a, b]$, де (a, b) — скінченний або нескінченний проміжок, $L_2\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dx} + \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} + \lambda_2\right)$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ і $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| > 0$.

Лема 1. *Нехай $f \in \mathbf{C}_{\delta, L_2}[a, b]$ для деякого додатного δ, $L_2\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dx} + \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} + \lambda_2\right)$, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ справджуються нерівності*

$$\operatorname{meas} G_{L_2}(\varepsilon, \delta, f) \leq \begin{cases} \Phi_2\left(\dfrac{\varepsilon}{\delta}, |\lambda_1|, |\lambda_2|\right), & \varepsilon < \varepsilon_2, \\ b - a, & \varepsilon \geq \varepsilon_2, \end{cases} \qquad (16)$$

$$\varepsilon_2 \leq \varepsilon^* \equiv \frac{\delta}{|\lambda_1\lambda_2|}\operatorname{th}\frac{(b-a)|\lambda_1|}{4}\operatorname{th}\frac{(b-a)|\lambda_2|}{8}, \qquad (17)$$

де ε_2 — розв'язок рівняння $\Phi_2(\varepsilon/\delta, |\lambda_1|, |\lambda_2|) = b - a$,

$$\Phi_2(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{2}{\beta}\operatorname{arcth}\sqrt{\frac{2 + \alpha\gamma^2}{1 + 2\alpha\beta^2}} + \\ + \frac{4}{\gamma}\operatorname{arcth}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}\frac{1 + 2\alpha\beta^2}{1 + 2/\alpha\gamma^2}}. \qquad (18)$$

□ *Доведення.* Із властивості $f \in \mathbf{C}_{\delta, L_2}[a, b]$ випливає, що функція

$$f_{(2)} = L_{(2)}f$$

має подібну властивість, зокрема, $f_{(2)} \in \mathbf{C}_{\delta, L_1}[a, b]$.

Справді, $L_1 f_{(2)} = L_2 f = g_2$ і виконується нерівність $|L_1 f_{(2)}(x)| = |g_2(x)| \geq \delta$ на $[a, b]$.

За формулою (12) з доведення леми 1 для довільного $\sigma > 0$ маємо нерівність

$$b_2 - a_2 \leq \min\left\{\Phi_1\left(\frac{\sigma}{\delta}, |\lambda_1|\right), b - a\right\} = \\ = \begin{cases} \Phi_1\left(\dfrac{\sigma}{\delta}, |\lambda_1|\right), & \sigma < \sigma_2, \\ b - a, & \sigma \geq \sigma_2, \end{cases} \qquad (19)$$

де $\sigma_2 = \dfrac{\delta}{|\lambda_1|}\operatorname{th}\dfrac{(b-a)|\lambda_1|}{2}$, а $a_2 = a_2(\sigma)$ і $b_2 = b_2(\sigma)$ визначає формула

$$a \leq a_2 = \inf_{[a,b]} G_{L_1}\left(\sigma, \delta, f_{(2)}\right) \leq \\ \leq \sup_{[a,b]} G_{L_1}\left(\sigma, \delta, f_{(2)}\right) = b_2 \leq b.$$

Якщо $\sigma < \sigma_2$, тобто $b_2 - a_2 < b - a$, то $a < a_2$, $b_2 = b$, або $a = a_2$, $b_2 < b$, або $a < a_2$, $b_2 < b$, і за такого вибору a_2 та b_2 маємо $f \in \mathbf{C}_{\delta, L_{(2)}}[a, a_2]$, або

$f \in \mathbf{C}_{\delta,L_{(2)}}[b_2,b]$, або $f \in \mathbf{C}_{\delta,L_{(2)}}[a,a_2] \cap \mathbf{C}_{\delta,L_{(2)}}[b_2,b]$ відповідно.

Позначимо множини $S = (0,\sigma_2) \setminus (S_a \cup S_b)$,

$$S_a = \{\sigma \in (0,\sigma_2) \colon a = a_2(\sigma)\},$$
$$S_b = \{\sigma \in (0,\sigma_2) \colon b = b_2(\sigma)\}$$

і отримаємо розбиття $S \cup S_a \cup S_b$ множини $(0,\sigma_2)$.

Тепер за лемою 1, якщо $\sigma \in S$, то

$$\operatorname{meas} G_{L_2}(\varepsilon,\delta,f) \cap [a,a_2] = \operatorname{meas} G_{L_{(2)}}\big(\varepsilon,\sigma,f_{[a,a_2]}\big) \leq \leq \min\Big\{\Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma},|\lambda_2|\Big), a_2-a\Big\}, \quad (20)$$

$$\operatorname{meas} G_{L_2}(\varepsilon,\delta,f) \cap [b_2,b] = \operatorname{meas} G_{L_{(2)}}\big(\varepsilon,\sigma,f_{[b_2,b]}\big) \leq \leq \min\Big\{\Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma},|\lambda_2|\Big), b-b_2\Big\}, \quad (21)$$

де $f_{[a,a_2]}$ та $f_{[b_2,b]}$ звуження функції f на відрізки $[a,a_2]$ та $[b_2,b]$ відповідно. Якщо $\sigma \in S_a$, або $\sigma \in S_b$, то виконуються відповідно нерівності (20) та (21).

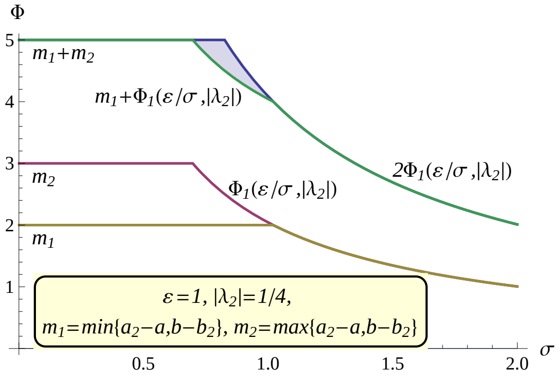

Рис. 3. Графіки правих частин нерівностей (20)–(22). Виділений криволінійний трикутник вказує на посилення відповідної оцінки у формулі (22)

Із цих нерівностей при $\sigma < \sigma_2$ випливає (рис. 3)

$$\operatorname{meas} G_{L_2}(\varepsilon,\delta,f) \setminus (a_2,b_2) = \operatorname{meas} G_{L_2}(\varepsilon,\delta,f) \cap [a,a_2] + \operatorname{meas} G_{L_2}(\varepsilon,\delta,f) \cap [b_2,b] \leq \min\Big\{2\Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma},|\lambda_2|\Big), \min\{a_2-a,b-b_2\} + \Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma},|\lambda_2|\Big), b-a-b_2-a_2\Big\} \leq \leq \min\Big\{2\Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma},|\lambda_2|\Big), b-a-b_2-a_2\Big\} \leq \min\Big\{b-a, 2\Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma},|\lambda_2|\Big)\Big\} = \begin{cases} 2\Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma},|\lambda_2|\Big), & \sigma > \sigma_1, \\ b-a, & \sigma \leq \sigma_1, \end{cases} \quad (22)$$

де $\sigma_1 = \dfrac{|\lambda_2|\varepsilon}{\operatorname{th}\big((b-a)|\lambda_2|/4\big)}$. Формули (19) і (22) дозволяють записати нерівність

$$\operatorname{meas} G_{L_2}(\varepsilon,\delta,f) \leq \min\Big\{b-a, \min_{\sigma>0}\Big\{\Phi_1\Big(\frac{\sigma}{\delta},|\lambda_1|\Big) + 2\Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma},|\lambda_2|\Big)\Big\}\Big\}. \quad (23)$$

Із виразів для перших похідних

$$\frac{d\Phi_1(\sigma/\delta,|\lambda_1|)}{d\sigma} = \frac{2\delta}{\delta^2-\lambda_1^2\sigma^2},$$
$$\frac{d\Phi_1(\varepsilon/\sigma,|\lambda_2|)}{d\sigma} = \frac{-2\varepsilon}{\sigma^2-\lambda_2^2\varepsilon^2}$$

отримаємо єдину точку мінімуму

$$\sigma_3 = \sqrt{\varepsilon\delta\frac{2+\lambda_2^2\varepsilon/\delta}{1+2\lambda_1^2\varepsilon/\delta}}$$

і шукане мінімальне значення (рис. 4)

$$\frac{2}{|\lambda_1|}\operatorname{arcth}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}\,\frac{2\lambda_1^2+\lambda_1^2\lambda_2^2\varepsilon/\delta}{1+2\lambda_1^2\varepsilon/\delta}} + \frac{4}{|\lambda_2|}\operatorname{arcth}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}\,\frac{\lambda_2^2+2\lambda_1^2\lambda_2^2\varepsilon/\delta}{2+\lambda_2^2\varepsilon/\delta}},$$

у формулі (23). Це доводить нерівність (16).

Для оцінювання ε_2 виберемо підінтервал (σ_1^*,σ_2^*) інтервала (σ_1,σ_2) з кінцями

$$\sigma_1^* = \sigma_1(\varepsilon) = \frac{|\lambda_2|\varepsilon}{\operatorname{th}\big((b-a)|\lambda_2|/8\big)},$$
$$\sigma_2^* = \sigma_2(\delta) = \frac{\delta}{|\lambda_1|}\operatorname{th}\frac{(b-a)|\lambda_1|}{4},$$

тоді, враховуючи (9), отримаємо $\sigma_1(\varepsilon^*) = \sigma_2(\delta)$ і

$$\Phi_1\Big(\frac{\sigma_2(\delta)}{\delta},|\lambda_1|\Big) = 2\Phi_1\Big(\frac{\varepsilon}{\sigma_1(\varepsilon)},|\lambda_2|\Big) = \frac{b-a}{2}.$$

Для всіх $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ інтервал (σ_1^*,σ_2^*) має додатну довжину, а функції $\Phi_1\Big(\dfrac{\sigma}{\delta},|\lambda_1|\Big)$ та $2\Phi_1\Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma},|\lambda_2|\Big)$ менші, ніж $(b-a)/2$, якщо $\sigma \in (\sigma_1^*,\sigma_2^*)$.

Позначимо $\sigma^* = \sigma^*(\varepsilon,\delta,\beta,\gamma)$ — єдиний корінь рівняння $\Phi_1\Big(\dfrac{\sigma}{\delta},\beta\Big) = 2\Phi_1\Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma},\gamma\Big)$ стосовно σ, тоді з формули (23) випливає (див. рис. 4), що

$$\operatorname{meas} G_{L_2}(\varepsilon,\delta,f) \leq \begin{cases} \Phi_2^*(\varepsilon,\delta,|\lambda_1|,|\lambda_2|), & \varepsilon < \varepsilon^*, \\ b-a, & \varepsilon \geq \varepsilon^*. \end{cases} \quad (24)$$

де $\Phi_2^*(\varepsilon,\delta,|\lambda_1|,|\lambda_2|) = 2\Phi_1\Big(\dfrac{\sigma^*}{\delta},|\lambda_1|\Big) = 4\Phi_1\Big(\dfrac{\varepsilon}{\sigma^*},|\lambda_2|\Big)$.

Нерівність (17), а, отже, й лему доведено. ■

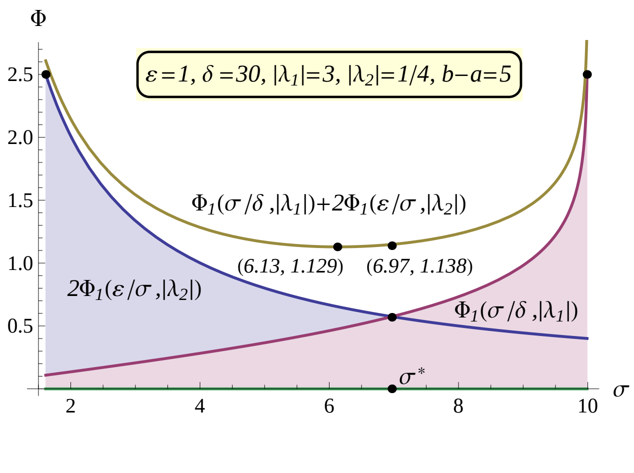

Рис. 4. Графік функції $\Phi_1(\sigma/\delta,|\lambda_1|) + 2\Phi_1(\varepsilon/\sigma,|\lambda_2|)$, її точка мінімуму з наближеними координатами і графіки функцій $\Phi_1(\sigma/\delta,|\lambda_1|)$ та $2\Phi_1(\varepsilon/\sigma,|\lambda_2|)$ з їх точкою перетину і наближеними координатами суми у точці σ^*

Дроби $\dfrac{2+\alpha\gamma^2}{2+1/\alpha\beta^2}$ і $\dfrac{1+2\alpha\beta^2}{1+2/\alpha\gamma^2}$ у формулі (18) монотонно зростають від нуля до $+\infty$ разом зі зростанням α від нуля до $+\infty$, тому монотонно зростає до $+\infty$ і функція $\Phi_2(\alpha,\beta,\gamma)$ за фіксованих β та γ.

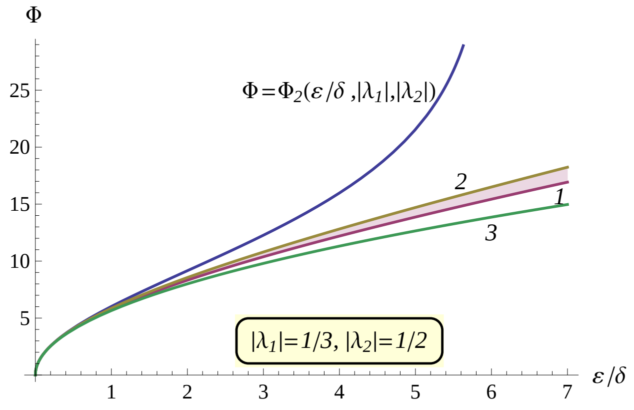

Рис. 5. Графік функції Φ_2 та графіки її граничних значень $\Phi_2(\varepsilon/\delta,0,|\lambda_2|)$, $\Phi_2(\varepsilon/\delta,|\lambda_1|,0)$, $\Phi_2(\varepsilon/\delta,0,0)$, які позначені цифрами 1, 2 та 3 відповідно

Існують граничні значення $\Phi_2(\alpha,0,\gamma)$ і $\Phi_2(\alpha,\beta,0)$ функції Φ_2, які визначають формули (рис. 5)

$$\Phi_2(\alpha,0,\gamma)=2\sqrt{2\alpha+\alpha^2\gamma}+\frac{4}{\gamma}\operatorname{arcth}\sqrt{\frac{\alpha\gamma^2}{2+\alpha\gamma^2}},$$

$$\Phi_2(\alpha,\beta,0)=\frac{2}{\beta}\operatorname{arcth}\sqrt{\frac{2\alpha\beta^2}{1+2\alpha\beta^2}}+2\sqrt{2}\sqrt{\alpha+2\alpha^2\beta^2},$$

а також значення $\Phi_2(\alpha,0,0)=4\sqrt{2}\sqrt{\alpha}$.

Останнє значення за формулою (2) є оптимальним для $n=2$. Таку ж оптимальну сталу $4\sqrt{2}$ для довільних $\beta>0$ і $\gamma>0$ отримуємо з рівності

$$\lim_{\alpha\to 0}\Phi_2(\alpha,\beta,\gamma)/\sqrt{\alpha}=4\sqrt{2}.$$

Отже, лема 2 у разі $n=2$ встановлює оптимальну оцінку для нескінченно малих ε. Таку властивість також має й оцінка (3).

IV. Порівняння результатів

На рис. 6 і 7 подано графіки правих частин оцінки (3) та оцінки (4) для $n=1$ та $n=2$ і оцінок (8) та (16), отриманих у попередніх лемах 1 та 2. Розглянуто три значення довжини відрізка $[a,b]$, а саме 2, 3 і 5.

На інтервалі $(0,\varepsilon_1/\delta)$, де монотонно зростає функція $\Phi_1(\varepsilon/\delta,|\lambda_1|)$, оцінка (8) є кращою від оцінки (3); різниця досягає найбільшого значення у точці ε_1^*/δ. На інтервалі $(\varepsilon_1/\delta,+\infty)$ оцінки збігаються.

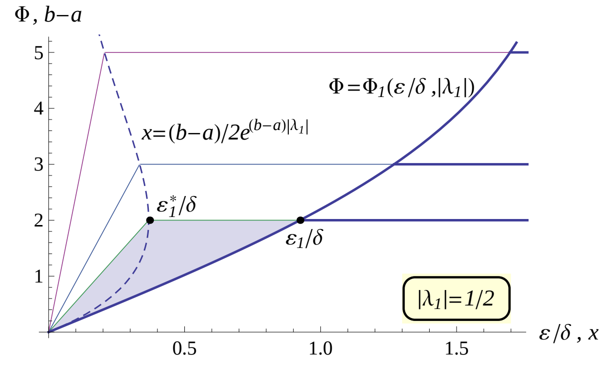

Рис. 6. Порівняння оцінок у разі $n=1$ для різних значень довжини відрізка $b-a$

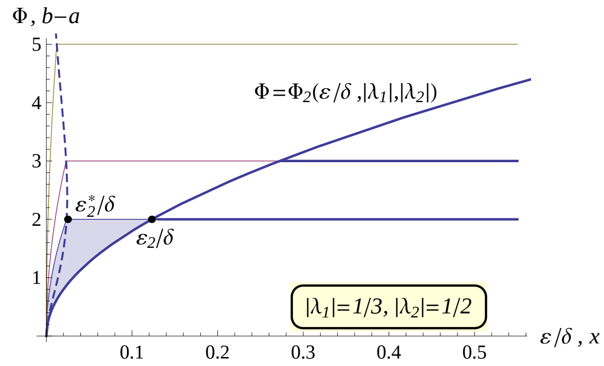

Рис. 7. Порівняння оцінок у разі $n=2$ для різних значень довжини відрізка $b-a$

З формули (9) випливає, що ε_1/δ прямує до числа $\dfrac{1}{|\lambda_1|}$ зі зростанням $b-a$; натомість ε_1^*/δ монотонно прямує до нуля (штрихова лінія) після точки $b-a=\dfrac{1}{|\lambda_1|}$, у якій досягає максимуму $\dfrac{1}{2e|\lambda_1|}$.

Аналогічні співвідношення існують між оцінками (16) і (4). При цьому відповідно величина ε_2^*/δ має максимум $\dfrac{1}{8e^2\big(|\lambda_1|+|\lambda_2|\big)^2}$ у точці $b-a=\dfrac{2}{|\lambda_1|+|\lambda_2|}$.

Різниці між розглянутими оцінками відзначено на рисунках відповідним виділенням областей.

Висновки

У роботі отримано оцінки (8) і (16) міри множини рівня функцій, які є розв'язками рівнянь першого або другого порядку зі сталими коефіцієнтами та зі знакосталими правими частинами. Вони узагальнюють і істотно покращують відомі оцінки.

Для рівняння першого порядку доведено оптимальність (точність) оцінки і знайдено екстремальні функції, для яких нерівність (8) стає рівністю.

Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект № 54.1/027).

Література

[1] Ilkiv V. S., Maherovska T. V. Exact estimate for the measure of the level set of the modulus of a function with high-order constant-sign derivative // Math. studii. – 2010. – **34**, № 1. – С. 57–64.

[2] Симотюк М. М. Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 90–95.

[3] Пяртли А. С. Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства // Функц. анализ и его прилож. – 1969. – **3**, вып. 4. – С. 59–62.

[4] Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О. Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.

[5] Илькив В. С. Обобщение одной леммы Пяртли. – В сб.: Материалы 10-й конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и матем. АН УССР, ч. 2 (Львов, 15–17 мая 1984 г.) Львов, 1984. – С. 96–99. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10.11.1984 г., № 7197-84 Деп).

[6] Ільків В. С. Аналоги леми Пяртлі із абсолютними константами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 68–74.

[7] Ільків В. С., Магеровська Т. В. Про константу в лемі Пяртлі // Вісн. нац. ун-ту. „Львів. політехніка“. Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 601. – С. 12–17.

[8] Beresnevich V. V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds // Acta Math. Hungar.– 2002.– **94**, № 1–2. – P. 99–130.

[9] Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Metric Diophantine approximation: the Khintchine–Groshev theorem for nondegenerate manifolds // Moskow Math. Journ. – 2002.– **2**, № 2. – P. 203–225.

[10] Dani S. G., Margulis G. A. Limit distributions of orbits of unipotent flows and values of quadratic forms // Adv. in Soviet Math. – 1993. – **16**. – P. 91–137.

МЕРА МНОЖЕСТВА УРОВНЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЗНАКОПОСТОЯННЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Илькив В. С.[a], Магеровська Т. В.[b], Нитребыч З. М.[a]

[a] *Национальный университет “Львивська политэхника”, ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*

[b] *Львовский государственный университет внутренних дел, ул. Городоцька, 26, Львов, 79007, Украина*

Получена оценка меры множества уровня функции, являющейся на некотором отрезке решением неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения первого или второго порядка с постоянными коэффициентами и отделенной от нуля правой частью. Эта оценка обобщает результат известной леммы Пяртли и другие известные оценки. Изучены свойства и доказана экстремальность полученных неравенств.

Ключевые слова: мера множества, диофантов анализ, малые знаменатели.

2000 MSC: 26A24, 11J83

УДК: 517.2

MEASURE OF THE LEVEL SET FOR SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS AND CONSTANT SIGN RIGHT-HAND SIDES

Ilkiv V. S.[a], Maherovska T. V.[b], Nytrebych Z. M.[a]

[a] *National University “Lvivska Politechnika” 12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*

[b] *Lviv State University of Internal Affairs 26 Horodots’ka Str., 79007, Lviv, Ukraine*

We have found an estimate of measure of level set of the function which is on a certain segment is a solution of an inhomogeneous ordinary differential equation of first or second order with constant coefficients and isolated from zero right-hand side. This estimate generalizes the result of the known Piartly lemma as well as other known estimates. We study properties and prove the extremeness of the found inequalities.

Key words: measure of set, Diophantine analysis, small denominators.

2000 MSC: 26A24, 11J83

УДК: 517.2