

ПОЧАТКОВО-НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Симотюк М. М., Савка І. Я.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
 вул. Наукова 3-б, 79000, Львів, Україна*

(Отримано 25 квітня 2013 р.)

Встановлено однозначну розв'язність початково-нелокальної задачі для факторизованого рівняння із частинними похідними для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів факторизації.

Ключові слова: диференціальні рівняння, початково-нелокальні умови, факторизоване рівняння, малі знаменники, метричні оцінки.

2000 MSC: 35G30

УДК: 517.95

I. Формулювання задачі

Використовуватимемо такі позначення і функціональні простори: $\Omega_p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ – p -вимірний тор, $Q_p^T = (0, T) \times \Omega_p$, $T > 0$, $x = (x_1, \dots, x_p) \in \Omega_p$; $D_x = (-i\partial/\partial x_1, \dots, -i\partial/\partial x_p)$, $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \dots + |k_p|$, $(k, x) = k_1x_1 + \dots + k_px_p$; $\text{mes}_{\mathbb{R}^n} A$ – міра Лебега в \mathbb{R}^n вимірної множини $A \subset \mathbb{R}^n$, $\Pi_n = \{\vec{\lambda} \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda_1 < \dots < \lambda_n\}$; $C(n, m)$ – множина всіх наборів (i_1, \dots, i_m) , складених з натуральних чисел i_1, \dots, i_m таких, що

$$1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n, \quad 1 \leq m \leq n;$$

set ω позначає множину $\{i_1, \dots, i_m\}$ для деякого набору $\omega = (i_1, \dots, i_m) \in C(n, m)$;

$B(D_x)$ – такий диференціальний вираз, що

$$(\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}) (\exists C_1, C_2 > 0) (\forall k \in \mathbb{Z}^p) \quad C_1(1 + |k|)^{N_1} \leq |B(k)| \leq C_2(1 + |k|)^{N_2}, \quad (1)$$

$K_1 = \{k \in \mathbb{Z}^p : \text{Re } B(k) \geq 0\}$, $K_2 = \mathbb{Z}^p \setminus K_1$;
 $W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^B$, $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, – простір, отриманий в результаті поповнення простору скінчених тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k e^{i(k, x)}$ за нормою $\|\varphi; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^B\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} |\varphi_k|^2 (1 + |k|)^{2\alpha} e^{2\chi(k) \text{Re } B(k)} \right)^{\frac{1}{2}}$,

де $\chi(k) = \beta_1$, якщо $k \in K_1$, $\chi(k) = \beta_2$, якщо $k \in K_2$;
 $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^B)$ – простір функцій $u = u(t, x)$ таких, що при фіксованому $t \in [0, T]$ похідні $\partial^j u(t, x) / \partial t^j$, $0 \leq j \leq n$, належать до $W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^B$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0, T]$; норму в просторі $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^B)$ задаємо формулою

$$\|u; C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^B)\| = \sum_{j=0}^n \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j}; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^B \right\|.$$

В області Q_p^T розглянемо задачу

$$L_n \left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x \right) u(t, x) \equiv \prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_j B(D_x) \right) u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_p^T, \quad (2)$$

$$\begin{cases} U_j[u] \equiv \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=0} = \varphi_j(x), & j = 1, \dots, r, \\ U_{r+j}[u] \equiv \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=0} = \varphi_{r+j}(x), & j = 1, \dots, l, \\ -\mu \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=T} = \varphi_{r+j}(x), & j = 1, \dots, l, \end{cases} \quad (3)$$

де $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Pi_n$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $1 \leq r < n$, $l = n - r$. Задачу (2), (3) називатимемо початково-нелокальною задачею, оскільки умови (3) містять поєднання r початкових умов для шуканого розв'язку $u(t, x)$ в точці $t = 0$ і l нелокальних умов, які пов'язують значення цього розв'язку та його похідних на кінцях відрізка $[0, T]$.

Розв'язність двоточкових крайових та нелокальних крайових задач для гіперболічних та безтипних рівнянь із частинними похідними досліджено в багатьох роботах (див. [1–8]), в яких використано метричний підхід для оцінки послідовності певних характеристичних визначників – малих знаменників задач.

Зокрема, в роботі [2] встановлено, що для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів $\vec{\lambda}$ існує єдиний розв'язок із простору $W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^B$ задачі для факторизованого рівняння (2) з двома кратними вузлами

$$\begin{cases} \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=0} = \varphi_j(x), & j = 1, \dots, r, \\ \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=T} = \varphi_{r+j}(x), & j = 1, \dots, l. \end{cases} \quad (4)$$

Основною метою нашої роботи є встановлення подібного результату про коректну розв'язність задачі

(2), (3) для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ при довільному фіксованому параметрі $T > 0$ області Q_p^T і довільному фіксованому коефіцієнті $\mu \neq 0$ в умовах (3).

II. Умови єдиності та достатнього існування розв'язку задачі

Розв'язок задачі (2), (3) шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(ik, x), \quad (5)$$

в якому кожна функція $u_k(t), k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком задачі для звичайного диференціального рівняння

$$L_n(d/dt, k) u_k(t) = 0, \quad (6)$$

$$\begin{cases} u_k^{(j-1)}(0) = \varphi_{j,k}, & j = 1, \dots, r, \\ u_k^{(j-1)}(0) - \mu u_k^{(j-1)}(T) = \varphi_{r+j,k}, & j = 1, \dots, l, \end{cases} \quad (7)$$

де $\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_j(x), j = 1, \dots, n$. Розв'язок задачі (6), (7) зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^n C_{k,q} \exp(\lambda_q B(k)t), \quad (8)$$

де сталі $C_{k,q}, q = 1, \dots, n$, визначаються із системи

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^n C_{k,q} (\lambda_q B(k))^{j-1} = \varphi_{j,k}, & j = 1, \dots, r, \\ \sum_{q=1}^n C_{k,q} (\lambda_q B(k))^{j-1} \times \\ \times (1 - e^{\lambda_q B(k)T}) = \varphi_{r+j,k}, & j = 1, \dots, l. \end{cases} \quad (9)$$

Визначник лінійної системи (9) позначимо через $\Delta(k, \vec{\lambda}), k \in \mathbb{Z}^p$:

$$\Delta(k, \vec{\lambda}) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 B(k) & \dots & \lambda_n B(k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{r-1} B^{r-1}(k) & \dots & \lambda_n^{r-1} B^{r-1}(k) \\ 1 - \mu e^{\lambda_1 B(k)T} & \dots & 1 - \mu e^{\lambda_n B(k)T} \\ \lambda_1 B(k)(1 - \mu e^{\lambda_1 B(k)T}) & \dots & \lambda_n B(k)(1 - \mu e^{\lambda_n B(k)T}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{l-1} B^{l-1}(k)(1 - \mu e^{\lambda_1 B(k)T}) & \dots & \lambda_n^{l-1} B^{l-1}(k)(1 - \mu e^{\lambda_n B(k)T}) \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Теорема 1. Для того, щоб розв'язок задачі (2), (3) був єдиним у просторі $C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^B)$, необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k, \vec{\lambda}) \neq 0. \quad (11)$$

Наступна теорема описує клас рівнянь (2), для яких виконується умова єдиності (11) для розв'язку задачі з умовами (3), якщо $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Теорема 2. Якщо $n \geq 2, r \geq l, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, T > 0, B(k) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$, то для всіх векторів $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ виконується умова (11).

Для доведення теореми 2 доведемо спочатку допоміжну лему. Для цього позначимо:

$$\Gamma_{n,r}(\tau_1, \dots, \tau_n; \mu, T) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \tau_1 & \dots & \tau_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_1^{r-1} & \dots & \tau_n^{r-1} \\ 1 - \mu e^{\tau_1 T} & \dots & 1 - \mu e^{\tau_n T} \\ \tau_1(1 - \mu e^{\tau_1 T}) & \dots & \tau_n(1 - \mu e^{\tau_n T}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_1^{n-r-1}(1 - \mu e^{\tau_1 T}) & \dots & \tau_n^{n-r-1}(1 - \mu e^{\tau_n T}) \end{vmatrix},$$

де $n \geq 2, 1 \leq r \leq n-1, l = n-r, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, T > 0, \tau_1, \dots, \tau_n$ — дійсні числа.

Лема 1. Якщо $n \geq 2, r \geq n-r, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, T > 0$, то для довільних n дійсних різних чисел τ_1, \dots, τ_n виконується нерівність

$$\Gamma_{n,r}(\tau_1, \dots, \tau_n; \mu, T) \neq 0. \quad (12)$$

□ **Доведення.** Використаємо метод математичної індукції.

Перевіримо спочатку нерівність (12) для всіх таких пар $(n, r) \in \mathbb{N}^2$, що $n \geq 2, n-r=1$. Розглянемо визначник $\Gamma_{n,n-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T)$ як функцію змінної τ . Із розвинення визначника $\Gamma_{n,n-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T)$ за елементами останнього стовпця випливає, що

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{n-1} \Gamma_{n,n-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T) = \\ & = -\mu T^{n-1} e^{\tau T} \prod_{n-1 \geq j > q \geq 1} (\tau_j - \tau_q) \neq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

бо $\mu, T \neq 0, \tau_j \neq \tau_q, j \neq q$. Тому з формули (13) та узагальненої теореми Ролля (див. задачу 92 у [4, с. 63]) випливає, що кількість різних дійсних τ -нулів функції $\Gamma_{n,n-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T)$ (при фіксованих $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \mu, T$) не перевищує $(n-1)$. Але функція $\Gamma_{n,n-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T)$, очевидно, перетворюється в нуль у $(n-1)$ різних точках: $\tau = \tau_1, \dots, \tau = \tau_{n-1}$, бо кожен із визначників $\Gamma_{n,n-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau_1; \mu, T), \dots,$

$\Gamma_{n,n-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau_{n-1}; \mu, T)$ має однакові стовпці. Отже, для довільного $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$

$$\Gamma_{n,n-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T) \neq 0.$$

Припустимо, що для деякого $m \geq 1$ нерівність (12) виконується для всіх таких $(n, r) \in \mathbb{N}^2$, що $n - r = m$ і $2 \leq n \leq 2r$. Доведемо, що тоді нерівність (12) буде істинною для всіх пар (n, r) , таких, що $n - r = m + 1$ і $2 \leq n \leq 2r$. Розкриваючи визначник $\Gamma_{n,n-m-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T)$ за елементами останнього стовпця і враховуючи, що $m + 1 \leq n/2$, одержимо

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{n-m-1} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - T\right)^m \Gamma_{n,n-m-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T) = \\ & = -\mu m! T^{n-m-1} e^{\tau T} \Gamma_{n-1,n-m-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}; \mu, T). \end{aligned} \quad (14)$$

За припущенням індукції

$$\Gamma_{n-1,n-m-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}; \mu, T) \neq 0,$$

тому з формули (14) та узагальненої теореми Ролля випливає, що кількість різних τ -нулів функції $\Gamma_{n,n-m-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T)$ (для фіксованих $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, $\mu \neq 0$ і $T > 0$) не перевищує $(n - 1)$. Оскільки

$$\Gamma_{n,n-m-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau_j; \mu, T) = 0, \quad j = 1, \dots, n - 1,$$

то $\Gamma_{n,n-m-1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T) \neq 0$, якщо $\tau \neq \tau_j$, $j = 1, \dots, n - 1$. Лему доведено. ■

Із леми 1 випливає твердження теореми 2, оскільки при $\tau_i = \lambda_i B(k)$, $i = 1, \dots, n$, виконується тотожність

$$\Delta(k, \vec{\lambda}) \equiv \Gamma_{n,r}(\tau_1, \dots, \tau_n; \mu, T), \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Далі припускаємо, що умова єдиності (11) виконується. Тоді матимемо зображення розв'язку задачі (2), (3) у вигляді формального ряду

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \exp(ik, x) \times \\ & \times \sum_{j,q=1}^n \frac{\Delta_{jq}(k, \vec{\lambda})}{\Delta(k, \vec{\lambda})} \exp(\lambda_q B(k)t) \varphi_{j,k}, \end{aligned} \quad (15)$$

де $\Delta_{jq}(k, \vec{\lambda})$ — алгебричне доповнення елемента $U_j [\exp(\lambda_q B(k)t)]$ у визначнику $\Delta(k, \vec{\lambda})$. Збіжність ряду (15) у просторах $C^m([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^B)$, взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки визначник $|\Delta(k, \vec{\lambda})|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Для встановлення достатніх умов існування розв'язку задачі (2), (3) позначимо

$$\theta = (n + 1 + C_l^2 + C_r^2) N_2 = (n + l^2 + r^2 + 2) N_2 / 2,$$

$$\theta_j = \theta - j N_2, \quad j = \overline{1, r},$$

$$\theta_j = \theta + r - j N_2, \quad j = \overline{r + 1, n},$$

$$\begin{aligned} \delta_1(\vec{\lambda}) &= \lambda_{r+1} + \dots + \lambda_n, \quad \delta_2(\vec{\lambda}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-r}, \\ \beta_{1,j} &= (l + 1) \max\{0, \lambda_n\} T - \delta_1(\vec{\lambda}) T, \quad j = 1, \dots, r, \\ \beta_{2,j} &= (l + 1) \min\{0, \lambda_1\} T - \delta_2(\vec{\lambda}) T, \quad j = 1, \dots, r, \\ \beta_{1,j} &= l \max\{0, \lambda_n\} T - \delta_1(\vec{\lambda}) T, \quad j = r + 1, \dots, n, \\ \beta_{2,j} &= l \min\{0, \lambda_1\} T - \delta_2(\vec{\lambda}) T, \quad j = r + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови (1), (11) та існує така стала $\eta \in \mathbb{R}$, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ справджується нерівність*

$$|\Delta(k, \vec{\lambda})| \geq |k|^{-\eta} \begin{cases} \exp(\delta_1(\vec{\lambda}) T \operatorname{Re} A(k)), & k \in K_1, \\ \exp(\delta_2(\vec{\lambda}) T \operatorname{Re} A(k)), & k \in K_2. \end{cases} \quad (16)$$

Якщо $\varphi_j \in W_{\theta_j + \alpha + \eta, \beta_{1,j} + \beta_1, \beta_{2,j} + \beta_2}^A$, $j = 1, \dots, n$, то в просторі $C^m([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^A)$ існує єдиний розв'язок задачі (2), (3), який зображається рядом (15) і неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$.

□ **Доведення.** Очевидно, що справедлива нерівність

$$|\exp(\lambda_q B(k)t)| \leq \exp(\eta_k T \operatorname{Re} B(k)), \quad (17)$$

де

$$\eta_k = \begin{cases} \max\{0, \lambda_n\}, & k \in K_1, \\ \min\{0, \lambda_1\}, & k \in K_2. \end{cases}$$

Розкриваючи визначник $\Delta_{jq}(k, \vec{\lambda})$ за правилом Лапласа за мінорами перших $r - 1$ рядків, якщо $j \leq r$, або за мінорами перших r рядків, якщо $j > r$, одержимо, що

$$\begin{aligned} \Delta_{jq}(k, \vec{\lambda}) &= [B(k)]^{C_l^2 + C_r^2 - (j-1)} \times \\ & \times \sum_{\omega_1 \in C(n-1, r-1)} (-1)^{s_{\omega_1}} V_{\omega_1}^{jq} W_{\sigma(\omega_1)}^q \times \end{aligned} \quad (18)$$

$$\times \prod_{s=1, j_s \neq q}^l (1 - \mu e^{\lambda_{j_s} B(k)T}), \quad j \leq r,$$

$$\begin{aligned} \Delta_{jq}(k, \vec{\lambda}) &= [B(k)]^{C_l^2 + C_r^2 - (j-r-1)} \times \\ & \times \sum_{\omega_0 \in C(n-1, r)} (-1)^{s_{\omega_0}} W_{\omega_0}^q V_{\sigma(\omega_0)}^{jq} \times \end{aligned} \quad (19)$$

$$\times \prod_{s=1, j_s \neq q}^{l-1} (1 - \mu e^{\lambda_{j_s} B(k)T}), \quad j > r,$$

де $\omega_\ell = (i_1, \dots, i_{r-\ell})$, $s_{\omega_\ell} = C_{r+1-\ell}^2 + i_1 + \dots + i_{r-\ell}$, набір $\sigma(\omega_\ell) = (j_1, \dots, j_{n-r-(1-\ell)}) \in C(n-1, n-r-(1-\ell))$ однозначно визначається за набором $\omega_\ell \in C(n-1, r-\ell)$ умовою $\operatorname{set} \omega_\ell \cap \operatorname{set} \sigma(\omega_\ell) \neq \emptyset$, символ W_κ^q (κ — деякий набір) позначає визначник Вандермонда сукупностей чисел $\{\lambda_j, j \in \operatorname{set} \kappa, j \neq q\}$, а символ V_κ^{jq} — визначник типу Вандермонда, який отримується із визначника Вандермонда сукупностей чисел $\{\lambda_\iota, \iota \in \operatorname{set} \kappa\}$, закресленням j -го рядка та q -го стовпця, $\ell = 0, 1$.

Звідки отримаємо, що

$$\begin{aligned} |\Delta_{jq}(k, \vec{\lambda})| &\leq C_3 \times \\ \begin{cases} (1 + |k|)^{N_2(C_l^2 + C_r^2 + 1 - j)} e^{l\eta_k T \operatorname{Re} B(k)}, & j \leq r, \\ (1 + |k|)^{N_2(C_l^2 + C_r^2 + 1 + r - j)} e^{(l-1)\eta_k T \operatorname{Re} B(k)}, & j > r, \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

де C_3 — додатна стала.

Позначимо

$$\tilde{\delta}_k = \begin{cases} \delta_1(\vec{\lambda}), & k \in K_1, \\ \delta_2(\vec{\lambda}), & k \in K_2. \end{cases}$$

Тоді, з нерівностей (1), (16) (17), (20) для коефіцієнтів ряду Фур'є $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, ряду (5) одержимо оцінку

$$\begin{aligned} |u_k^{(m)}(t)|^2 &= \\ \left| \sum_{j,q=1}^n \frac{\lambda_q^m B^m(k) \Delta_{jq}(k, \vec{\lambda})}{\Delta(k, \vec{\lambda})} e^{(\lambda_q B(k)t)} \varphi_{j,k} \right|^2 &\leq \\ \leq C_4 (1 + |k|)^{2(\eta + nN_2)} \times \\ \left| \sum_{j=1}^n \Delta_{jq}(k, \vec{\lambda}) \exp((\eta_k - \tilde{\delta}_k) T \operatorname{Re} B(k)) \varphi_{j,k} \right|^2 &\leq \quad (21) \\ \leq C_5 \left(\sum_{j=1}^r |\varphi_{j,k}|^2 (1 + |k|)^{2(\eta + \theta - jN_2)} \times \right. \\ \exp(2(\eta_k + l\eta_k - \tilde{\delta}_k) T \operatorname{Re} B(k)) + \\ \left. \sum_{j=r+1}^n |\varphi_{j,k}|^2 (1 + |k|)^{2(\eta + \theta + (r-j)N_2)} \times \right. \\ \left. \exp(2(l\eta_k - \tilde{\delta}_k) T \operatorname{Re} B(k)) \right), \end{aligned}$$

де $m = 0, \dots, n$. Враховуючи вище позначення, з оцінок (21) отримаємо, що

$$\begin{aligned} \|u(t, x); C^n([0, T]; W_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^B)\|^2 &\leq \\ \leq C_6 \sum_{j=1}^n \|\varphi_j; W_{\theta_j + \alpha + \eta, \beta_{1,j} + \beta_1, \beta_{2,j} + \beta_2}^B\|. \end{aligned}$$

Зауважимо, що додатні сталі C_3 , C_4 , C_5 і C_6 не залежать від k . Таким чином, з останньої нерівності випливає доведення теореми. ■

III. Оцінки знизу малих знаменників

Нехай $R(\lambda)$ — поліном степеня n вигляду

$$R(\lambda) \equiv \lambda^n + \sum_{j=1}^n a_j \lambda^{n-j}, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \quad (22)$$

а $Q(t)$ — квазімногочлен вигляду

$$Q(t) \equiv \sum_{j=1}^m e^{z_j t} p_j(t), \quad z_j \neq z_q, \quad j \neq q, \quad (23)$$

де $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$, а $p_1(t), \dots, p_m(t)$ — многочлени степенів $n_1 - 1, \dots, n_m - 1$ відповідно ($n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$). Для квазімногочлена $Q(t)$ позначимо:

$$M_Q = 1 + \max_{1 \leq j \leq m} |z_j|, \quad n_0 \equiv n_1 + \dots + n_m.$$

Лема 1. [2] Якщо

$$\forall t \in [a, b] \quad |R(d/dt)Q(t)| \geq \delta e^{\vartheta t} > 0, \quad \vartheta \in \mathbb{R},$$

то для всіх $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(2n+2)A_R^n(\vartheta)}\right]$ справджується оцінка

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} \{t \in [a, b] : |Q(t)| \leq \varepsilon e^{\vartheta t}\} \leq C_7 (M_Q + |\vartheta|) (\varepsilon/\delta)^{\frac{1}{n}},$$

де

$$C_7 = C_7(n, n_0, b - a),$$

$$A_R(\vartheta) = 1 + \max_{0 \leq j \leq n-1} \left| \frac{R^{(j)}(\vartheta)}{j!} \right|^{1/(n-j)}.$$

Теорема 1. Якщо для виразу $B(D_x)$ виконується умова (1), то для майже всіх (стосовно міри Лебега в \mathbb{R}^n) $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ нерівність (16) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\eta > \eta_0$, де $\eta_0 = n(n - 2r) + pr(3r - 1)/2 - N_1 C_r^2$.

□ Доведення. Нехай $P_n = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ — довільний фіксований паралелепіпед такий, що $P_n \subset \Pi_n$. Для кожного $k \in K_1 \cup K_2$ запровадимо такі множини:

$$E_\eta(k) = \left\{ \vec{\lambda} \in P_n : |\Delta(k, \vec{\lambda})| < |k|^{-\eta} e^{\delta_1(\vec{\lambda}) T \operatorname{Re} A(k)} \right\},$$

якщо $k \in K_1$,

$$E_\eta(k) = \left\{ \vec{\lambda} \in P_n : |\Delta(k, \vec{\lambda})| < |k|^{-\eta} e^{\delta_2(\vec{\lambda}) T \operatorname{Re} A(k)} \right\},$$

якщо $k \in K_2$.

Нехай E_η — множина тих векторів $\vec{\lambda}$, які належать до нескінченної кількості множин $E_\eta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Для доведення теореми 4 досить перевірити, що для довільного паралелепіпеда $P_n \subset \Pi_n$ $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E_\eta = 0$, якщо $\eta > \eta_0$. Згідно з лемою Бореля–Кантеллі, для цього досить встановити збіжність ряду $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E_\eta(k)$.

Доведемо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}$ виконується оцінка

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E_\eta(k) \leq C_8 |k|^{-p-\varepsilon}, \quad (24)$$

де додатні сталі ε , C_8 не залежать від k . З оцінки (24), очевидно, випливає збіжність ряду $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E_\eta(k)$.

Встановимо оцінку (24) для випадку, коли $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$. Через $\Delta_j(k, \vec{\lambda})$, $j = \overline{1, n}$, позначимо визначник, який одержується з визначника $\Delta(k, \vec{\lambda})$ шляхом викреслювання останніх $(n - j)$ рядків та останніх

$(n - j)$ стовпців. Для кожного $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$ розглянемо множини:

$$\begin{aligned} F_\eta(k) &= \{\vec{\lambda} \in P_n : |\Delta_n(k, \vec{\lambda})| < \nu_n(k, \vec{\lambda})\}, \\ F_\eta(j, k) &= \{\vec{\lambda} \in P_n : |\Delta_j(k, \vec{\lambda})| < \nu_j(k, \vec{\lambda}), \\ &|\Delta_{j-1}(k, \vec{\lambda})| \geq \nu_{j-1}(k, \vec{\lambda})\}, \quad j = \overline{r+1, n}, \end{aligned}$$

де числа $\nu_j(k, \vec{\lambda})$, $k \in K_1$, $j = \overline{r, n}$, визначаються таким способом:

$$\begin{aligned} \nu_r(k, \vec{\lambda}) &= |B(k)|^{C_r^2} \prod_{r \geq j > q \geq 1} |\lambda_j - \lambda_q|, \\ \nu_j(k, \vec{\lambda}) &= \nu_r(k, \vec{\lambda}) \xi_j(k) \prod_{q=r+1}^j e^{\lambda_q \operatorname{Re} B(k)T}, \quad j > r, \\ \xi_j(k) &= \frac{\xi_{j-1}(k)}{|k|^{p(j-r-1+\max\{r, j-r\})+\varepsilon_j}}, \quad j > r, \quad \xi_r(k) = 1, \\ \varepsilon_j &= \varepsilon_0/2^{n-j+1}, \quad r+1 \leq j \leq n, \quad \varepsilon_0 = \eta - \eta_0. \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$(\forall k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}) \quad F_\eta(k) \subset \bigcup_{j=r+1}^n F_\eta(j, k).$$

Дійсно, нехай $\vec{\lambda} \in F_\eta(k)$. Якщо $\vec{\lambda} \notin F_\eta(j, k)$ для всіх $j \in \{r+1, \dots, n\}$, то, згідно з вибором множин $F_\eta(j, k)$, $r+1 \leq j \leq n$, виконується суперечлива нерівність

$$\nu_r(k, \vec{\lambda}) \equiv |\Delta_r(k, \vec{\lambda})| < \nu_r(k, \vec{\lambda}).$$

Тому $\vec{\lambda} \in F_\eta(j_0, k)$ для деякого номера $j_0 \in \{r+1, \dots, n\}$, а, отже, потрібне включення встановлено. Отже,

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(k) \leq \sum_{j=r+1}^n \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(j, k). \quad (25)$$

Для кожної з множин $F_\eta(j, k)$, $r+1 \leq j \leq n$, за теоремою Фубіні маємо

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(j, k) = \int_{\overline{P}_j} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} F_\eta(j, k, \vec{\lambda}_j) d\vec{\lambda}_j, \quad (26)$$

де

$$\overline{P}_j = \prod_{q=1, q \neq j}^n [a_q, b_q], \quad \vec{\lambda}_j = (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n),$$

$$\begin{aligned} F_\eta(j, k, \vec{\lambda}_j) &= \{\lambda_j \in [a_j, b_j] : \\ &(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n) \in F_\eta(j, k)\}. \end{aligned}$$

Для оцінок зверху лебегових мір множин $F_\eta(j, k, \vec{\lambda}_j)$, $r+1 \leq j \leq n$, скористаємось лемою 1. Для цього запровадимо такі многочлени:

$$R_j(\xi, k) = \xi^{\max\{r, j-r\}} (\xi - B(k)T)^{j-r-1}, \quad r+1 \leq j \leq n.$$

До розвинення визначника $\Delta_j(k, \vec{\lambda})$, $j = \overline{r+1, n}$, за елементами його останнього стовпця застосуємо диференціальний вираз $R_j \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}, k \right)$.

У результаті одержимо співвідношення

$$\begin{aligned} R_j \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}, k \right) \Delta_j(k, \vec{\lambda}) &= -\mu(j-r-1)! \times \\ &\times B^{j-r-1}(k) (B(k)T)^{\max\{r, j-r\}} \times \\ &\times e^{\lambda_j B(k)T} \Delta_{j-1}(k, \vec{\lambda}), \quad r+1 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (27)$$

Для фіксованих λ_q , $q \neq j$, визначник $\Delta_j(k, \vec{\lambda})$ як функція змінної λ_j є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $|B(k)|T$, причому $M_{\Delta_j} = 1 + |B(k)|T$. Якщо $\vec{\lambda} \in F_\eta(j, k)$, то з формули (27) та означення множини $F_\eta(j, k)$ випливає, що

$$\begin{aligned} \left| R_j \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}, k \right) \Delta_j(k, \vec{\lambda}) \right| &\geq \\ &\geq |\mu| |B(k)|^{j-r-1+\max\{r, j-r\}} T^{\max\{r, j-r\}} \times \\ &\times e^{\lambda_j \operatorname{Re} A(k)T} \nu_{j-1}(k, \vec{\lambda}), \quad r+1 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (28)$$

Степінь многочлена $R_j(\xi, k)$, $j = r+1, \dots, n$, за змінною ξ дорівнює $(j-r-1+\max\{r, j-r\})$, $\deg R_j = j-r-1+\max\{r, j-r\}$, а вирази $A_{R_j}(B(k)T)$, $j = r+1, \dots, n$, обчислюються за формулами:

$$A_{R_j}(B(k)T) = 1 + \max_{0 \leq i \leq \deg R_j} \left| \frac{R_j^{(i)}(B(k)T, k)}{i!} \right|^{\frac{1}{\deg R_j - i}},$$

$$\text{де } R_j^{(i)}(B(k)T, k) = \left. \frac{d^i R_j(\xi, k)}{d\xi^i} \right|_{\xi=B(k)T}.$$

Оскільки

$$\left. \frac{d^i R_j(\xi, k)}{d\xi^i} \right|_{\xi=B(k)T} = 0,$$

якщо $r+2 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq j-r-2$, та

$$\begin{aligned} R_j^{(i)}(B(k)T, k) &= \\ &= \sum_{\ell=0}^i C_i^\ell [\xi^{\max\{r, j-r\}}]^{(i-\ell)} [(\xi - B(k)T)^{(j-r-1)}]^{(\ell)} \Big|_{\xi=B(k)T} = \\ &= C_i^{j-r-1} \frac{(j-r-1)! (\max\{r, j-r\})!}{\deg R_j - i} (B(k)T)^{\deg R_j - i}, \end{aligned}$$

якщо $r+1 \leq j \leq n$, $i \geq j-r-1$, то

$$A_{R_j}(B(k)T) \leq C_9 |B(k)|,$$

де стала C_9 не залежить від k . Тому з оцінок (28) на підставі леми 2 отримуємо, що для всіх $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$ справджується нерівність

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} F_\eta(j, k, \vec{\lambda}_j) &\leq C_{10} |B(k)| \times \\ &\times \left(\frac{\xi_j(k)}{|B(k)|^{\deg R_j} \xi_{j-1}(k)} \right)^{1/\deg R_j} \leq C_{10} |k|^{-p-\tilde{\varepsilon}_j}, \\ &j = r+1, \dots, n, \end{aligned} \quad (29)$$

де $\tilde{\varepsilon}_j = \varepsilon_0 / ((j-1)2^{n-j+2})$, а стала $C_{10} > 0$ не залежить від вибору значень $\lambda_q \in [a_q, b_q]$, $q = 1, \dots, n$,

$q \neq j$. Інтегруючи оцінки (29), з рівностей (26) отримуємо, що для всіх $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$ виконуються оцінки

$$\text{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(j, k) \leq C_{11} |k|^{-p-\tilde{\varepsilon}}, \quad r+1 \leq j \leq n, \quad (30)$$

де $\tilde{\varepsilon} = \min_{r+1 \leq j \leq n} \tilde{\varepsilon}_j$. Тоді з оцінок (30) на підставі нерівностей (25) дістаємо, що для всіх $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$

$$\text{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(k) \leq (n-r) C_{11} |k|^{-p-\tilde{\varepsilon}}. \quad (31)$$

Враховуючи, що для всіх $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in P_n$

$$\prod_{r \geq j > q \geq 1} |\lambda_j - \lambda_q| \geq \prod_{r \geq j > q \geq 1} |a_j - b_q|,$$

і те, що $|B(k)| \geq c_1(1 + |k|)^{N_1}$, $\varepsilon_{r+1} + \dots + \varepsilon_n < \varepsilon_0$, а

$$\nu_n(k, \vec{\lambda}) = e^{(\lambda_{r+1} + \dots + \lambda_n) \text{Re} B(k) T} \prod_{r \geq j > q \geq 1} |\lambda_j - \lambda_q| \times \\ \times \frac{|B(k)|^{C_r^2}}{|k|^{p(r+\dots+n-1) + \varepsilon_{r+1} + \dots + \varepsilon_n}}, \quad k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\},$$

з оцінок (1) дістаємо, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$ виконується включення $E_\eta(k) \subset F_\eta(k)$, якщо $\eta > \eta_0$. Тому з оцінки (31) випливає істинність оцінки (24) для $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$.

Для випадку, коли $k \in K_2 \setminus \{\vec{0}\}$, оцінку (24) можна встановити аналогічними міркуваннями.

Теорему доведено. ■

Література

- [1] Бобик І. О., Пташник Б. Й. Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн., 1994. – 46, № 7. – С. 795–802.
- [2] Бобик І. О., Симотюк М. М. Задача з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь із частинними похідними // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки, 2010. – Вип. 687. – С. 11–19.
- [3] Ільків В. С., Пташник Б. Й. Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, № 12. – С. 1624–1650.
- [4] Полюга Г., Сеґе Г. Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – 432 с.
- [5] Ільків В. С. Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – В 5. – С. 15–19.
- [6] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
- [7] Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
- [8] Каленюк П. І., Козут І. В., Нитребич З. М. Дослідження задачі з однорідними локальними двоточковими умовами для однорідної системи рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2009. – 52, №4. – С. 7–17.
- [9] Симотюк М. М. Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту, 2002. – Вип. 7. – С. 96–107.

НАЧАЛЬНО-НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Сымотюк М. М., Савка И. Я.

*Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины,
ул. Научная 3-б, 79000, Львов, Украина*

Установлена однозначная разрешимость начально-нелокальной задачи для факторизованного уравнения с частными производными для почти всех (относительно меры Лебега) векторов, составленных из коэффициентов факторизации.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, начально-нелокальные условия, факторизованное уравнения, малые знаменатели, метрические оценки.

2000 MSC: 35G30

УДК: 517.95

INITIAL-NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR FACTORIZED PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Symotyuk M. M., Savka I. Ya.

*Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine
3b Naukova Str., Lviv 79000, Ukraine*

We established the correct solvability of initial-nonlocal boundary value problem for factorized partial differential equations for almost all (with respect to Lebesgue measure) values of coefficients of factorization.

Key words: differential equations, initial-nonlocal conditions, factorized equations, small denominators, metric estimations.

2000 MSC: 35G30

УДК: 517.95