ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№804, 2014, с. 75–83

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№804, 2014, p. 75–83

ЗРОСТАННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ У ТЕРМІНАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ТИПІВ

Глова Т. Я.[a], Філевич П. В.[b]

[a] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України 79060, вул. Наукова, 3-б, Львів, Україна*
[b] *Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ*

(Отримано 21 жовтня 2014 р.)

Встановлено необхідні і достатні умови на функцію порівняння Φ, за яких узагальнений Φ – тип кожної функції f, аналітичної в крузі $|z| < \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, може бути обчислений за формулою типу Коші–Адамара.

Ключові слова: аналітична функція, максимум модуля, максимальний член, узагальнений тип.

2000 MSC: 30B10, 30D10, 30D15, 30D20

УДК: 517.53

I. Постановка задачі

Нехай $A{\in}(-\infty, +\infty]$, $\mathcal{R}{\in}(0, +\infty]$,
$\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \{z{\in}\mathbb{C}\colon |z|{<}\mathcal{R}\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Через Ω_A позначимо клас неспадних опуклих на $(-\infty, A)$ функцій Φ, що є необмеженими зверху на вказаному інтервалі разом зі своєю правосторонньою похідною Φ'_+. Зауважимо, що у випадку скінченного A умова необмеженості зверху правосторонньої похідної Φ'_+ випливає з умови необмеженості зверху функції Φ, а тому є зайвою в означенні класу Ω_A. Умова необмеженості зверху функції Φ є зайвою в означенні класу $\Omega_{+\infty}$, оскільки вона випливає з умови необмеженості зверху її правосторонньої похідної Φ'_+; більше того, клас $\Omega_{+\infty}$ збігається з класом неспадних опуклих на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ, для яких

$$\frac{\Phi(x)}{x} \to +\infty, \quad x \to +\infty.$$

Розглянемо довільну аналітичну в крузі $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ функцію $f \not\equiv 0$ вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{1}$$

Для всіх $r \in (0, \mathcal{R})$ максимум модуля і максимальний член функції f визначаємо відповідно за рівностями

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\},$$

$$\mu(r, f) = \max\{|a_n| r^n : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Крім того, приймемо

$$G(r, f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n.$$

За нерівністю Коші $\mu(r, f) \leq M(r, f)$. Очевидно також, що $M(r, f) \leq G(r, f)$. Добре відомо, що $\ln M(e^x, f)$, $\ln \mu(e^x, f)$ і $\ln G(e^x, f)$ є опуклими на $(-\infty, \ln \mathcal{R})$ функціями.

Клас аналітичних у крузі $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ функцій $f \not\equiv 0$ позначимо через $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$. Якщо $f{\in}\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ і $\mathcal{R}{<}{+\infty}$ ($\mathcal{R} = +\infty$), то, як легко бачити, $\ln M(e^x, f)$ є функцією з класу $\Omega_{\ln \mathcal{R}}$ тоді і лише тоді, коли f є необмеженою у крузі $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ (f є трансцендентною цілою функцією).

Зростання функції f з класу $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ утотожнюємо зі зростанням функції $\ln M(r, f)$. Величину

$$\mathcal{T}_\Phi(f) = \varlimsup_{r \to \mathcal{R}} \frac{\ln M(r, f)}{\Phi(\ln r)},$$

де $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$, називатимемо Φ-типом функції f. Приймемо також

$$\mathcal{A}_\Phi(f) = \varlimsup_{r \to \mathcal{R}} \frac{\ln \mu(r, f)}{\Phi(\ln r)}, \quad \mathcal{B}_\Phi(f) = \varlimsup_{r \to \mathcal{R}} \frac{\ln G(r, f)}{\Phi(\ln r)}.$$

Зрозуміло, що $\mathcal{A}_\Phi(f) \leq \mathcal{T}_\Phi(f) \leq \mathcal{B}_\Phi(f)$. Нехай f — ціла функція вигляду (1). Поняття Φ-типу для такої функції є узагальненням класичного поняття типу, який визначається за рівністю

$$\sigma(f) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln M(r, f)}{r^\rho},$$

де ρ — фіксоване додатне число. За класичною формулою Коші–Адамара (див., наприклад, [1, с. 183])

$$\sigma(f) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{n |a_n|^{\frac{\rho}{n}}}{e\rho}.$$

Отже, тип цілої функції f вигляду (1) не залежить від аргументів коефіцієнтів a_n і повністю визначається послідовністю $(|a_n|)$. З огляду на це постає наступна задача.

Задача 1 *Нехай* $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$. *За якої умови на функцію* $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$ *величина* $\mathcal{T}_\Phi(f)$ *для кожної функції* $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ *вигляду* (1) *не залежить від аргументів* *коефіцієнтів a_n і повністю визначається послідовністю $(|a_n|)$.*

Для функції $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ і кожного $n \in \mathbb{N}_0$ нехай $c_n(f) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ — n-й коефіцієнт степеневого розвинення цієї функції в околі точки $z = 0$.

Через $\mathcal{F}_\mathcal{R}$ позначимо клас відображень $F : \mathcal{H}_\mathcal{R} \to [0, +\infty]$ таких, що $F(f) = F(g)$ для довільних функцій $f, g \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$, послідовності модулів коефіцієнтів степеневих розвинень яких співпадають, тобто $|c_n(f)| = |c_n(g)|$, $n \in \mathbb{N}_0$. Зауважимо, що якщо $F \in \mathcal{F}_\mathcal{R}$ — деяке фіксоване відображення, то для кожної $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ величина $F(f)$ не залежить від аргументів коефіцієнтів $c_n(f)$. Більше того, розглянувши поряд з функцією f функцію g таку, що $c_n(g) = |c_n(f)|$, $n \in \mathbb{N}_0$, бачимо, що функція g, а тому й величина $F(f) = F(g)$ повністю визначається послідовністю $(|c_n(f)|)$. Це дозволяє задачу 1 переформулювати у такому вигляді.

Задача 2 *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$. Описати всі функції $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$, для яких $\mathcal{T}_\Phi \in \mathcal{F}_\mathcal{R}$.*

Зазначимо, що $\mathcal{A}_\Phi$ і $\mathcal{B}_\Phi$ є відображеннями з класу $\mathcal{F}_\mathcal{R}$ для кожної $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$. Легко показати, що $\mathcal{T}_\Phi$ є відображенням з класу $\mathcal{F}_\mathcal{R}$ тоді і лише тоді, коли $\mathcal{T}_\Phi(f) = \mathcal{B}_\Phi(f)$ для кожної $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$. Справді, якщо $\mathcal{T}_\Phi \in \mathcal{F}_\mathcal{R}$, то для довільної $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ вигляду (1) маємо $\mathcal{T}_\Phi(f) = \mathcal{T}_\Phi(g)$, де $g \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ — функція вигляду

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n. \tag{2}$$

Оскільки $M(r, g) = G(r, f)$, то $\mathcal{T}_\Phi(g) = \mathcal{B}_\Phi(f)$. Тому $\mathcal{T}_\Phi(f) = \mathcal{B}_\Phi(f)$. Навпаки, якщо $\mathcal{T}_\Phi(f) = \mathcal{B}_\Phi(f)$ для кожної $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$, то $\mathcal{T}_\Phi \in \mathcal{F}_\mathcal{R}$, оскільки $\mathcal{B}_\Phi \in \mathcal{F}_\mathcal{R}$. Отже, сформульовані вище задачі рівносильні наступній.

Задача 3 *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$. Знайти необхідну і достатню умову на функцію $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$, за якої $\mathcal{T}_\Phi(f) = \mathcal{B}_\Phi(f)$ для кожної $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$.*

II. Формулювання основних результатів

Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$ і $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$. Приймемо

$$\Delta_\Phi = \varlimsup_{x \to \ln \mathcal{R}} \frac{\ln \Phi'_+(x)}{\Phi(x)}.$$

Необхідною і достатньою умовою, про яку йдеться в задачі 3, є умова $\Delta_\Phi = 0$. Такий висновок дозволяють зробити наступні теореми.

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$. Якщо $\Delta_\Phi = 0$, то $\mathcal{B}_\Phi(f) = \mathcal{A}_\Phi(f)$ для кожної $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$.*

Теорема 2. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$. Якщо $\Delta_\Phi > 0$, то існує необмежена в $\mathcal{D}_\mathcal{R}$ функція $g \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ така, що $\mathcal{B}_\Phi(g) > \mathcal{T}_\Phi(g)$.*

Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $A = \ln \mathcal{R}$, $\Phi \in \Omega_A$, а $\widetilde{D}_\Phi$ — множина усіх $x \in (-\infty, +\infty)$, для яких $\sup\{xy - \Phi(y) : y \in (-\infty, A)\} < +\infty$. Приймемо

$$\widetilde{\Phi}(x) = \sup\{xy - \Phi(y) : y \in (-\infty, A)\}, \quad x \in \widetilde{D}_\Phi. \tag{3}$$

Як відомо [1, с. 186], функція $\widetilde{\Phi}(x)$ називається спряженою за Юнгом з функцією Φ. Якщо $k_0 = \Phi'_-(-\infty)$, то за наведеною нижче лемою 4 маємо $\widetilde{D}_\Phi = (k_0, +\infty)$ або $\widetilde{D}_\Phi = [k_0, +\infty)$. Приймемо $h_\Phi(x) = \frac{\widetilde{\Phi}(x)}{x}$, $x \in (k_0, +\infty)$. За лемою 4 функція $h_\Phi(x)$ є неперервною зростаючою до A на $(a_0, +\infty)$, а тому обернена функція $h_\Phi^{-1}(x)$ є зростаючою до $+\infty$ на (A_0, A). Якщо $x \in [A, +\infty]$, то для визначеності приймемо $h_\Phi^{-1}(x) = +\infty$. Розглянемо довільну функцію $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ вигляду (1). За лемою 7 маємо

$$\mathcal{A}_\Phi(f) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{n}{h_\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)}.$$

Отже, якщо $\Delta_\Phi = 0$, то, згідно з теоремою 1 і нерівностями $\mathcal{A}_\Phi(f) \le \mathcal{T}_\Phi(f) \le \mathcal{B}_\Phi(f)$, для кожної $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ вигляду (1) отримуємо

$$\mathcal{T}_\Phi(f) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{n}{h_\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)}, \tag{4}$$

тобто у випадку $\Delta_\Phi = 0$ маємо формулу типу Коші–Адамара, за якою Φ-тип кожної аналітичної функції $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ вигляду (1) можна обчислити через послідовність $(|a_n|)$. У випадку $\Delta_\Phi \neq 0$ формула (4), як це випливає з теореми 2, неправильна. Більше того, згідно з цією теоремою, не існує жодної формули, за якою Φ-тип кожної аналітичної функції $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ вигляду (1) можна обчислити через послідовність $(|a_n|)$.

Зауважимо, що теорему 1 у випадку $\mathcal{R} = +\infty$ доведено в роботах [2] і [3]. Теорему 2 у випадку $\mathcal{R} = +\infty$ анонсовано в [4] і за умови $\Delta_\Phi < +\infty$ доведено в [3]. У роботі, використовуючи ідеї з робіт [3], [5] і [6], доведемо ці теореми у загальному випадку. Для цього нам будуть потрібні деякі допоміжні результати, які наведено нижче.

III. Допоміжні результати

Для аналітичної в крузі $\mathcal{D}_\mathcal{R}$ функції f вигляду (1) нехай $\nu(r, f) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : |a_n| r^n = \mu(r, f)\}$ — її центральний індекс. Добре відомо, що $\nu(r, f) = r(\ln \mu(r, f))'_+$ для всіх $r \in (0, \mathcal{R})$. Крім того, правильна така лема ([7]).

Лема 1. *Нехай (n_k) — зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел, $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, а (c_k) — зростаюча до $\mathcal{R}$ додатна послідовність. Якщо комплексна послідовність (a_n) така, що $a_{n_0} \neq 0$,*

$$a_n = 0, \quad n < n_0, \tag{5}$$

$$|a_{n_{k+1}}| = |a_{n_0}| \prod_{j=0}^{k} c_j^{n_j - n_{j+1}}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{6}$$

$$|a_n| \le |a_{n_k}| c_k^{n_k - n}, \quad n \in (n_k, n_{k+1}),\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{7}$$

то степеневий ряд (1) *задає аналітичну в крузі* $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ *функцію* f, *для якої:*

(i) $\nu(r,f)=n_0$ *для всіх* $r\in(0,c_0)$;

(ii) $\nu(r,f)=n_{k+1}$ *для всіх* $r\in[c_k,c_{k+1})$ *і* $k\in\mathbb{N}_0$.

Лема 2. *Нехай* $\mathcal{R}\in(0,+\infty]$, $\Psi\in\Omega_{\ln\mathcal{R}}$, *а* (n_k) *— послідовність невід'ємних цілих чисел і* (d_k) *— зростаюча до* $\mathcal{R}$ *додатна послідовність такі, що*

$$\Psi'_-(\ln d_k)\le n_k\le\Psi'_+(\ln d_k)<\Psi'_-(\ln d_{k+1}),\quad k\in\mathbb{N}_0. \tag{8}$$

Якщо

$$c_k=\exp\left\{\frac{n_{k+1}\ln d_{k+1}-n_k\ln d_k}{n_{k+1}-n_k}+\right.$$
$$\left.+\frac{\Psi(\ln d_k)-\Psi(\ln d_{k+1})}{n_{k+1}-n_k}\right\},\quad k\in\mathbb{N}_0, \tag{9}$$

а комплексна послідовність (a_n) *така, що*

$$|a_{n_0}|=\exp\{\Psi(\ln d_0)-n_0\ln d_0\} \tag{10}$$

і виконуються співвідношення (5)–(7), *то* $d_k<c_k<$ $<d_{k+1}$ *для всіх* $k\in\mathbb{N}_0$ *і степеневий ряд* (1) *задає аналітичну в крузі* $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ *функцію* f, *для якої*

$$\ln\mu(d_k,f)=\Psi(\ln d_k),\quad k\in\mathbb{N}_0, \tag{11}$$
$$\ln\mu(r,f)\le\Psi(\ln r),\quad r\in(0,\mathcal{R}). \tag{12}$$

$\square$ *Доведення.* З (8) і опуклості функції Ψ випливає, як легко бачити, що

$$n_k\le\Psi'_+(\ln d_k)<\frac{\Psi(\ln d_{k+1})-\Psi(\ln d_k)}{\ln d_{k+1}-\ln d_k}<$$
$$<\Psi'_-(\ln d_{k+1})\le n_{k+1},\quad k\in\mathbb{N}_0. \tag{13}$$

Скориставшись (13) і (9), для всіх $k\in\mathbb{N}_0$ отримуємо

$$c_k>\exp\left\{\frac{n_{k+1}\ln d_{k+1}-n_k\ln d_k}{n_{k+1}-n_k}-\right.$$
$$\left.-\frac{n_{k+1}(\ln d_{k+1}-\ln d_k)}{n_{k+1}-n_k}\right\}=d_k,$$
$$c_k<\exp\left\{\frac{n_{k+1}\ln d_{k+1}-n_k\ln d_k}{n_{k+1}-n_k}-\right.$$
$$\left.-\frac{n_k(\ln d_{k+1}-\ln d_k)}{n_{k+1}-n_k}\right\}=d_{k+1}.$$

Отже, $d_k<c_k<d_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}_0$. Звідси випливає, що (c_k) — зростаюча до $\mathcal{R}$ додатна послідовність. Оскільки послідовність (n_k) також зростаюча, то за лемою 1 степеневий ряд (1) з коефіцієнтами a_n, що задовольняють умови (10) та (5)–(7), задає аналітичну в крузі $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ функцію f, для якої

$$\mu(r,f)=|a_{n_0}|r^{n_0},\quad r\in(0,c_0], \tag{14}$$
$$\mu(r,f)=|a_{n_{k+1}}|r^{n_{k+1}},\quad r\in[c_k,c_{k+1}],\ k\in\mathbb{N}_0. \tag{15}$$

Доведемо за індукцією (11). Якщо $k=0$, то за (14) і (10) маємо

$$\ln\mu(d_0,f)=\ln|a_{n_0}|+n_0\ln d_0=\Psi(\ln d_0).$$

Припустимо, що для деякого $k\in\mathbb{N}_0$ рівність $\ln\mu(d_k,f)=\Psi(\ln d_k)$ вже доведено. Тоді, використовуючи (15), (6) і (9), отримуємо

$$\ln\mu(d_{k+1},f)=\ln|a_{n_{k+1}}|+n_{k+1}\ln d_{k+1}=\ln|a_{n_k}|-$$
$$-(n_{k+1}-n_k)\ln c_k+n_{k+1}\ln d_{k+1}=\ln|a_{n_k}|+$$
$$+n_k\ln d_k-(n_{k+1}-n_k)\ln c_k+n_{k+1}\ln d_{k+1}-$$
$$-n_k\ln d_k=\ln\mu(d_k,f)+\Psi(\ln d_{k+1})-\Psi(\ln d_k)=$$
$$=\Psi(\ln d_{k+1}).$$

Далі приймемо $c_{-1}=0$ і нехай $k\in\mathbb{N}_0$. Якщо $r\in(c_{k-1},d_k)$, то

$$\ln\mu(r,f)-\Psi(\ln r)=\Psi(\ln d_k)-\Psi(\ln r)+$$
$$+\ln\mu(r,f)-\ln\mu(d_k,f)=\int_r^{d_k}\frac{\Psi'_-(\ln t)}{t}dt-$$
$$-\int_r^{d_k}\frac{n_k}{t}dt\le\int_r^{d_k}\frac{\Psi'_-(\ln d_k)-n_k}{t}dt\le 0.$$

Якщо ж $r\in(d_k,c_k)$, то

$$\ln\mu(r,f)-\Psi(\ln r)=\ln\mu(r,f)-\ln\mu(d_k,f)+$$
$$+\Psi(\ln d_k)-\Psi(\ln r)=\int_{d_k}^r\frac{n_k}{t}dt-$$
$$-\int_{d_k}^r\frac{\Psi'_+(\ln t)}{t}dt\le\int_{d_k}^r\frac{n_k-\Psi'_+(\ln d_k)}{t}dt\le 0.$$

Отже, $\ln\mu(r,f)\le\Psi(\ln r)$ для всіх $r\in(0,\mathcal{R})$. Лему 2 доведено. $\blacksquare$

Лема 3. *Нехай* $A\in(-\infty,+\infty]$, $\Psi\in\Omega_A$, $A_0=\inf\{x\in(-\infty,A):\Psi'_-(x)>0,\Psi(x)>0\}$. *Тоді функція*

$$H(x)=x-\frac{\Psi(x)}{\Psi'_-(x)}$$

є неспадною на (A_0,A) *і* $H(x)\to A$, $x\to A$.

$\square$ *Доведення.* Нехай $x_1,x_2\in(A_0,A)$ і $x_1<x_2$. Тоді

$$\Psi(x_2)=\Psi(x_1)+\int_{x_1}^{x_2}\Psi'_-(x)dx\le$$
$$\le\Psi(x_1)+(x_2-x_1)\Psi'_-(x_2),$$

а тому

$$H(x_2)-H(x_1)=x_2-\frac{\Psi(x_2)}{\Psi'_-(x_2)}-x_1+\frac{\Psi(x_1)}{\Psi'_-(x_1)}\ge$$
$$\ge x_2-\frac{\Psi(x_1)+(x_2-x_1)\Psi'_-(x_2)}{\Psi'_-(x_2)}-x_1+\frac{\Psi(x_1)}{\Psi'_-(x_1)}=$$
$$=\frac{\Psi(x_1)(\Psi'_-(x_2)-\Psi'_-(x_1))}{\Psi'_-(x_2)\Psi'_-(x_1)}\ge 0.$$

Звідси випливає, що H є неспадною на (A_0,A).

Нехай $A_1 = \lim_{x\to A} H(x)$. Очевидно, що $A_1 \le A$. Припустимо, від супротивного, що $A_1 < A$ і нехай $A_2 = \max\{A_0, A_1\}$. Тоді для всіх $x \in (A_2, A)$ маємо

$$x - \frac{\Psi(x)}{\Psi'_-(x)} < A_1,$$

звідки отримуємо

$$\frac{\Psi'_-(x)}{\Psi(x)} < \frac{1}{x - A_1}.$$

Тому, якщо $x_0 \in (A_2, A)$ — фіксоване число, а $x \in (x_0, A)$ — довільне число, то

$$\ln\Psi(x) - \ln\Psi(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{\Psi'_-(t)}{\Psi(t)} dt <$$

$$< \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t - A_1} = \ln\frac{x - A_1}{x_0 - A_1}.$$

Звідси у випадку скінченного A випливає, що функція Ψ є обмеженою зверху на інтервалі $(-\infty, A)$, а у випадку $A = +\infty$, що границя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Psi(x)}{x}$$

є скінченною. В обох випадках це суперечить означенню класу Ω_A. Отже, $A_1 = A$. ■

Зауваження 1. Зрозуміло, що лема 3 залишиться правильною, якщо в ній Ψ'_- замінити на Ψ'_+.

Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $A = \ln\mathcal{R}$, $\Phi \in \Omega_A$, а $\widetilde{D}_\Phi$ — множина усіх $x \in (-\infty, +\infty)$, для яких $\sup\{xy - \Phi(y) : y \in (-\infty, A)\} < +\infty$. Розглянемо спряжену за Юнгом з Φ функцію $\widetilde{\Phi}$, визначену за (3), і приймемо $h_\Phi(x) = \frac{\widetilde{\Phi}(x)}{x}$, $x \in \widetilde{D}_\Phi\backslash\{0\}$.

Зауважимо, що якщо $\Phi \in \Omega_A$, то функції Φ'_- і Φ'_+ є неспадними невід'ємними на $(-\infty, A)$, а тому існують границі

$$\Phi'_-(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \Phi'_-(x), \quad \Phi'_+(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \Phi'_+(x),$$

причому $\Phi'_-(-\infty) = \Phi'_+(-\infty) \ge 0$.

Наведені нижче властивості спряженої за Юнгом фунції є, в основному, добре відомими (див., наприклад, [1, с. 186–188]). Для повноти картини ми наводимо їх з доведеннями.

Лема 4. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_A$, $k_0 = \Phi'_+(-\infty)$. Тоді:*

(i) $\widetilde{D}_\Phi = (k_0, +\infty)$ або $\widetilde{D}_\Phi = [k_0, +\infty)$;

(ii) $\widetilde{\Phi}$ — опукла на $\widetilde{D}_\Phi$;

(iii) h_Φ — неперервна зростаюча до A на $(a_0, +\infty)$ функція;

(iv) якщо $\Psi \in \Omega_A$ така, що $\Psi(y) = \Phi(y)$ для всіх $y \in [y_0, A)$, то $\widetilde{\Psi}(x) = \widetilde{\Phi}(x)$ для всіх $x \in [x_0, +\infty)$.

□ *Доведення.* Насамперед зауважимо, що для довільних $y_1, y_2 \in (-\infty, A)$ з опуклості функції Φ випливають нерівності

$$\Phi(y_2) - \Phi(y_1) \le (y_2 - y_1)\Phi'_-(y_2),$$

$$\Phi(y_2) - \Phi(y_1) \le (y_2 - y_1)\Phi'_+(y_2).$$

Для доведення властивості (i) досить показати, що якщо $x \in (-\infty, k_0)$, то $x \notin \widetilde{D}_\Phi$, а якщо $x \in (k_0, +\infty)$, то $x \in \widetilde{D}_\Phi$.

Для кожного фіксованого $x \in (-\infty, +\infty)$ нехай $\alpha_x(y) = xy - \Phi(y)$, $y \in (-\infty, A)$.

Якщо $x \in (-\infty, k_0)$, то, зафіксувавши деяке $y_0 \in (-\infty, A)$, для всіх $y \in (-\infty, y_0)$ маємо

$$\alpha_x(y) \ge xy - \Phi'_-(y)(y - y_0) - \Phi(y_0) \ge$$

$$\ge xy - k_0(y - y_0) - \Phi(y_0) = (x - k_0)y + k_0y_0 - \Phi(y_0),$$

звідки випливає, що $\alpha_x(y) \to +\infty$, $y \to -\infty$. Отже, $x \notin \widetilde{D}_\Phi$.

Якщо ж $x \in (k_0, +\infty)$, то визначеною є величина

$$y(x) = \sup\{y \in (-\infty, A) : \Phi'_-(y) \le x\}.$$

Тоді $\Phi'_-(y) \le x$ для всіх $y \in (-\infty, y(x)]$ і $\Phi'_-(y) > x$ для всіх $y \in (y(x), A)$, звідки бачимо, що

$$\Phi'_-(y(x)) \le x \le \Phi'_+(y(x)).$$

Оскільки

$$\alpha_x(y) - \alpha_x(y(x)) = x(y - y(x)) - (\Phi(y) - \Phi(y(x))),$$

то для всіх $y \in (-\infty, y(x)]$ маємо

$$\alpha_x(y) - \alpha_x(y(x)) \le x(y - y(x)) - \Phi'_-(y(x))(y - y(x)) =$$

$$= (x - \Phi'_-(y(x)))(y - y(x)) \le 0.$$

Подібно для всіх $y \in (y(x), A)$ отримуємо

$$\alpha_x(y) - \alpha_x(y(x)) \le x(y - y(x)) - \Phi'_+(y(x))(y - y(x)) =$$

$$= (x - \Phi'_+(y(x)))(y - y(x)) \le 0.$$

Отже, $\alpha_x(y) \le \alpha_x(y(x))$ для всіх $y \in (-\infty, A)$, звідки випливає, що $x \in \widetilde{D}_\Phi$.

Зауважимо, що нами, фактично, доведено для всіх $x \in (k_0, +\infty)$ рівність

$$\widetilde{\Phi}(x) = xy(x) - \Phi(y(x)).$$

Відзначимо також, що $y(x)$ є неспадною на $(k_0, +\infty)$ функцією і $y(x) \to A$, $x \to +\infty$.

Перейдемо до доведення властивості (ii). Нехай $x_1, x_2, x_3 \in \widetilde{D}_\Phi$ — довільні числа такі, що $x_1 < x_2 < x_3$. Тоді для кожного $y \in (-\infty, A)$ маємо

$$(x_2y - \Phi(y))(x_3 - x_1) = (x_1y - \Phi(y))(x_3 - x_2) +$$

$$+ (x_3y - \Phi(y))(x_2 - x_1).$$

Беручи супремум від обидвох частин наведеної рівності за всіма $y \in (-\infty, A)$, отримуємо

$$\widetilde{\Phi}(x_2)(x_3 - x_1) \le \widetilde{\Phi}(x_1)(x_3 - x_2) + \widetilde{\Phi}(x_3)(x_2 - x_1),$$

а це й означає, що функція $\widetilde{\Phi}$ є опуклою на $\widetilde{D}_\Phi$.

Далі зауважимо, що з опуклості функції $\widetilde{\Phi}$ на $\widetilde{D}_\Phi$ випливає її неперервність на $\widetilde{D}_\Phi$, а тому функція h_Φ є неперервною на $(k_0, +\infty)$. Приймемо

$$a_0 = \inf\{x \in (k_0, +\infty) : \Phi(y(x)) > 0\}.$$

Якщо $x_1, x_2 \in (a_0, +\infty)$ і $x_1 < x_2$, то

$$h_\Phi(x_1) = y(x_1) - \frac{\Phi(y(x_1))}{x_1} < y(x_1) - \frac{\Phi(y(x_1))}{x_2} \leq$$

$$\leq \sup\left\{y - \frac{\Phi(y)}{x_2} : y \in (-\infty, A)\right\} = h_\Phi(x_2).$$

Отже, h_Φ є зростаючою на $(a_0, +\infty)$ функцією. Нарешті, якщо $\Phi'_-(y(x)) > 0$, то

$$y(x) - \frac{\Phi(y(x))}{\Phi'_-(y(x))} \leq h_\Phi(x) \leq y(x) - \frac{\Phi(y(x))}{\Phi'_+(y(x))}.$$

Звідси, врахувавши лему 3 і зауваження 1, бачимо, що $h_\Phi(x) \to A$, $x \to +\infty$.

Щоб довести властивість (iv), досить прийняти

$$t(x) = \sup\{t \in (-\infty, A) : \Psi'_-(t) \leq x\}, \quad x > \Psi'_+(-\infty),$$

і зауважити, що $t(x) = y(x)$ для всіх доволі великих x. Лему повністю доведено. ■

Лема 5. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$ і $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ — функція вигляду* (1). *Тоді наступні два твердження рівносильні:*

(i) $\ln \mu(r, f) \leq \Phi(\ln r)$ *для всіх* $r \in (0, \mathcal{R})$*;*

(ii) $a_n = 0$ *для всіх* $n \notin \widetilde{D}_\Phi$ *і* $\ln |a_n| \leq -\widetilde{\Phi}(n)$ *для всіх* $n \in \widetilde{D}_\Phi$*.*

□ *Доведення.* Якщо виконується (i), то для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}_0$ і всіх $y \in (-\infty, \ln \mathcal{R})$ маємо $\ln |a_n| + ny \leq \Phi(y)$, а тому $-\ln |a_n| \geq ny - \Phi(y)$. Беручи супремум за всіма $y \in (-\infty, \ln \mathcal{R})$ від обидвох частин останньої нерівності, отримуємо $-\ln |a_n| \geq +\infty$, якщо $n \notin \widetilde{D}_\Phi$, і $-\ln |a_n| \geq \widetilde{\Phi}(n)$, якщо $n \in \widetilde{D}_\Phi$, звідки випливає (ii).

Якщо виконується (ii), то для кожного фіксованого $y \in (-\infty, \ln \mathcal{R})$ і всіх $n \in \mathbb{N}_0$ маємо $\ln |a_n| \leq -ny + \Phi(y)$, а тому $\ln |a_n| + ny \leq \Phi(y)$. Беручи супремум за всіма $n \in \mathbb{N}_0$ від обидвох частин останньої нерівності, отримуємо $\ln \mu(e^y, f) \leq \Phi(y)$, $y \in (-\infty, \ln \mathcal{R})$, тобто виконується (i). ■

Лема 6. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$ і $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ — функція вигляду* (1). *Тоді наступні два твердження рівносильні:*

(i) $\ln \mu(r, f) \leq \Phi(\ln r)$ *для всіх* $r \in [r_0, \mathcal{R})$*;*

(ii) $\ln |a_n| \leq -\widetilde{\Phi}(n)$ *для всіх* $n \geq n_0$*.*

□ *Доведення.* Нехай виконується (i). Приймемо $\Psi(y) = \max\{\ln \mu(e^y, f), \Phi(y)\}$, $y \in (-\infty, \ln \mathcal{R})$. Зрозуміло, що $\Psi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$. Оскільки $\ln \mu(r, f) \leq \Psi(\ln r)$ для всіх $r \in (0, \mathcal{R})$, то за лемою 5 маємо $\ln |a_n| \leq -\widetilde{\Psi}(n)$ для всіх $n \geq n_1$. Залишилося використати властивість (iv) з леми 4.

Припустимо, що виконується (ii). Якщо $\nu(r, f)$ — обмежена на $(0, \mathcal{R})$ функція, то $\nu(r, f) = o(\Phi'_+(\ln r))$, $r \uparrow \mathcal{R}$, а тому $\ln \mu(r, f) = o(\Phi(\ln r))$, $r \uparrow \mathcal{R}$, звідки маємо (i). Якщо ж функція $\nu(r, f)$ необмежена на $(0, \mathcal{R})$, то $\mu(r, f) = \mu(r, g)$, $r \in [r_0, \mathcal{R})$, де $g(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$. Залишилось врахувати, що $\ln \mu(r, g) \leq \Phi(\ln r)$ для всіх $r \in (0, \mathcal{R})$ за лемою 5. ■

За лемою 4 функція $h_\Phi(x)$ є неперервною зростаючою до A на $(a_0, +\infty)$, а тому обернена функція $h_\Phi^{-1}(x)$ є зростаючою до $+\infty$ на (A_0, A). Якщо $x \in [A, +\infty]$, то для визначеності приймемо $h_\Phi^{-1}(x) = +\infty$.

Лема 7. *Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$ і $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ — функція вигляду* (1). *Тоді $\mathcal{A}_\Phi(f) = a_\Phi(f)$, де*

$$a_\Phi(f) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{h_\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)}.$$

□ *Доведення.* Доведемо спочатку, що $\mathcal{A}_\Phi(f) \leq \leq a_\Phi(f)$. Нема що доводити, якщо $a_\Phi(f) = +\infty$. Припустимо, що $a_\Phi(f) < +\infty$ і зафіксуємо довільну сталу $C > a_\Phi(f)$. Тоді з означення величини $a_\Phi(f)$ випливає, що

$$n \leq C h_\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right), \quad n \geq n_1,$$

звідки, прийнявши $\Psi(y) = C\Phi(y)$, $y \in (-\infty, A)$, отримуємо

$$\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|a_n|} \geq h_\Phi\left(\frac{n}{C}\right) = h_\Psi(n) = \frac{1}{n}\widetilde{\Psi}(n), \quad n \geq n_2,$$

тобто $\ln |a_n| \leq -\widetilde{\Psi}(n)$ для всіх $n \geq n_2$. Тоді за лемою 6 маємо

$$\ln \mu(r, f) \leq \Psi(\ln r) = C\Phi(\ln r), \quad r \in [r_0, \mathcal{R}),$$

а тому $\mathcal{A}_\Phi(f) \leq C$. З довільності $C > a_\Phi(f)$ випливає, що $\mathcal{A}_\Phi(f) \leq a_\Phi(f)$.

Для доведення протилежної нерівності $\mathcal{A}_\Phi(f) \geq \geq a_\Phi(f)$ досить припустити, що $\mathcal{A}_\Phi(f) < +\infty$, зафіксувати довільну сталу $C > \mathcal{A}_\Phi(f)$ і повторити наведені вище міркування у зворотному порядку. У підсумку отримаємо нерівність $C \geq a_\Phi(f)$. З довільності $C > \mathcal{A}_\Phi(f)$ й випливатиме, що $\mathcal{A}_\Phi(f) \geq a_\Phi(f)$. ■

Лема 8. *Нехай $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, $r_2 \geq r_1 > 0$. Тоді для кожного многочлена вигляду*

$$P(z) = \sum_{j=m}^{n} a_j z^j$$

правильна подвійна нерівність

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^m \leq \frac{M(r_2, P)}{M(r_1, P)} \leq \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n.$$

□ *Доведення.* Розглянемо многочлени

$$\varphi(w) = \frac{P(r_2 w)}{M(r_2, P) w^{m-1}} = \frac{1}{M(r_2, P)} \sum_{j=m}^{n} a_j r_2^j w^{j-m+1},$$

$$\psi(w) = \frac{w^{n+1}}{M(r_1, P)} P\left(\frac{r_1}{w}\right) = \frac{1}{M(r_1, P)} \sum_{j=m}^{n} a_j r_1^j w^{n+1-j}.$$

Легко бачити, що $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ і $M(1, \varphi) = M(1, \psi) = 1$. Тоді за лемою Шварца для кожного $\rho \in (0, 1]$ маємо

$$M(\rho, \varphi) = \frac{M(r_2 \rho, P)}{M(r_2, P) \rho^{m-1}} \le \rho,$$

$$M(\rho, \psi) = \frac{\rho^{n+1}}{M(r_1, P)} M\left(\frac{r_1}{\rho}, P\right) \le \rho.$$

Залишилось прийняти $\rho = \frac{r_1}{r_2}$. ■

Наступну лему доведено в [8, с. 46].

Лема 9. *Нехай* $N \in \mathbb{N}$. *Існують числа* $e_0(N), \dots, e_{N-1}(N) \in \{-1, 1\}$ *такі, що*

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{j=0}^{N-1} e_j(N) e^{ij\theta} \right| \le \frac{2}{\sqrt{2} - 1} \sqrt{N}.$$

IV. Доведення теореми 1

Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, а функція $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$ така, що $\Delta_\Phi = 0$. Доведемо, що для кожної аналітичної функції $f \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$ вигляду (1) правильна рівність $\mathcal{B}_\Phi(f) = \mathcal{A}_\Phi(f)$. Очевидно, що для цього досить довести нерівність $\mathcal{B}_\Phi(f) \le \mathcal{A}_\Phi(f)$.

Зафіксуємо довільне $r \in (0, \mathcal{R})$. Тоді для кожного $R \in (r, \mathcal{R})$ отримуємо

$$G(r, f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n \left(\frac{r}{R}\right)^n \le \mu(R, f) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n = \mu(R, f) \frac{R}{R - r}. \tag{16}$$

Приймемо

$$R(r) = \sup\left\{R \in (r, \mathcal{R}) : \Phi'_+(\ln R) \le \frac{R}{R - r}\right\}.$$

Зауважимо, що тоді

$$\Phi'_-(\ln R(r)) \le \frac{R(r)}{R(r) - r} \le \Phi'_+(\ln R(r)), \tag{17}$$

звідки, зокрема, маємо

$$\frac{R(r)}{r} \to 1, \quad r \to \mathcal{R}. \tag{18}$$

Крім того, оскільки $\ln x < x - 1$ для всіх $x > 1$, то

$$\Phi(\ln R(r)) - \Phi(\ln r) = \int_{\ln r}^{\ln R(r)} \Phi'_-(x) dx \le$$

$$\le \Phi'_-(\ln R(r)) \ln \frac{R(r)}{r} \le \frac{R(r)}{R(r) - r} \frac{R(r) - r}{r} = \frac{R(r)}{r}.$$

Звідси і з (18) випливає, що

$$\Phi(\ln R(r)) \sim \Phi(\ln r), \quad r \to \mathcal{R}.$$

Тому, використовуючи (16) з $R = R(r)$ і праву з нерівностей (17), отримуємо

$$\mathcal{B}_\Phi(f) = \varlimsup_{r \to \mathcal{R}} \frac{\ln G(r, f)}{\Phi(\ln R(r))} \le$$

$$\le \varlimsup_{r \to \mathcal{R}} \frac{\ln \mu(R(r), f) + \ln \Phi'_+(\ln R(r))}{\Phi(\ln R(r))} \le$$

$$\le \mathcal{A}_\Phi(f) + \Delta_\Phi = \mathcal{A}_\Phi(f).$$

Теорему 1 доведено. ■

V. Доведення теореми 2

Нехай $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, а функція $\Phi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$ така, що $\Delta_\Phi > 0$. Доведемо, що існує аналітична функція $g \in \mathcal{H}_\mathcal{R}$, для якої $\mathcal{B}_\Phi(g) > \mathcal{T}_\Phi(g)$.

Зафіксуємо деяке $\delta \in \left(0, \frac{\Delta_\Phi}{8}\right)$ і приймемо $\Psi(x) = \delta \Phi(x)$ для всіх $x \in (0, \ln \mathcal{R})$. Зрозуміло, що тоді $\Psi \in \Omega_{\ln \mathcal{R}}$ і

$$\varlimsup_{r \to \mathcal{R}} \frac{\ln(\Psi'_+(\ln r) - 1)}{\Phi(\ln r)} = \Delta_\Phi > 8\delta.$$

Тому для множини

$$E = \{r \in (0, \mathcal{R}) : \ln[\Psi'_+(\ln r)] > 8\delta \Phi(\ln r)\}$$

маємо $\sup E = \mathcal{R}$. Крім того, для кожного $r \in E$ такого, що

$$\Psi'_+(\ln r) \ge \Psi'_+(-\infty) + 1,$$

існує $d \in (0, \mathcal{R})$, для якого

$$\Psi'_-(\ln d) \le [\Psi'_+(\ln r)] \le \Psi'_+(\ln d);$$

тоді $d \le r$, а тому

$$\ln[\Psi'_+(\ln r)] > 8\delta \Phi(\ln d).$$

З наведеного і леми 2 випливає існування послідовності натуральних чисел (n_k) і зростаючої до $\mathcal{R}$ додатної послідовності (d_k) таких, що виконується (8) і для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$\ln n_k > 8\delta \Phi(\ln d_k), \tag{19}$$

$$\ln(5k + 16) \le \Psi(\ln d_k), \tag{20}$$

$$\left(\frac{d_k}{h(d_{k+1})}\right)^{n_{k+1} - n_k} \le \frac{1}{2}, \tag{21}$$

де $h(r) = H(\ln r)$, а H — функція з леми 3.

Визначимо послідовність (c_k) згідно з (9). Нехай (a_n) — невід'ємна послідовність така, що виконуються (10), (5), (6) і $a_n = a_{n_k} c_k^{n_k - n}$ для всіх $n \in (n_k, n_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}_0$. Зрозуміло, що тоді виконується також (7).

За лемами 1 і 2 степеневий ряд (1) задає аналітичну в крузі $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ функцію f, для якої правильні співвідношення (11), (12), (14), (15). Зауважимо, що ряд (1) можна записати у вигляді

$$f(z) = a_{n_0}z^{n_0} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=n_p+1}^{n_{p+1}} a_n z^n =$$

$$= a_{n_0}z^{n_0} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=n_p+1}^{n_{p+1}} a_{n_p} c_p^{n_p-n} z^n$$

Для кожного $p \in \mathbb{N}_0$ приймемо $N_p = n_{p+1} - n_p$ і нехай

$$P_p(z) = \sum_{n=n_p+1}^{n_{p+1}} \frac{1}{\sqrt{N_p}} e_{n-n_p-1}(N_p) a_n z^n,$$

де $e_0(N_p), \ldots, e_{N_p-1}(N_p) \in \{-1, 1\}$ — числа, існування яких стверджується лемою 9 при $N = N_p$. Розглянемо степеневий ряд

$$g(z) = a_{n_0}z^{n_0} + \sum_{p=0}^{\infty} P_p(z).$$

Оскільки $|c_n(g)| \leq a_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, то цей ряд задає аналітичну в крузі $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ функцію.

Доведемо, що g є необмеженою в $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ функцією. Приймемо

$$S(r, g) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}, \quad r \in (0, \mathcal{R}).$$

Тоді $S(r, g) \leq M(r, g)$, а тому, скориставшись рівністю Парсеваля

$$S^2(r, g) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(g)|^2 r^{2n},$$

для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ отримуємо

$$M^2(c_k, g) \geq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(g)|^2 c_k^{2n} >$$

$$> \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{N_k} (a_{n_k} c_k^{n_k-n})^2 c_k^{2n} = \mu^2(c_k, f).$$

Оскільки, згідно з (11), $\mu(r, f)$ є необмеженою на $(0, \mathcal{R})$ функцією, то функція g є необмеженою в $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$.

Далі покажемо, що $\mathcal{B}_\Phi(g) \geq 4\delta$. Справді,

$$G(c_k, g) \geq \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{\sqrt{N_k}} a_{n_k} c_k^{n_k-n} c_k^n =$$

$$= \mu(c_k, f)\sqrt{N_k} \geq \sqrt{N_k} \geq \sqrt{\frac{n_{k+1}}{2}}$$

для всіх $k \geq k_1$. Тому, враховуючи (19), отримуємо

$$\mathcal{B}_\Phi(g) \geq \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln G(c_k, g)}{\Phi(\ln c_k)} \geq \frac{1}{2} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln n_{k+1}}{\Phi(\ln c_k)} \geq$$

$$\geq 4\delta \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\Phi(\ln d_{k+1})}{\Phi(\ln c_k)} \geq 4\delta.$$

Доведемо, що $\mathcal{T}_\Phi(g) \leq 2\delta$. З цією метою зафіксуємо деяке $k \in \mathbb{N}_0$ і для кожного $p \in \mathbb{N}_0$ оцінимо $M(c_k, P_p)$ зверху через $\mu(c_k, f)$.

Насамперед за (15) і лемою 9 для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$M(c_p, P_p) =$$

$$= \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left| \sum_{n=n_p+1}^{n_{p+1}} \frac{1}{\sqrt{N_p}} e_{n-n_p-1}(N_p) a_{n_p} c_p^{n_p-n} c_p^n e^{in\theta} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N_p}} \mu(c_p, f) \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left| \sum_{j=0}^{N_p-1} e_j(N_p) e^{ij\theta} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{N_p}} \mu(c_p, f) \frac{2}{\sqrt{2}-1} \sqrt{N_p} \leq 5\mu(c_p, f).$$

Нехай $k \geq 1$ і $p \leq k - 1$. Тоді $c_p < c_k$ і

$$\ln \mu(c_k, f) - \ln \mu(c_p, f) = \int_{c_p}^{c_k} \frac{\nu(t, f)}{t} dt \geq$$

$$\geq \int_{c_p}^{c_k} \frac{n_{p+1}}{t} dt = n_{p+1} \ln \frac{c_k}{c_p},$$

тобто

$$\mu(c_p, f) \left(\frac{c_k}{c_p} \right)^{n_{p+1}} \leq \mu(c_k, f).$$

Тому, скориставшись лемою 8, отримуємо

$$M(c_k, P_p) \leq M(c_p, P_p) \left(\frac{c_k}{c_p} \right)^{n_{p+1}} \leq$$

$$\leq 5\mu(c_p, f) \left(\frac{c_k}{c_p} \right)^{n_{p+1}} \leq 5\mu(c_k, f).$$

Далі маємо

$$\ln c_k - \ln h(d_{k+1}) \geq \ln c_k - \ln d_{k+1} + \frac{\Psi(\ln d_{k+1})}{n_{k+1}} =$$

$$= \frac{n_{k+1} \ln d_{k+1} - n_k \ln d_k + \Psi(\ln d_k) - \Psi(\ln d_{k+1})}{n_{k+1} - n_k} -$$

$$- \ln d_{k+1} + \frac{\Psi(\ln d_{k+1})}{n_{k+1}} = \frac{n_k(\ln d_{k+1} - \ln d_k)}{n_{k+1} - n_k} +$$

$$+ \frac{\Psi(\ln d_k) - \Psi(\ln d_{k+1})}{n_{k+1} - n_k} + \frac{\Psi(\ln d_{k+1})}{n_{k+1}} =$$

$$= \frac{n_k n_{k+1}(\ln d_{k+1} - \ln d_k)}{(n_{k+1} - n_k)n_{k+1}} +$$

$$+ \frac{n_{k+1}\Psi(\ln d_k) - n_k\Psi(\ln d_{k+1})}{(n_{k+1} - n_k)n_{k+1}} >$$

$$> \frac{n_k n_{k+1}(\ln d_{k+1} - \ln d_k) + n_{k+1}\Psi(\ln d_k)}{(n_{k+1} - n_k)n_{k+1}} -$$

$$- \frac{n_k(\Psi(\ln d_k) + n_{k+1}(\ln d_{k+1} - \ln d_k))}{(n_{k+1} - n_k)n_{k+1}} =$$

$$= \frac{\Psi(\ln d_k)}{n_{k+1}} > 0,$$

тобто $c_k > h(d_{k+1})$, $k \geq k_2$.

Нехай $p \geq k+1$, $k \geq k_2$. Використовуючи лему 8 і співвідношення (15) та (6), отримуємо

$$M(c_k, P_p) \leq$$
$$\leq M(c_p, P_p)\left(\frac{c_k}{c_p}\right)^{n_p+1} \leq 5\mu(c_p, f)\left(\frac{c_k}{c_p}\right)^{n_p+1} =$$
$$= 5\mu(c_k, f)\frac{a_{n_p}c_p^{n_p}}{a_{n_k}c_k^{n_k}}\left(\frac{c_k}{c_p}\right)^{n_p+1} =$$
$$= 5\mu(c_k, f)\frac{c_k^{n_p-n_k+1}}{c_p}\prod_{j=k}^{p-1}\frac{1}{c_j^{n_{j+1}-n_j}}.$$

Отже,

$$M(c_{k+1}, P_p) \leq 5\mu(c_k, f)\frac{c_k}{c_{k+1}} < 5\mu(c_k, f),$$

а якщо $p \geq k+2$, то, скориставшись (21), маємо

$$M(c_k, P_p) \leq 5\mu(c_k, f)\frac{c_k^{n_p-n_{k+1}+1}}{c_p}\prod_{j=k+1}^{p-1}\frac{1}{c_j^{n_{j+1}-n_j}} \leq$$
$$\leq 5\mu(c_k, f)\frac{c_k}{c_p}\prod_{j=k+1}^{p-1}\left(\frac{c_{j-1}}{c_j}\right)^{n_{j+1}-n_j} <$$
$$< 5\mu(c_k, f)\prod_{j=k+1}^{p-1}\left(\frac{d_j}{h(d_{j+1})}\right)^{n_{j+1}-n_j} \leq$$
$$\leq 5\mu(c_k, f)\prod_{j=k+1}^{p-1}\frac{1}{2} = \frac{5}{2^{p-k-1}}\mu(c_k, f).$$

Використовуючи встановлені оцінки і співвідношення (20) та (11), для всіх $k \geq k_2$ отримуємо

$$M(c_k, g) \leq a_{n_0}c_k^{n_0} + \sum_{p=0}^{\infty} M(c_k, P_p) \leq \mu(c_k, f)+$$
$$+\sum_{p=0}^{k+1} 5\mu(c_k, f) + \sum_{p=k+2}^{\infty}\frac{5}{2^{p-k-1}}\mu(c_k, f) =$$
$$= (5k+16)\mu(c_k, f) \leq e^{\Psi(\ln d_k)}\mu(c_k, f) =$$
$$= \mu(d_k, f)\mu(c_k, f) \leq \mu^2(c_k, f).$$

Отже, $\ln M(c_k, g) \leq 2\ln\mu(c_k, f)$, $k \geq k_2$. Оскільки на відрізку $[c_k, c_{k+1}]$ функція $\ln M(r, g)$ є опуклою відносно $\ln r$, а функція $\ln\mu(r, f)$ — лінійною відносно $\ln r$ і обидві функції є додатними на $[c_k, c_{k+1}]$, $k \geq k_3$, то на кожному з таких відрізків функція

$$y(r) = \frac{\ln M(r, g)}{\ln\mu(r, f)}$$

досягає свого максимуму в одній з точок c_k чи c_{k+1}. Тому $\ln M(r, g) \leq 2\ln\mu(r, f)$ для всіх $r \in [r_0, \mathcal{R})$. Тоді, з огляду на (12),

$$\mathcal{T}_\Phi(g) \leq 2\varlimsup_{r\to\mathcal{R}}\frac{\ln\mu(r, f)}{\Phi(\ln r)} \leq 2\varlimsup_{r\to\mathcal{R}}\frac{\Psi(\ln r)}{\Phi(\ln r)} = 2\delta,$$

а тому $\mathcal{B}_\Phi(g) > \mathcal{T}_\Phi(g)$. Теорему доведено. ■

Література

[1] *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

[2] *Філевич П. В.* Асимптотична поведінка цілих функцій з винятковими значеннями у співвідношенні Бореля // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 4. – С. 522–530.

[3] *Філевич П. В.* Зростання цілої і випадкової цілої функції // Мат. студ. – 2008. – Т. 30, № 1. – С. 15–21.

[4] *Філевич П. В.* До поняття порядку і типу цілих функцій // Міжнародна наукова конференція "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь"(Дрогобич, 1–5 жовтня 2001 року). Тези доповідей. – К., 2001. — С. 149.

[5] *Филевич П. В.* Неравенства типа Вимана-Валирона для целых и случайных целых функций конечного логарифмического порядка // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 683–692.

[6] *Филевич П. В.* О влиянии аргументов коэффициентов степенного разложения целой функции на рост ее максимума модуля // Сиб. мат. журн. – 2003. – Т. 44, № 3. – С. 674–685.

[7] *Filevych P. V.* On the slow growth of power series convergent in the unit disk // Mat. Stud. – 2001. – V. 16, № 2. – P. 217–221.

[8] *Кахан Ж.-П.* Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. – М.: Мир, 1976. – 204 с.

РОСТ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТЕРМИНАХ ОБОБЩЕННЫХ ТИПОВ

Глова Т. Я.[a], Филевич П. В.[b]

[a] *Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины, ул. Научная 3-б, 79060, Львов, Украина*
[b] *Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника, Ивано-Франковск*

Установлены необходимые и достаточные условия на функцию сравнения Φ, при которых обобщенный Φ – тип каждой функции f, аналитической в круге $|z| < \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, может быть вычислен с помощью формулы типа Коши–Адамара.

Ключевые слова: аналитическая функция, максимальный член, максимум модуля, обобщенный тип.

2000 MSC: 30B10, 30D10, 30D15, 30D20

УДК: 517.53

THE GROWTH OF ANALYTIC FUNCTIONS IN THE TERMS OF GENERALIZED TYPES

Hlova T. Ya.[a], Filevych P. V.[b]

[a] *Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine 79060, 3-b Naukova Str., Lviv, Ukraine*
[b] *Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk*

We established necessary and sufficient conditions on a function of comparison Φ, under which the generalized Φ – type of each function f, analytic in the disk $|z| < \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, can be calculated by the formula of Cauchy–Hadamard type.

Key words: analytic function, maximum modulus, maximal term, generalized type.

2000 MSC: 30B10, 30D10, 30D15, 30D20

UDK: 517.53