ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№804, 2014, с. 84–90

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№804, 2014, p. 84–90

СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ, БІОРТОГОНАЛЬНІ З ФУНКЦІЯМИ БЕССЕЛЯ

Сухорольський М. А., Достойна В. В.

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 14 липня 2014 р.)

Побудовано систему функцій, біортогональну з системою функцій Бесселя. Встановлено умови розвинення аналітичних функцій в ряди за функціями Бесселя. Наведено приклади таких розвинень та їх застосування.

Ключові слова: функція Бесселя, біортогональна система функцій, асоційована функція.

2000 MSC: 33E30

УДК: 517.53.57

Вступ

Біортогональні системи функцій комплексної змінної та методи розвинення аналітичних функцій в ряди за цими системами розглядаються в роботах [1–4, 7, 11, 12, 14–20]. Відшукання коефіцієнтів рядів ґрунтується на властивості біортогональності, і вони виражаються через похідні функцій, які розвиваються в ці ряди. Системи поліномів і біортогональні з ними системи функцій використано у роботах [5, 9, 21] для зображення розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними з поліноміальними коефіцієнтами.

У цій роботі побудовано систему функцій, біортогональну з системою функцій Бесселя. Встановлено умови розвинення аналітичних функцій в ряди за функціями Бесселя. Наведено приклади таких розвинень.

Розглянемо систему $\{J_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ функцій Бесселя [6, с. 12] першого роду цілого порядку n комплексної змінної

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2^{2l} l!\,(l+n)!} z^{2l}. \tag{1}$$

Із співвідношень (1) отримаємо вирази функцій $J_n(z)$ окремо для парних та непарних значень n:

$$J_{2n}(z) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2^{2l} l!\,(l+2n)!} z^{2(l+n)} =$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^{j-n}}{2^{2j}(j-n)!(j+n)!} z^{2j} = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^{j-n} C_{2j}^{j+n}}{2^{2j}(2j)!} z^{2j},$$

$$J_{2n+1}(z) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^{j-n} C_{2j+1}^{j+n+1}}{2^{2j+1}(2j+1)!} z^{2j+1}.$$

Відомі [10, с. 781] залежності степенів z^n від функцій Бесселя:

$$1 = J_0(z) + 2\sum_{j=1}^{\infty} J_{2j}(z),$$

$$z^n = 2^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j+n)(j+n-1)!}{j!} J_{2j+n}(z). \tag{2}$$

Нехай

$$\left(\frac{2k}{k+n}\right)^* = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \dfrac{2k}{k+n}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Тоді із співвідношень (2) отримаємо вирази степенів z^n окремо для парних та непарних значень n:

$$z^{2n} = 2^{2n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j+2n)(j+2n-1)!}{j!} J_{2j+2n}(z) =$$

$$= 2^{2n} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{2k}{k+n}\right)^* \frac{(k+n)!}{(k-n)!} J_{2k}(z) =$$

$$= 2^{2n}\,(2n)! \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{2k}{k+n}\right)^* C_{k+n}^{2n} J_{2k}(z),$$

$$z^{2n+1} = 2^{2n+1}(2n+1)! \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(2k+1) C_{k+n+1}^{2n+1}}{k+n+1} J_{2k+1}(z). \tag{3}$$

I. Властивості біортогональних систем функцій

Позначимо через $\omega_m(z)$ функції, асоційовані [12, с. 160] з функціями Бесселя. Їх будемо шукати у вигляді

$$\omega_{2m}(z) = \sum_{l=0}^{m} \frac{a_l^m}{z^{2l+1}}, \quad \omega_{2m+1}(z) = \sum_{l=0}^{m} \frac{b_l^m}{z^{2l+2}} \tag{4}$$

і такими, щоб виконувались умови біортогональності:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} J_n(z)\omega_m(z)dz = \delta_{nm}, \tag{5}$$

де δ_{nm} – символ Кронекера, Γ – замкнений гладкий контур, що охоплює нульову точку.

Помножимо перше співвідношення в (3) на функцію $\omega_{2m}(z)$ і проінтегруємо вздовж контуру Γ. Отримаємо

$$\sum_{l=0}^{m} a_l^m \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z^{2(l-n)+1}} =$$

$$= 2^{2n}(2n)!\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{2k}{k+n}\right)^{*} C_{k+n}^{2n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} J_{2k}(z)\omega_{2m}(z)dz.$$

Врахувавши відомий інтеграл [8, с. 81–82]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z^n} = \begin{cases}1, & n = 1,\\ 0, & n \neq 1.\end{cases} \tag{6}$$

та умови (5), знаходимо

$$a_n^m = 2^{2n}(2n)!\left(\frac{2m}{m+n}\right)^{*} C_{m+n}^{2n}.$$

Аналогічно

$$b_n^m = \frac{2^{2n+1}(2n+1)!(2m+1)C_{m+n+1}^{2n+1}}{m+n+1}.$$

Підставляючи вирази для коефіцієнтів a_n^m, b_n^m у співвідношення (4), одержимо

$$\omega_{2m}(z) = \sum_{l=0}^{m}\left(\frac{2m}{m+l}\right)^{*} 2^{2l}(2l)!C_{m+l}^{2l}\frac{1}{z^{2l+1}} =$$

$$= 2^{2m}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{2m}{2m-j}\right)^{*}\frac{(2m-2j)!C_{2m-j}^{j}}{2^{2j}}\frac{1}{z^{2(m-j)+1}},$$

$$\omega_{2m+1}(z) = (2m+1)\sum_{l=0}^{m}\frac{2^{2l+1}(2l+1)!C_{l+m+1}^{2l+1}}{l+m+1}\frac{1}{z^{2l+2}} =$$

$$= 2^{2m+1}(2m+1)\sum_{j=0}^{m}\frac{(2m-2j+1)!C_{2m-j+1}^{j}}{2^{2j}(2m-j+1)}\frac{1}{z^{2(m-j)+2}} \tag{7}$$

або

$$\omega_m(z) = 2^m\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(\frac{m}{m-j}\right)^{*}\frac{(m-2j)!C_{m-j}^{j}}{2^{2j}}\frac{1}{z^{m-2j+1}}. \tag{8}$$

Наслідок 1. Справедливі комбінаторні тотожності

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{2m}{m+k}(-1)^{k-n}C_{2k}^{k+n}C_{m+k}^{2k} = \delta_{nm},$$

$$(2m+1)\sum_{k=n}^{m}\frac{(-1)^{k-n}}{m+k+1}C_{2k+1}^{k+n+1}C_{m+k+1}^{2k+1} = \delta_{nm}.$$

$\square$ *Доведення.* Підставляючи в умову (5) вирази для функцій $J_{2n}(z)$ та $\omega_{2m}(z)$, отримаємо

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(-1)^{j-n}C_{2j}^{j+n}}{2^{2j}(2j)!}\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{2m}{m+k}\right)^{*}2^{2k}(2k)!C_{m+k}^{2k}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z^{2(k-j)+1}} = \delta_{nm}.$$

Враховуючи формулу (6), приходимо до першої тотожності. Друга тотожність встановлюється аналогічно. ■

Твердження 1. Функції $\omega_m(z)$ аналітичні ззовні круга як завгодно малого радіуса з центром у початку координат.

$\square$ *Доведення.* Аналітичність функцій $\omega_m(z)$ випливає з того, що вони містять скінченне число доданків за від'ємними степенями змінної z. ■

Твердження 2. Для функцій $\omega_m(t)$ справедливі оцінки

$$|\omega_m(t)| \leq \frac{2^m m!}{|t|^{m+1}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{|t|^{2j}}{j!} \tag{9}$$

для всіх t таких, що $0 < |t| < \infty$.

$\square$ *Доведення.* Враховуючи співвідношення (8), знаходимо

$$|\omega_m(t)| \leq 2^m\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(\frac{m}{m-j}\right)^{*}\frac{(m-j)!}{2^{2j}j!}\frac{1}{|t|^{m-2j+1}} \leq$$

$$\leq \frac{2^m m!}{|t|^{m+1}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{|t|^{2j}}{j!}.$$

■

Твердження 3. Справедливі комбінаторні тотожності

$$\sum_{k=n}^{j}(-1)^{j-k}\left(\frac{2k}{k+n}\right)^{*}C_{2j}^{k+j}C_{k+n}^{2n} = \delta_{nj},$$

$$\sum_{k=n}^{j}(-1)^{j-k}\frac{2k+1}{k+n+1}C_{2j+1}^{k+j+1}C_{k+n+1}^{2n+1} = \delta_{nj}. \tag{10}$$

$\square$ *Доведення.* Підставимо у співвідношення (3) вираз для функцій $J_{2n}(z)$ та змінимо порядок підсумовування. Одержимо

$$z^{2n} = 2^{2n}(2n)!\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{2k}{k+n}\right)^{*}C_{k+n}^{2n}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^{j-k}C_{2j}^{k+j}}{2^{2j}(2j)!}z^{2j} =$$

$$= 2^{2n}(2n)!\sum_{j=n}^{\infty}\frac{z^{2j}}{2^{2j}(2j)!}\sum_{k=n}^{j}(-1)^{j-k}\left(\frac{2k}{k+n}\right)^{*}C_{2j}^{k+j}C_{k+n}^{2n}.$$

Враховуючи лінійну незалежність степенів z^{2n}, приходимо до першої комбінаторної тотожності. Друга тотожність встановлюється аналогічно. ■

Теорема 1. *Справедливе подання*

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_k(z)\omega_k(t) = \frac{1}{t-z}. \tag{11}$$

При цьому ряд в (11) *збігається рівномірно для* $|z| \le r$, $|t| \ge \rho$, *де* $0 < r < \infty$, $\rho > r$.

□ *Доведення.* Підставивши у ліву частину співвідношення (11) вирази для функцій $J_k(z)$ та асоційованих з ними функцій $\omega_k(t)$, отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_k(z)\omega_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(z)\omega_{2k}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z)\omega_{2k+1}(t) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^{j-k}C_{2j}^{j+k}}{2^{2j}(2j)!} z^{2j} \sum_{l=0}^{k} \binom{2k}{k+l}^{*} 2^{2l}(2l)!C_{k+l}^{2l}\frac{1}{t^{2l+1}} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^{j-k}C_{2j+1}^{j+k+1}}{2^{2j+1}(2j+1)!} z^{2j+1}(2k+1)\times$$
$$\times \sum_{l=0}^{k} \frac{2^{2l+1}(2l+1)!C_{k+l+1}^{2l+1}}{l+k+1}\frac{1}{t^{2l+2}}.$$

Змінивши у сумах порядок підсумовування, матимемо

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_k(z)\omega_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{2^{2j}(2j)!} \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}C_{2j}^{j+k}\times$$
$$\times \sum_{l=0}^{k} \binom{2k}{k+l}^{*} 2^{2l}(2l)!C_{k+l}^{2l}\frac{1}{t^{2l+1}} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{2^{2j+1}(2j+1)!} \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}(2k+1)C_{2j+1}^{j+k+1}\times$$
$$\times \sum_{l=0}^{k} \frac{2^{2l+1}(2l+1)!C_{k+l+1}^{2l+1}}{l+k+1}\frac{1}{t^{2l+2}} =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{2^{2j}(2j)!} \sum_{l=0}^{j} \frac{2^{2l}(2l)!}{t^{2l+1}} \sum_{k=l}^{j}(-1)^{j-k}\binom{2k}{k+l}^{*} C_{2j}^{j+k}C_{k+l}^{2l} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{2^{2j+1}(2j+1)!} \sum_{l=0}^{j} \frac{2^{2l+1}(2l+1)!}{t^{2l+2}}\times$$
$$\times \sum_{k=l}^{j}(-1)^{j-k}\frac{(2k+1)C_{2j+1}^{j+k+1}C_{k+l+1}^{2l+1}}{k+l+1}.$$

Використавши комбінаторні тотожності (10), остаточно знаходимо

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_k(z)\omega_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{2j}}{t^{2j+1}} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{2j+1}}{t^{2j+2}} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{j}}{t^{j+1}} =$$
$$= \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{t}} = \frac{1}{t-z}.$$

Покажемо, що ряд у співвідношенні (11) збігається рівномірно. Врахувавши відому оцінку [6, с. 23] для функцій Бесселя

$$J_\mu(z) \le \left|\frac{z}{2}\right|^{\mu} \frac{e^{|y|}}{\Gamma(\mu+1)} \quad (y = \operatorname{Im} z) \tag{12}$$

та (9), знаходимо

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} J_k(z)\omega_k(t)\right| \le$$
$$\le \sum_{k=0}^{\infty} |J_{2k}(z)|\,|\omega_{2k}(t)| + \sum_{k=0}^{\infty} |J_{2k+1}(z)|\,|\omega_{2k+1}(t)| \le$$
$$\le e^{|z|}\left(\frac{1}{|t|}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{z}{t}\right|^{2k}\sum_{j=0}^{k}\frac{|t|^{2j}}{j!} + \frac{|z|}{|t|^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{z}{t}\right|^{2k}\sum_{j=0}^{k}\frac{|t|^{2j}}{j!}\right) =$$
$$= e^{|z|}\left(\frac{1}{|t|}+\frac{|z|}{|t|^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{z}{t}\right|^{2k}\sum_{j=0}^{k}\frac{|t|^{2j}}{j!} =$$
$$= \frac{e^{|z|}\left(|t|+|z|\right)}{|t|^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|t|^{2j}}{j!}\sum_{k=j}^{\infty}\left|\frac{z}{t}\right|^{2k} =$$
$$= \frac{e^{|z|}\left(|t|+|z|\right)}{|t|^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|t|^{2j}}{j!}\sum_{l=0}^{\infty}\left|\frac{z}{t}\right|^{2l+2j} =$$
$$= \frac{e^{|z|}\left(|t|+|z|\right)}{|t|^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|z|^{2j}}{j!}\sum_{l=0}^{\infty}\left|\frac{z}{t}\right|^{2l} =$$
$$= \frac{e^{|z|+|z|^2}\left(|t|+|z|\right)}{|t|^2}\cdot\frac{1}{1-\left|\dfrac{z}{t}\right|^2} = \frac{e^{|z|(1+|z|)}}{|t|-|z|} \le \frac{e^{r(1+r)}}{\rho-r}.$$

Отже, для всіх z і t таких, що $|z| \le r$, $|t| \ge \rho$, де $0 < r < \infty$, $\rho > r$, ряд в (11) збігається рівномірно. ■

Позначимо через A_r простір однозначних та аналітичних у крузі $|z| \le r$, $0 < r < \infty$, функцій.

Теорема 2. *Система функцій* $\{J_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *є базисом Шаудера [12, с. 128–129] у просторі* A_r, $0 < r < \infty$.

□ *Доведення.* Система $\{J_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ є базисом в A_r [12, с. 161], бо

а) функції $\omega_m(z)$ аналітичні в області $|z| > \rho > 0$ згідно з твердженням 1;

б) коефіцієнти у розвиненнях (7) асоційованих функцій задовольняють умови

$$\lim_{l\to\infty}\left[\binom{2m}{l+m}^{*} 2^{2l}(2l)!C_{l+m}^{2l}\right]^{\frac{1}{2l}} = \rho_m < r,$$
$$\lim_{l\to\infty}\left[\frac{2^{2l+1}(2l+1)!C_{l+m+1}^{2l+1}}{l+m+1}\right]^{\frac{1}{2l+1}} = \rho_m < r,$$

оскільки $C_m^l = 0$, якщо $l > m$, і, відповідно, $\rho_m = 0$;

в) справедливе розвинення (11) і за теоремою 1 відповідний ряд збігається рівномірно для всіх z і t таких, що $|z| \le r$, $|t| \ge \rho$, де $0 < r < \infty$, $\rho > r$. ■

II. Розвинення функцій у ряди за системою функцій $\{J_n(z)\}$

Нехай $f(z)$ – сума ряду за системою $\{J_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, який рівномірно збіжний в області $|z| \leq R < \infty$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z). \tag{13}$$

Помножимо ліву та праву частини рівності (13) на функцію $\omega_m(z)$ і проінтегруємо вздовж контуру $\Gamma = \{z\colon |z| = r\}$, $0 < r < R$. Тоді

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\omega_m(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} J_n(z)\omega_m(z)dz.$$

Враховуючи умови біортогональності (5) і подання (8), маємо

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\omega_m(z)dz =$$

$$= 2^m \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\frac{m}{m-j}\right)^* \frac{(m-2j)!C_{m-j}^j}{2^{2j}} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z^{m-2j+1}}dz.$$

На підставі формули Коші одержимо

$$a_m = 2^m \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\frac{m}{m-j}\right)^* \frac{C_{m-j}^j}{2^{2j}} f^{(m-2j)}(0).$$

Звідси знаходимо окремо для парних та непарних значень індексів m:

$$a_{2m} = 2^{2m} \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{2m}{2m-j}\right)^* \frac{C_{2m-j}^j}{2^{2j}} f^{(2m-2j)}(0) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m} \left(\frac{2m}{l+m}\right)^* 2^{2l} C_{l+m}^{2l} f^{(2l)}(0),$$

$$a_{2m+1} = (2m+1)\sum_{l=0}^{m} \frac{2^{2l+1}C_{l+m+1}^{2l+1}}{l+m+1} f^{(2l+1)}(0). \tag{14}$$

Теорема 1. *Якщо функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z| \leq R$ $(R < \infty)$ і обмежена на колі $|z| = R$ так, що $\max\limits_{|z|\leq R} |f(z)| = M$ $(M = const)$, то коефіцієнти в* (13) *задовольняють нерівність*

$$|a_n| \leq \frac{M 2^n n! e^{\frac{R^2}{4}}}{R^n} \tag{15}$$

і для кожного $r \in (0, R)$ ряд (13) *збігається рівномірно до $f(z)$ у крузі $|z| \leq r$.*

□ *Доведення.* Враховуючи нерівність

$$\frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \leq \frac{\max\limits_{|z|\leq R}|f(z)|}{R^n} = \frac{M}{R^n},$$

отримаємо оцінки для коефіцієнтів (14)

$$|a_{2m}| \leq 2^{2m} \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{2m}{2m-j}\right)^* \frac{C_{2m-j}^j}{2^{2j}} \left|f^{(2m-2j)}(0)\right| \leq$$

$$\leq M 2^{2m} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2m-j)!}{2^{2j} j!(2m-2j)!} \frac{1}{R^{2(m-j)}} \leq$$

$$\leq \frac{M 2^{2m}(2m)!}{R^{2m}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^{2j}}{j!} = \frac{M 2^{2m}(2m)! e^{\frac{R^2}{4}}}{R^{2m}}.$$

Аналогічно

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{M 2^{2m+1}(2m+1)! e^{\frac{R^2}{4}}}{R^{2m+1}}.$$

Об'єднуючи оцінки для коефіцієнтів a_{2m} та a_{2m+1}, одержимо (15).

Покажемо рівномірну збіжність ряду (13). На підставі оцінок (15) та (12) маємо

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|J_n(z)| \leq M e^{\frac{R^2}{4}+|z|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{R}\right)^n \leq$$

$$\leq M e^{\frac{R^2}{4}+r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n = \frac{MR}{R-r} e^{\frac{R^2}{4}+r}$$

для $|z| \leq r$, $(r < R)$.

Отже, ряд (13) збігається рівномірно в області $|z| \leq r$, де $r < R$. ■

Приклад 1. Розвинути в ряд функцію $f(z) = \cos(qz)$, де q – довільне дійсне число.

Оскільки $f^{(2j)}(0) = (-1)^j q^{2j}$, $f^{(2j+1)}(0) = 0$, то, згідно з формулами (14), маємо

$$a_0 = f(0) = 1,$$

$$a_{2m} = 2m \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j (2q)^{2j} C_{j+m}^{2j}}{j+m},$$

$$a_{2m+1} = 0.$$

Використовуючи відомий вираз [13, с. 19] для многочленів Чебишова $T_m(z)$ першого роду

$$T_m(z) = \frac{1}{2} m \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^k C_{m-k}^k}{2^{m-2k}(m-k)} z^{m-2k} \tag{16}$$

отримаємо

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j (2q)^{2j} C_{j+m}^{2j}}{j+m} = \frac{(-1)^m T_{2m}(q)}{m}.$$

Звідси $a_{2m} = 2(-1)^m T_{2m}(q)$.

Отже,

$$\cos(qz) = J_0(z) + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m T_{2m}(q) J_{2m}(z).$$

При $q = 1$ маємо $T_{2m}(1) = 1$ [13, с. 13], тому

$$\cos z = J_0(z) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_{2m}(z).$$

Приклад 2. Розвинути в ряд функцію $f(z) = \sin(qz)$, де q – довільне дійсне число.

Оскільки $f^{(2j)}(0) = 0$, $f^{(2j+1)}(0) = (-1)^j q^{2j+1}$, то за формулами (14) знайдемо

$$a_{2m} = 0, \quad a_{2m+1} = (2m+1)\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j(2q)^{2j+1}C_{j+m+1}^{2j+1}}{j+m+1}.$$

Використовуючи вираз (16), одержимо

$$\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j(2q)^{2j+1}C_{j+m+1}^{2j+1}}{j+m+1} = \frac{(-1)^m 2T_{2m+1}(q)}{2m+1},$$

звідки $a_{2m+1} = (-1)^m 2T_{2m+1}(q)$. Тому

$$\sin(qz) = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m T_{2m+1}(q)J_{2m+1}(z).$$

При $q = 1$ маємо $T_{2m+1}(1) = 1$ [13, с. 13], отже,

$$\sin z = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m J_{2m+1}(z).$$

Приклад 3. Розвинути в ряд функцію $f(z) = \operatorname{ch}(qz)$, де q – довільне дійсне число.

Оскільки $f^{(2j)}(0) = q^{2j}$, $f^{(2j+1)}(0) = 0$, то, згідно з формулами (14), маємо

$$a_0 = f(0) = 1, \quad a_{2m} = 2m\sum_{j=0}^{m}\frac{(2q)^{2j}C_{j+m}^{2j}}{j+m}, \quad a_{2m+1} = 0.$$

Використовуючи вираз (16), одержимо

$$\sum_{j=0}^{m}\frac{(2q)^{2j}C_{j+m}^{2j}}{j+m} = \frac{(-1)^m T_{2m}(iq)}{m}.$$

Звідси $a_{2m} = (-1)^m 2T_{2m}(iq)$.

Отже,

$$\operatorname{ch}(qz) = J_0(z) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m T_{2m}(iq)J_{2m}(z).$$

Якщо $q = 1$, то

$$\operatorname{ch} z = J_0(z) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m T_{2m}(i)J_{2m}(z).$$

Приклад 4. Розвинути в ряд функцію $f(z) = \operatorname{sh}(qz)$, де q – довільне дійсне число.

Оскільки $f^{(2j)}(0) = 0$, $f^{(2j+1)}(0) = q^{2j+1}$, то, згідно з формулами (14), маємо

$$a_{2m} = 0, \quad a_{2m+1} = (2m+1)\sum_{j=0}^{m}\frac{(2q)^{2j+1}C_{j+m+1}^{2j+1}}{j+m+1}.$$

Використовуючи вираз (16), одержимо

$$\sum_{j=0}^{m}\frac{(2q)^{2j+1}C_{j+m+1}^{2j+1}}{j+m+1} = \frac{(-1)^m 2T_{2m+1}(iq)}{2m+1}.$$

Звідси $a_{2m+1} = (-1)^m 2T_{2m+1}(iq)$.

Отже,

$$\operatorname{sh}(qz) = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m T_{2m+1}(iq)J_{2m+1}(z).$$

Якщо $q = 1$, то

$$\operatorname{sh} z = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m T_{2m+1}(i)J_{2m+1}(z).$$

Зауважимо, що розвинення функцій $\cos(qz)$ і $\sin(qz)$ співпадають з розвиненнями в [13, с. 176] функцій $\cos(zq)$ і $\sin(zq)$, які отримані іншим способом.

III. Застосування

Розглянемо однорідне рівняння Гельмгольца у прямокутній системі координат:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0. \tag{17}$$

Якщо ввести комплексні змінні $w = x+iy$ і $\overline{w} = x-iy$, то рівняння (17) можна записати у вигляді

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial w\partial\overline{w}} + u = 0. \tag{18}$$

Можна переконатися, що розв'язками рівняння (18) є система функцій

$$U_k(x,y)+iV_k(x,y)=\left(\frac{w}{2}\right)^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2^{2l}l!(l+k)!}w^l\overline{w}^l, \quad k = 0, \pm 1, \ldots . \tag{19}$$

Нехай $w = \rho e^{i\varphi}$, де $0 \le \rho < \infty$, $-\pi < \varphi \le \pi$. Тоді система розв'язків (19) набуде вигляду

$$U_k(x,y)=\operatorname{Re} e^{ik\varphi}J_k(\rho), \quad V_k(x,y)=\operatorname{Im} e^{ik\varphi}J_k(\rho), \tag{20}$$

де $\rho = \sqrt{w\overline{w}} = \sqrt{x^2+y^2}$, $J_k(\rho)$ – функція Бесселя першого роду порядку k [6, с. 12].

Висновки

Системи функцій $\left\{P_n(z) = z^{-1}\omega_n\left(z^{-1}\right)\right\}$, $\left\{\psi_m(z) = z^{-1}J_m\left(z^{-1}\right)\right\}$ також біортогональні на замкненому контурі, що охоплює нульову точку, при цьому $\{P_n(z)\}$ – система многочленів – базис простору A_r.

Система функцій (20) може бути використана для формулювання крайових задач для рівняння Гельмгольца. Наприклад, для випадку $y = 0$ система функцій (20) зведеться до системи функцій Бесселя відносно змінної x. Тоді, якщо задана гранична функція на осі Ox, то, розвиваючи її за системою функцій Бесселя, можна отримати розв'язок крайової задачі для рівняння Гельмгольца у півплощині. Аналогічно можна розв'язувати крайову задачу для рівняння Гельмгольца в кутовій області.

Література

[1] *Cruz-Barroso R., Daruis L., Gonzalez-Vera P., Njastad O.* Sequences of orthogonal Laurent polynomials, bi-orthogonality and quadrature formulas on the unit circle // J. Comput. Appl. Math. – 2007. – 206, No. 2. – P. 950–966.

[2] *Fackereil E. D., Littler R. A.* Polynomials biorthogonal to Appell's polynomials // Bull. Aust. Math. Soc. – 1974. – 11, No. 2. – P. 181–195.

[3] *Schleusner J. W.* A note on biorthogonal polynomials in two variables // SIAM J. Math. Anal. – 1974. – 5. – P. 11–18.

[4] *Zhedanov A.* The classical Laurent biorthogonal polynomials // J. Comput. Appl. Math. – 1998. – 98, No. 1. – P. 121–147.

[5] *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ГОНТИ–НКТП–ДНТВУ, 1939. – 720 с.

[6] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.2. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

[7] *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – М.: Мир, 1986. – 216 с.

[8] *Жевержеев В. Ф., Кальницкий Л. А., Сапогов Н. А.* Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: Высшая школа, 1970. – 416 с.

[9] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

[10] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1978. – 832 с.

[11] *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из експонент. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

[12] *Маркушевич А. И.* Избранные главы теории аналитических функций. – М.: Наука, 1976. – 192 с.

[13] *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

[14] *Суетин П. К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. – М.: Наука, 1988. – 384 с.

[15] *Сухорольський М. А.* Розвинення функцій за системою поліномів, біортогональних на замкненому контурі з системою регулярних у нескінченно віддаленій точці функцій // Укр. мат. журн. – 2010. – 62, № 2. – С. 238–254.

[16] *Сухорольський М. А.* Розвинення аналітичних функцій за системами поліномів типу Мелліна // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2005. – № 346. – С. 111–115.

[17] *Сухорольський М. А.* Система похідних від поліномів Чебишова у комплексній площині // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2008. – № 6. – С. 8–15.

[18] *Сухорольський М. А.* Наближення функцій поліномами Лежандра в комплексній площині // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2009. – № 643. – С. 3–14.

[19] *Сухорольський М. А., Достойна В. В.* Розклад аналітичних в крузі функцій в комплексній області за системою похідних многочленів Лежандра // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2010. – № 687. – С. 105–121.

[20] *Сухорольський М. А., Достойна В. В.* Один клас біортогональних систем функцій, які виникають при відшуканні розв'язків рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2012. – 55, № 2. – С. 52–62. – С. 323–326.

[21] *Сухорольський М. А., Костенко І. С., Достойна В. В.* Побудова розв'язків рівнянь з частинними похідними у вигляді контурних інтегралів // Вестник ХНТУ. – 2013.– № 2. – С. 323–326.

СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ, БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ С ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ

Сухорольский М. А., Достойна В. В.

Национальный университет "Львивськa политэхника"
ул. С. Бандеры, 12, 79013, Львов, Украина

Построена система функций, биортогональная с системой функций Бесселя. Установлены условия разложения аналитических функций в ряды по функциям Бесселя. Приведены примеры таких разложений и их применение.

Ключевые слова: функция Бесселя, биортогональная система функций, ассоциированная функция.

2000 MSC: 33E30

УДК: 517.53.57

THE SYSTEMS OF FUNCTIONS, BIORTOGONAL WITH BESSEL FUNCTIONS

Sukhorolsky M. A., Dostojna V. V.

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

The system of functions biortogonal to Bessel system of functions has been constructed. Conditions of expression of analitic functions in series of Bessel functions have been found. Examples of such expressions and their application have been presented.

Key words: Bessel function, biorthogonal system of functions, associated function.

2000 MSC: 33E30

UDK: 517.53.57