ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№804, 2014, с. 97–100

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№804, 2014, p. 97–100

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ МІШАНИХ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ, ЗВ'ЯЗАНИХ З ОПЕРАТОРОМ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Лопотко О. В.

Львівський національний лісотехнічний університет України
вул. Генерала Чупринки 103, 79057, Львів, Україна

(Отримано 30 жовтня 2014 р.)

Доведено теорему про інтегральне зображення змішаних додатно визначених функцій двох змінних. Ця теорема узагальнює теорему про інтегральне зображення експоненціальних функцій.

Ключові слова: інтегральне зображення, додатно визначена функція.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9

У роботах [1, 2] запропоновано метод одержання інтегральних зображень для додатно визначених ядер $K(x,y)\,(x,y\in R^n)$ з використанням власних функцій диференціальних операторів. Застосовуючи цей метод, у монографії [3, глава VIII] доведено теорему 4.2 про інтегральне зображення таких ядер.

За допомогою цієї теореми одержано інтегральні зображення для ядер

$$k(y_1-x_1;y_2-x_2),\ \text{якщо}\ L^{(j)}=i\frac{d}{dx_j}\ (j=1,2);$$

$$\frac{1}{2}[k(x_1+y_1;x_2+y_2)+k(x_1-y_1;x_2-y_2)],\ \text{якщо}$$

$$L^{(j)}=-\frac{d^2}{dx_j^2}\ (j=1,2);$$

$$k(x_1+y_1;x_2+y_2),\ \text{якщо}\ L^{(j)}=\frac{d}{dx_j}\ (j=1,2).$$

У цій статті доведено теорему про інтегральне зображення додатно визначених ядер, якщо

$$L^{(1)}=\frac{d}{dx_1},\ L^{(2)}=\frac{d}{dx_2}+p(x_2),$$

де $p(x_2)$ – неперервна функція.

Інтегральне зображення додатно визначеного ядра, якщо $L=\dfrac{d}{dx_1}+p(x_1)\,(x_1\in R^1)$ доведено у [4].

Означення. *Дійсну неперервну функцію $k(x)\,(x\in R^2)$ достатньо гладку по другій змінній, називатимемо додатно визначеною (д.в.), якщо для довільної фінітної функції виконується нерівність*

$$\int\limits_{R^2}\int\limits_{R^2}K(x,y)u(x)u(y)dxdy\ge 0,\tag{1}$$

де $K(x,y)=\dfrac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)}k(x_1+y_1,x_2+y_2)$,

$$a(x_2)=\exp\int\limits_0^{x_2}p(x_2)dx_2,\ p(x_2)\text{– неперервна функція.}$$

Теорема. *Для того, щоб ядро $K(x,y)$ було додатно визначеним, необхідно і достатньо, щоб функція $k(x_1,x_2)\in C^1(R^1\times R^1)$ мала таке зображення:*

$$k(x_1,x_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda_1x_1}\chi(x_2;\lambda_2)\,d\sigma(\lambda_1,\lambda_2),\tag{2}$$

де $d\sigma(\lambda_1,\lambda_2)$ – невід'ємно скінченна міра; $e^{\lambda_1x_1}$ – розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=\lambda_1u$, а $\chi(x_2;\lambda_2)$ – розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+p(x_2)=\lambda_2u$, яке задовольняє умову $\chi(0;\lambda_2)=1$.

□ *Доведення. Необхідність.* За ядром $K(x,y)$ $(x,y\in R^2)$ введемо квазіскалярний добуток у просторі $L_2(R^2;dx)$

$$<u,v>_{H_k}=\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1}K(x,y)u(y)v(x)dxdy,\ u,v\in C_0^\infty(R^2).\tag{3}$$

Після проведення факторизації й поповнення відносно (3) одержимо гільбертовий простір H_k.

Позначимо через A_j, $j=1,2$, мінімальний оператор у просторі $H_0=L_2(R^2;dx)$, який відповідає виразу $L^{(1)}=\dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $L^{(2)}=\dfrac{\partial}{\partial x_2}+p(x_2)$. Кожний із операторів A_j, $j=1,2$, допускає продовження оснащення з $D=C_0^\infty(R^2)$. Звуження A_j, $j=1,2$, на D буде збігатися з відображенням $u\to L^{(j)+}u$, $u\in C_0^\infty(R^2)$, у просторі H_k. За оператори B_j, $j=1,2$ (див. [3, с. 702, 703], VIII), можна прийняти оператори $u\to L^{(j)+}u$, $u\in C_0^\infty(R^2)$, які діють у просторі $H_+^{(j)}=L_2\left(R^j;p^{(j)}(x_j)dx_j\right)$, де $p^{(j)}$ вибираємо так, щоб $\int\limits_{R^2}\dfrac{K(x,x)}{p(x)}dx<\infty$. Функцію операторів C_j в H_0 використовуватимуть оператори вигляду $u\to L^{(j)+}u$, де $u\in D(C_1)=C_0^\infty(R^1)\otimes H_+^{(1)}$ і

$D(C_2) = H_+^{(1)} \otimes C_0^\infty(R^1)$. Оскільки комутативність $K(x,y)$ і A_j еквівалентна ермітовості C_j в H_k, то можна обмежитись перевіркою ермітовості C_j в H_k, тобто рівності

$$< L^{(j)+}u, v >=< u, L^{(j)+}v >,\ u,v \in C_0^\infty(R^2),\ j = 1,2.$$

Ця рівність перевіряється стандартним способом.

Тепер звузимо C^1 на $C_0^\infty(R^1) \otimes w_2$ і покажемо, що для будь-якого $w_2 \in H_+^{(2)}$ замикання цього звуження буде самоспряженим у $H_{k,w_2}^{(1)}$ – поповнення $H_0^{(1)}$ відносно скалярного добутку

$$< u_1, v_1 >_{w_2} =< u_1 \otimes w_2, v_1 \otimes w_2 >=$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} k(x_1+y_1, x_2+y_2)\times$$
$$\times u_1(x_1)v_1(y_1)w_2(x_2)w_2(y_2)\,dx_1dy_1dx_2dy_2.$$

Якщо ввести допоміжну функцію

$$k_{w_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} k(t, x_2+y_2)\,dx_2dy_2,$$

то $< u_1, v_1 >_{w_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k_{w_2}(x_1+y_1)u_1(x_1)v_1(y_1)\,dx_1dy_1$.

Оскільки $k_{w_2}(t)$ – функція експоненціального типу, то згідно з теоремою 3.17 [3, гл. VIII] слідує самоспряженість замикання оператора C_1 у просторі $H_{k,w_2}^{(1)}$. Тоді згідно з теоремою 2.6 [3, гл. VIII] існує самоспряжене розширення оператора C_2 комутуюче із замиканням C_1.

Тому, згідно з теоремою 4.2 [3, гл. VIII], можемо записати таке інтегральне зображення

$$K(x,y) = \int_{R^2}\int_{R^2} e^{\lambda_1(x_1+y_1)}\chi(x_2;\lambda_2)\chi(y_2;\lambda_2)\,d\sigma(\lambda_1,\lambda_2), \tag{4}$$

де $e^{\lambda_1 x_1}$ – розв'язок рівняння $L_{x_1}^{(1)} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \lambda_1 u$, а $\chi(x_2;\lambda_2)$ – розв'язок рівняння $L_{x_2}^{(2)} = \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + p(x_2)u = \lambda_2 u$. Якщо прийняти у (4) $y_1 = 0$; $y_2 = 0$ одержимо (2). Необхідність доведено.

Достатність. Маємо інтегральне зображення (2) і ядро $K(x,y) = \dfrac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)}k(x_1+y_1, x_2+y_2)$. Покажемо, що це ядро додатно визначено. Для цього спочатку введемо оператор зсуву. Нехай $f(x) \in C^\infty(R^2)$, позначимо через $u(x,y)$ розв'язок задачі Коші

$$L_{x_j}^{(j)}u = L_{y_j}^{(j)}u,\ (j = 1,2) \tag{5}$$

$$u(x_j, 0) = f(x_j). \tag{6}$$

Легко перевірити, що розв'язок задачі (5)–(6) матиме такий вигляд:

$$u(x,y) = \frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} f(x_1+y_1, x_2+y_2), \tag{7}$$

де $a(x_2) = \exp\int_0^{x_2} p(x_2)dx_2$.

Дійсно, якщо $j = 1$ маємо

$$L_{x_1}^{(1)}u = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} f(x_1+y_1, x_2+y_2) =$$
$$= \frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)}\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1+y_1, x_2+y_2) =$$
$$= \frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)}\frac{\partial}{\partial y_1} f(x_1+y_1, x_2+y_2) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} f(x_1+y_1, x_2+y_2) = L_{y_1}^{(1)}u;$$

якщо $j = 2$ маємо

$$L_{x_2}^{(2)}u = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} f(x_1+y_1, x_2+y_2)+$$
$$+p(x_2)\frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} f(x_1+y_1, x_2+y_2) =$$
$$= \Big\{\Big[a'_{x_2}(x_2+y_2)f(x_1+y_1, x_2+y_2)+$$
$$+f'_{x_2}(x_1+y_1, x_2+y_2)a(x_2+y_2)\Big]a(x_2)a(y_2)-$$
$$-a(x_2+y_2)f(x_1+y_1, x_2+y_2)a'_{x_2}(x_2)a(y_2)\Big\}\times$$
$$\frac{1}{(a(x_2)a(y_2))^2} + p(x_2)\frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} f(x_1+y_1, x_2+y_2) =$$
$$= \Big\{\Big[a'_{y_2}(x_2+y_2)f(x_1+y_1, x_2+y_2)+$$
$$+f'_{y_2}(x_1+y_1, x_2+y_2)a(x_2+y_2)\Big]a(x_2)a(y_2)-$$
$$-a(x_2+y_2)f(x_1+y_1, x_2+y_2)a(y_2)a(x_2)p(x_2)\Big\}\times$$
$$\frac{1}{(a(x_2)a(y_2))^2} + p(x_2)\frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} f(x_1+y_1, x_2+y_2) =$$
$$= \Big\{\Big[a'_{y_2}(x_2+y_2)f(x_1+y_1, x_2+y_2)+$$
$$+f'_{y_2}(x_1+y_1, x_2+y_2)a(x_2+y_2)\Big]a(x_2)a(y_2)-$$
$$-a(x_2+y_2)f(x_1+y_1, x_2+y_2)a(x_2)a'_{y_2}(y_2)\Big\}\frac{1}{(a(x_2)a(y_2))^2}+$$
$$+p(x_2)\frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} f(x_1+y_1, x_2+y_2) = L_{y_2}^{(2)}u.$$

Введемо тепер оператор зсуву T_y, прийнявши

$$(T_y f)(x) = u(x,y),\ (x,y \in R^2). \tag{8}$$

Застосовуючи оператор T_y до обох частин інтегрального зображення (2), одержимо

$$(T_y k)(x) = \int_{R^1}\int_{R^1} T_y e^{\lambda_1 x_1}\chi(x_2;\lambda_2)\,d\sigma(\lambda_1,\lambda_2). \tag{9}$$

Оскільки завдяки (7) і (8)

$$(T_y k)(x) = \frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} k(x_1+y_1, x_2+y_2),$$

а $\mathrm{T_y e^{\lambda_1 x_1}\chi(x_2;\lambda_2) = \dfrac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} e^{\lambda_1(x_1+y_1)}\chi(x_2+y_2;\lambda_2) =}$

$$= \frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} e^{\lambda_1(x_1+y_1)} e^{\lambda_2(x_2+y_2) - \int\limits_0^{x_2+y_2} p(x_2+y_2)d(x_2+y_2)}$$

$$= \frac{e^{\lambda_1(x_1+y_1)\lambda_2(x_2+y_2)}}{a(x_1)a(y_1)} = e^{\lambda_1 x_1}\chi(x_2;\lambda_2)e^{\lambda_1 y_1}\chi(y_2;\lambda_2),$$

де $e^{\lambda_1 x_1}$ є розв'язком рівняння $\dfrac{du}{dx_1} = \lambda_1 u$, а $\chi(x_2;\lambda_2) = e^{\lambda_2 x_2 - \int_0^{x_2} p(x_2)dx_2}$ є розв'язок рівняння $\dfrac{du}{dx_2} + p(x_2)u = \lambda_2 u$.

Тому рівність (9) набуде вигляду

$$\frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} k(x_1+y_1, x_2+y_2) =$$

$$= \int\limits_{R^2}\int\limits_{R^2} e^{\lambda_1(x_1+y_1)}\chi(x_2;\lambda_2)\chi(y_2;\lambda_2)\, d\sigma(\lambda_1,\lambda_2). \quad (10)$$

За допомогою (10) перевіряємо умову (1).

Дійсно, із (10) випливає що

$$\frac{a(x_2+y_2)}{a(x_2)a(y_2)} k(x_1+y_1, x_2+y_2)\xi_1\xi_2 =$$

$$= \int\limits_{R^2}\int\limits_{R^2} e^{\lambda_1(x_1+y_1)}\chi(x_2;\lambda_2)\chi(y_2;\lambda_2)\, d\sigma(\lambda_1,\lambda_2)\xi_1\xi_2 =$$

$$= \int\limits_{R^2}\int\limits_{R^2} e^{\lambda_1(x_1+y_1)}\chi(x_2;\lambda_2)\chi(y_2;\lambda_2)\xi_1\xi_2\, d\sigma(\lambda_1,\lambda_2) \geq 0.$$

А ця умова еквівалентна умові (1).

Теорему доведено. ■

Зауваження 1. Якщо в інтегральному зображенні (2) $x_1 = 0$, то отримаємо зображення (2) з [4, с. 78].

Зауваження 2. Якщо в інтегральному зображенні (2) $x_2 = 0$, то отримаємо зображення (3.99) з [3, с. 701].

Література

[1] *Березанский Ю. М.* О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов // УМЖ. – 1959. – № 11, 1. – С. 16–24.

[2] *Березанский Ю. М.* Одно обобщение многомерной теоремы Бохнера // ДАН СССР. – 1961. – Т. 136, № 5. – С. 1011–1014.

[3] *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[4] *Лопотко О. В.* Інтегральне зображення додатно визначених функцій однієї змінної зв'язаних з оператором першого порядку // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2011. – № 718. – С. 78–80.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СМЕШАННЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАТОРОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Лопотко О. В.

Национальный лесотехнический университет Украины
ул. Генерала Чупрынки, 103, Львов, 79057, Украина

Доказана теорема об интегральном представлении смешанных положительно определённых функций двух переменных. Это представление обобщает интегральное представление экспоненциальных функций.

Ключевые слова: интегральное представление, положительно определённая функция.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9

INTEGRAL REPRESENTATION FOR MIXED POSITIVELY DEFINITE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES ASSOCIATED WITH AN OPERATOR OF FIRST ORDER

Lopotko O. V.

Ukrainian National Forestry University of Lviv
103 General Chuprinka Str., 79057, Lviv, Ukraine

Integral representation is obtained for mixed positively definite functions of two variables. This representation is the generalization of integral representation for exponential convex functions.

Key words: integral representation, positively definite function

2000 MSC: 34860

UDK: 517.9