

ЩЕ РАЗ ПРО ЗУБ ПЛИННОСТІ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ УМОВИ ПЛАСТИЧНОСТІ

Андрусик Я. Ф.

*Національний університет “Львівська політехніка”
 вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна*

(Отримано 17 жовтня 2014 р.)

Запропоновано електромеханічну модель ідеального пружно-в'язко-пластичного тіла, що описує явище запізнення плинності. Сформульовано умову пластичності для встановлення моменту переходу матеріалу в стан плинності в результаті дії навантаження, що перевищує граничний рівень пружного стану у разі статичного деформування. Отримано динамічний критерій пластичності для пластичного деформування після “перевантаження”. Порівняно результати теоретичних розрахунків з експериментальними даними з визначення залежності динамічної границі плинності матеріалу від швидкості деформування. Розраховано діаграми одновісного стиску металу, що має властивість появи зуба плинності, для широкого діапазону швидкостей деформації.

Ключові слова: пластичність, зуб плинності, статична та динамічна границя плинності, динамічне навантаження, динамічний критерій пластичності.

2000 MSC: 60J10

УДК: 539.374.376

Вступ

Велика кількість теоретичних та експериментальних досліджень показують, що пластичну деформацію металів необхідно розглядати як процес, котрий відбувається в часі. У наявних класичних варіантах теорій пластичності [1] пластичний плин матеріалу не зв'язується з впливом часу. Для тих задач механіки деформівного твердого тіла, де необхідно враховувати часові ефекти, використовують теорії повзучості, теорії пружно-в'язко-пластичності, теорії в'язкопружності. Процеси повзучості матеріалу, в яких враховується історія навантаження, описують за допомогою спадкових теорій повзучості.

Прагнення найповніше відобразити закономірності деформування різних матеріалів у часі, призвело до розроблення нелінійних варіантів теорії спадковості [2]. Проте в багатьох технологічних задачах термомеханічного оброблення металів, розділення деформації на пластичну та в'язку частини і застосування до однієї з них теорії пластичності, а до іншої – теорії повзучості неправомірне, хоча фізична природа обох деформацій є однаковою. Тому виникла необхідність створення математичної теорії непружної деформації твердих тіл, яка єдиними рівняннями описує як “миттєву” пластичну деформацію, так і невстановлену та лінійну повзучість [3,4]. При цьому деформація не ділиться на пластичну і в'язку частину, а розглядається як незворотна, що протікає в часі.

Оскільки використання таких теорій під час роз-

рахунків елементів конструкцій та розв'язання хвильових задач теорії пластичності для матеріалів, чутливих до швидкості деформування, пов'язано з великими математичними труднощами, тому виникає необхідність пошуку шляхів спрощення відповідних визначальних співвідношень.

У цій роботі здійснено спробу надати принцип побудови простої електромеханічної моделі пластичного середовища, що враховує вплив на вигляд динамічної діаграми деформування швидкості деформації. Особливу ефективність створеної моделі можна продемонструвати під час вивчення хвильових процесів у пластичних середовищах.

Класичний підхід під час дослідження поширення пружно-пластичних хвиль полягає в тому, що для достатньо високих швидкостей деформації, діаграма деформування стає мало чутливою до зміни швидкості. Тому приймається, що динамічна діаграма не залежить від швидкості деформування. Вона визначатиме залежність між напруженням і деформацією за тих швидкостей, які фактично реалізуються при поширенні пластичних хвиль [5]. Проте здебільшого швидкість деформації не можна вважати постійною навіть приблизно. До таких випадків належить імпульсне навантаження або випробування матеріалів під дією постійного, миттєво прикладеного навантаження [6].

Для деяких хвильових задач пластичності використовують моделі пластичних середовищ, чутливих до швидкості деформації [7, 8]. Але в цих задачах не

враховується така характерна особливість поведінки маловуглецевих сталей в умовах динамічного навантаження, яка називається запізненням плинності. У тих випадках, коли під час дослідження хвильових процесів у матеріалах враховується затримка плинності [11, 12], приймається, що перехід з пружного стану в пластичний відбувається миттєво, після виконання деякої функціональної умови. Причому визначальні рівняння пластичності описують пружно-в'язко-пластичне середовище, для якого враховують вплив швидкості деформування на нижню границю плинності.

У запропонованій електромеханічній моделі середовища перехід від верхньої до нижньої границі плинності відбувається не миттєво, а становить певний процес, що відбувається у часі. Врахування такої особливості в поведінці матеріалу на спадаючій ділянці діаграми деформування між верхньою та нижньою границею плинності може виявити певні нові ефекти під час дослідження поширення пружно-пластичних хвиль. Для простоти приймається, що матеріал є ідеально пластичним. У разі необхідності цю модель можна узагальнити на випадок матеріалу, що зміцнюється. Оскільки у цій роботі найбільше увага акцентується на явищі запізнення плинності, тому для обґрунтування побудованої моделі розглянемо суть механізму цього явища та його пояснення з погляду фізики металів.

I. Опис явища появи зуба плинності та пояснення до побудови структурної схеми електромеханічної моделі пластичного матеріалу

У разі короткочасної дії навантаження, що спричиняє напруження, які перевищують статичну границю плинності, матеріал може перебувати деякий не тривалий час у пружному стані. Під статичною границею плинності розуміється така величина напруження, за досягнення якого матеріал переходить у пластичний стан [5]. Експериментальні дослідження на звичайному стандартному обладнанні показують, що у разі статичного навантаження, для певного діапазону швидкостей деформування, статична границя плинності є постійна [13]. Проміжок часу, впродовж якого “перевантажений” матеріал знаходиться в пружному стані, називається часом запізнення плинності. Такий різкий перехід матеріалу від пружного до пластичного стану на діаграмі деформування називається зубом плинності.

Явище затримки плинності різні автори пояснюють по-різному [10]. Існують фізичні теорії (Коттрелл), які пояснюють цей ефект тим, що у вуглецевих сталях дислокації блокуються розчиненими атомами вуглецю. У разі дії напруження і за наявності теплових флуктуацій потрібно деякий час для того, щоб дислокації вирвалися з цього оточення, перемістилися на деяку відстань, зробивши певний внесок у макроскопічну пластичну деформацію. Існує інший

погляд, вірніше по-іншому трактується дислокаційне пояснення причини виникнення зуба плинності [3, 4]. У реальних металах існують або виникають за зовнішніх навантажень спотворення (дефекти) ідеальної кристалічної структури. Наявність цих дефектів призводить до зростання опору пластичному деформуванню. Зі збільшенням швидкості деформування, зростає рівень локальних спотворень кристалічної решітки, а отже, збільшується напруження, за якого матеріал переходить у пластичний стан та зменшується час перебування у “перенапруженому” стані. Для узагальнення всіх цих явищ відкинемо дислокаційну термінологію і побудуємо просту електромеханічну модель тіла, за аналогією з відомими моделями Фойгта, Максвелла, Шведова–Бінгама, яка дає змогу якісно відтворити і математично описати появу зуба плинності для ідеально пластичного матеріалу.

Структурна схема та з'єднання функціональних елементів моделі такого середовища показана на рис. 1. Механічний вузол – 1 являє собою циліндр, у якому рухається поршень у рідині. Перпендикулярно до штока цього поршня кріпляться соленоїдні магніти – 2 з рухомими сердечниками, на кінці яких розміщені гальмівні колодки. Обмотки соленоїдів одночасно виконують функцію пружин, що притискають колодки до стінок циліндра. Величина притискуєчої сили, а отже, сила тертя між поверхнями, що труться, залежатиме від величини струму в обмотках соленоїдів. Цей вузол загалом моделює в'язко-пластичне середовище, у якого границя плинності залежатиме від швидкості пружної деформації.

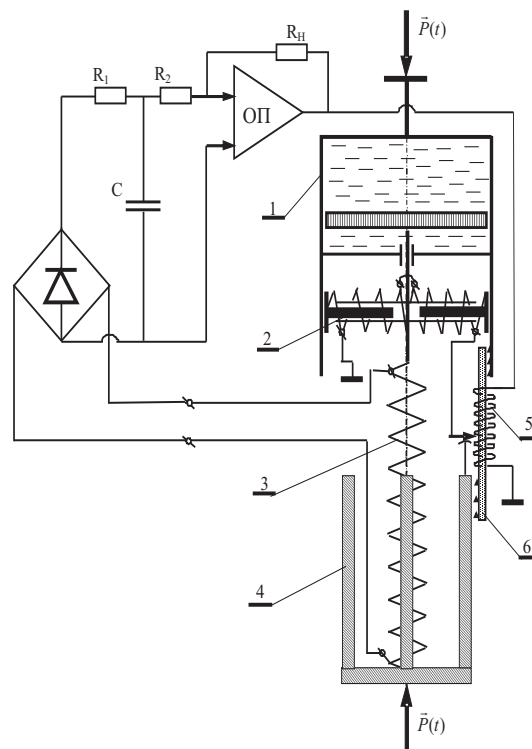


Рис. 1. Принципова схема електромеханічної моделі ідеального пружно-в'язко-пластичного тіла

У разі статичного навантаження, коли в обмотках соленоїдів струм відсутній, пружини – обмотки соленоїдів притискуватимуть гальмівні колодки до стінок циліндра постійною силою. У такому стані, для приведення в рух штока з поршнем, а отже, появи пластичних деформацій, необхідно прикласти напруження σ_s . Прийемо за σ_s – статичну границю плину при однобічному розтягу–стиску.

Струм в обмотках соленоїда виникає тоді, коли швидкість пружної складової деформації більша за швидкість деформування у разі статичного навантаження. Пружний елемент моделі на рис. 1 зображено пружиною 3, яка з'єднана зі штоком поршня і поміщена в постійне магнітне поле між стінками і центральним сердечником стакану 4. Причому пружина одночасно є котушкою індуктивності, в якій виникає ЕРС електромагнітної індукції. Поєднання взаємодії всіх елементів електромеханічної моделі, дає змогу описати стан пластичного середовища як до початку виникнення зуба плинності, так і після, коли відбувається пластичне деформування матеріалу.

Розглядаючи всі процеси, які виникають під час навантаження лінійного елемента моделі, розпочнемо запис визначаючих рівнянь для випадку складного напруженого стану. Нехай до елемента моделі прикладається стискаюча або розтягуюча сила $\vec{P}(t)$ (рис. 1). Під дією цієї сили виникає деформація, що змінюється з швидкістю, більшою за швидкість під час статичного навантаження. На першому етапі навантаження має місце тільки пружна деформація пружини. В її витках індукується ЕРС, величина якої пропорційна до інтенсивності швидкостей пружних деформацій. Різниця потенціалів з кінців пружини – котушки прикладається до входу діодного містка, на виході якого виникатиме електрична напруга, що не залежить від напрямку деформації. Ця напруга попадає на вхід операційного підсилювача (ОП) з нелінійним опором R_H . Використання електронного пристрою (ОП) в моделі – це вимушений захід, щоб проілюструвати необхідність здійснення над механічними величинами операції піднесення до степеня $(1/n)$, тобто отримати таку вихідну величину $k \left(\frac{3}{2}\dot{\epsilon}_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^e\right)^{1/n}$, де $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ – компоненти девіатора швидкостей пружних деформацій, k та n – сталі матеріалу.

Напруга виходу (ОП) прикладається до нелінійного потенціометричного дільника (5) з передавальним коефіцієнтом, що змінюється залежно від величини перевищення інтенсивності напруження над статичною границею плину σ_s . В остаточному підсумку передавальний коефіцієнт набуває вигляду: $\sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}} - 1$, де S_{ij} – компоненти девіатора напружень. Зміна коефіцієнта здійснюється за рахунок переміщення повзуна потенціометра штовхачем, з'єднаним з корпусом стакану 4 (рис. 1). На схемі показано, що переміщення повзуна відбувається під дією стискаючої сили. У разі прикладання сили розтягу, $\vec{P}(t)$, обмотка потенціометричного дільника буде зображена симетрично повернутою відносно своєї се-

редини. Результуюча різниця потенціалів з дільника прикладається до обмоток соленоїдів – пружин, які збільшують притискувальну силу гальмівних колодок. Це призводить до збільшення величини динамічної границі пружності матеріалу. Проте, коли закінчаться певні процеси, пов'язані з формуванням відповідної структури матеріалу, навантажений елемент переходить у пластичний стан і запускається весь механізм пластичної деформації. У результаті зменшуватиметься сила тертя між гальмівними колодками та стінками циліндра 1 і пластичне деформування відбуватиметься за зменшення або збільшення величини напруження. У моделі передбачено, що коли сформуються відповідні умови для виникнення пластичного плину, вони залишаються незмінними і після переходу матеріалу в пластичний стан. Це досягається за рахунок поступального переміщення зубчатої рейки 6, на якій кріпиться дільник 5, до його зачеплення зі стаканом 4. Після такого зміщення отримаємо, що передавальний коефіцієнт дільника 5 залишатиметься постійним під час деформування матеріалу в пластичній області. Зауважимо, що коли матеріал перебуває в пружному стані, рейка 6 з'єднана з корпусом циліндра механічного вузла 1. На рис. 1 пристрій, який надає необхідне поступальне зміщення рейці 6, не показано.

Описана електромеханічна модель ідеального пружно-в'язко-пластичного середовища дає змогу адекватно описати всі ефекти поведінки матеріалу, пов'язані з виникненням затримки плинності для складного напруженого стану.

II. Побудова визначальних рівнянь пластичності на основі електромеханічної моделі

На основі структурної схеми моделі рис. 1 та пояснення до неї, отримаємо динамічну умову початку пластичності. Ґрунтуючись на ідеях робіт [14–16], запишемо:

$$S_{ij}S_{ij} = \frac{2}{3} \left[\sigma_s + k \left(\frac{3}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^e \right)^{1/n} \sqrt{\frac{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}{\sigma_s} - 1} \right]^2. \quad (1)$$

Розділивши рівняння (1) на два множники і прирівнюючи до нуля один з них, маємо:

$$\sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} - \sigma_s = 0. \quad (2)$$

Це рівняння, аналогічне до умови пластичності Мізеса.

Відповідно з другого множника впливає така форма критерію динамічної границі плинності матеріалу:

$$\sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} = \sigma_s + \frac{k^2}{\sigma_s} \left(\frac{3}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^e \dot{\epsilon}_{ij}^e \right)^{2/n}. \quad (3)$$

З цього співвідношення можна встановити умову переходу матеріалу в пластичний стан залежно від швидкості деформування, або час затримки плинності у разі раптового навантаження, коли $S_{ij}S_{ij} > \frac{2}{3}\sigma_S^2$.

Визначимо динамічну умову пластичності, коли середовище переходить у пластичний стан за певної швидкості пружних деформацій. Для початку такого переходу, враховуючи (3), маємо:

$$\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}} - \sigma_S} = \frac{k}{\sqrt{\sigma_S}} \left(\frac{3}{2}\dot{\epsilon}_{ij}^{e*}\dot{\epsilon}_{ij}^{e*} \right)^{1/n} = const, \quad (4)$$

де $\dot{\epsilon}_{ij}^{e*}$ – компоненти девіатора швидкостей пружних деформацій, що відповідають початку переходу матеріалу в стан пластичності.

Підставляючи (4) в (1), та враховуючи в'язкі властивості середовища і пояснення до рис. 1, отримуємо такий вираз динамічного критерію пластичності у стані плину матеріалу:

$$\left(S_{ij} - \frac{2}{3}\mu\dot{\epsilon}_{ij}^p \right) \left(S_{ij} - \frac{2}{3}\mu\dot{\epsilon}_{ij}^p \right) = \frac{2}{3} \left[\sigma_S + \frac{k^2}{\sigma_S} \left(\frac{3}{2}\dot{\epsilon}_{ij}^e\dot{\epsilon}_{ij}^e \right)^{1/n} \left(\frac{3}{2}\dot{\epsilon}_{ij}^{e*}\dot{\epsilon}_{ij}^{e*} \right)^{1/n} \right]^2, \quad (5)$$

де $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ – компоненти девіатора швидкостей пружних деформацій у пластичній області; μ – коефіцієнт в'язкості.

На основі асоційованого закону плину, компоненти тензора швидкостей пластичних деформацій визначаються за формулою [1]:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \psi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (6)$$

де ψ – деякий скалярний множник; σ_{ij} – компоненти тензора напружень; f – функція пластичності, яка в даному випадку записується у вигляді (5).

Враховуючи пластичну нестискуваність матеріалу, після підстановки (5) в (6), отримуємо:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = 2\psi \left(S_{ij} - \frac{2}{3}\mu\dot{\epsilon}_{ij}^p \right). \quad (7)$$

Розв'язуючи рівняння (7) відносно $\dot{\epsilon}_{ij}^p$, маємо

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{2\psi S_{ij}}{1 + \frac{4}{3}\mu\psi}. \quad (8)$$

Після виключення із співвідношень (5) і (8) величини $\dot{\epsilon}_{ij}^p$, отримуємо

$$2\psi = \frac{3}{2\mu} \left[\frac{\sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}}}{\sigma_S + \frac{k^2}{\sigma_S} \left(\frac{3}{2}\dot{\epsilon}_{ij}^e\dot{\epsilon}_{ij}^e \right)^{1/n} \left(\frac{3}{2}\dot{\epsilon}_{ij}^{e*}\dot{\epsilon}_{ij}^{e*} \right)^{1/n}} - 1 \right]. \quad (9)$$

Підставляючи (9) у (8), одержимо

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2\mu} \left[1 - \frac{\sigma_S + \frac{k^2}{\sigma_S} \left(\frac{3}{2}\dot{\epsilon}_{ij}^e\dot{\epsilon}_{ij}^e \right)^{1/n} \left(\frac{3}{2}\dot{\epsilon}_{ij}^{e*}\dot{\epsilon}_{ij}^{e*} \right)^{1/n}}{\sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}}} \right] S_{ij}. \quad (10)$$

Отримані співвідношення (10), разом з рівняннями закону Гука, утворюють систему визначальних рівнянь, які дають змогу визначити напружено-деформівний стан пластичного матеріалу, після затримки плинності.

III. Аналітичне дослідження залежності динамічної границі плинності матеріалу від швидкості деформування для одновісного розтягу

Для отримання необхідних співвідношень використаємо критерій (3). Нагадаємо, що девіатори напружень та швидкостей деформацій мають такі компоненти [1]:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}, \quad \dot{\epsilon}_{ij}^e = \dot{\epsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3}\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk}^e, \quad (11)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера; $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ – компоненти тензора швидкостей пружних деформацій.

Для випадку одновісного розтягу, коли $\sigma_{xx} \neq 0$, дістанемо: $S_{xx} = \frac{2}{3}\sigma_{xx}$, $S_{yy} = S_{zz} = -\frac{1}{3}\sigma_{xx}$.

Отже, для $S_{ij}S_{ij}$ маємо:

$$S_{ij}S_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_{xx}^2. \quad (12)$$

Аналогічно для компонент $\dot{\epsilon}_{ij}^e$, запишемо:

$$\dot{\epsilon}_{xx}^e = \frac{2}{3}(1+\nu)\dot{\epsilon}_{xx}^e, \quad \dot{\epsilon}_{yy}^e = \dot{\epsilon}_{zz}^e = -\frac{1}{3}(1+\nu)\dot{\epsilon}_{xx}^e,$$

де ν – коефіцієнт Пуассона.

Тому для $\dot{\epsilon}_{ij}^e\dot{\epsilon}_{ij}^e$, отримуємо:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{2}{3}(1+\nu)^2(\dot{\epsilon}_{xx}^e)^2. \quad (13)$$

Підставляючи (12) і (13) в (3), та зробивши заміну $\sigma_{xx} = \sigma_d$ і $\dot{\epsilon}_{xx}^e = \dot{\epsilon}_{xx}$, дістанемо:

$$\sigma_d = \sigma_S + \frac{k^2}{\sigma_S}(1+\nu)^{4/n}(\dot{\epsilon}_{xx})^{4/n}. \quad (14)$$

На основі формули (14) побудована розрахункова крива залежності динамічної границі плину σ_d від швидкості деформації розтягу $\dot{\epsilon}_{xx}$ (рис. 2).

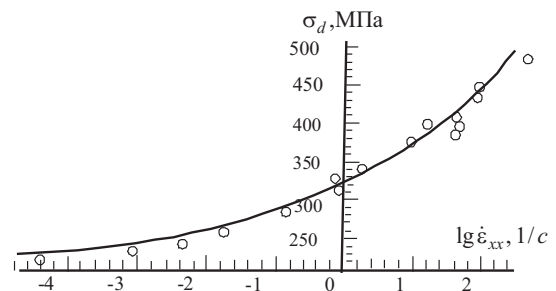


Рис. 2. Залежність границі плину від швидкості розтягу. Крива ліній – розрахунок, кружки – експеримент

Розрахунки проведені для таких сталих матеріалу: $\sigma_S=215$ МПа, $k=150$ МПа $\cdot c^{1/12}$, $\nu=0,28$, $n=24$.

З рис. 2 бачимо, що спостерігається добра відповідність теоретичного результату з експериментальними даними [17].

IV. Побудова динамічної діаграми стиску матеріалу, який має властивість виникнення зуба плинності

Розглянемо одновісний стиск зразка, що переходить у пластичний стан після виконання умови (3). Для простоти аналізу приймемо додатний знак стискаючих напружень та деформацій. Діаграма деформування в пластичній області будується на основі отриманого співвідношення (10). Враховуючи вирази (11), (12) та (13), після перетворень, отримаємо:

$$\dot{\varepsilon}_{xx}^p = \frac{1}{\mu} \left[\sigma_{xx} - \sigma_S - \frac{k^2}{\sigma_S} (1+\nu)^{4/n} (\dot{\varepsilon}_{xx}^e)^{2/n} (\dot{\varepsilon}_{xx}^{e*})^{2/n} \right], \quad (15)$$

де σ_{xx} , $\dot{\varepsilon}_{xx}^{e*}$, $\dot{\varepsilon}_{xx}^e$, $\dot{\varepsilon}_{xx}^p$ – компоненти тензорів напружень, швидкостей пружних деформацій у пружній та пластичній областях та швидкостей пластичних деформацій, вздовж осі Ox .

Деформації можуть бути розділені на пружну і пластичну частини, тому повну складову деформації та її швидкість у напрямку осі Ox , подамо так:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{xx}^p, \quad \dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\varepsilon}_{xx}^e + \dot{\varepsilon}_{xx}^p. \quad (16)$$

Врахуємо, що для пружних складових деформації справедливий закон Гука, тому маємо:

$$\dot{\varepsilon}_{xx}^e = \frac{\dot{\sigma}_{xx}}{E}, \quad (17)$$

де E – модуль Юнга; $\dot{\sigma}_{xx}$ – швидкість зміни компоненти напруження вздовж осі Ox .

На підставі (16), (17) з (15) після перетворень одержимо

$$\frac{k^2(1+\nu)^{4/n} (\dot{\varepsilon}_{xx}^{e*})^{2/n}}{\sigma_S E^{2/n}} (\dot{\sigma}_{xx})^{2/n} - \frac{\mu}{E} \dot{\sigma}_{xx} - \sigma_{xx} + \sigma_S + \mu \dot{\varepsilon}_{xx} = 0. \quad (18)$$

Розглянемо випадок такого навантаження, коли на розривній машині задається постійна швидкість деформації і в пружній, і в пластичній областях, тобто:

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\varepsilon}_{xx}^{e*} = \dot{\varepsilon}_{xx}^* = const. \quad (19)$$

З врахуванням (19), для відповідних коефіцієнтів та елементів (18), зробимо такі позначення:

$$\frac{k^2(1+\nu)^{4/n} (\dot{\varepsilon}_{xx}^*)^{2/n}}{\sigma_S E^{2/n}} = A, \quad -\frac{\mu}{E} = B, \quad \sigma_S + \mu \dot{\varepsilon}_{xx}^* = D.$$

Тоді для (18), запишемо:

$$A(\dot{\sigma}_{xx})^{2/n} + B\dot{\sigma}_{xx} - \sigma_{xx} + D = 0. \quad (20)$$

Виконаємо заміну $\sigma_{xx} = Z + D$, після чого рівняння (20) набуває вигляду:

$$A(\dot{Z})^{2/n} + B\dot{Z} - Z = 0. \quad (21)$$

Отримаємо розв'язок цього рівняння, коли $n=24$. Це значення сталої матеріалу, взятої з опису експерименту [17] (рис. 2). У результаті для (21), одержимо

$$A|\dot{Z}|^{1/12} + B\dot{Z} - Z = 0. \quad (22)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (22) в параметричному вигляді. Введемо параметр $\dot{Z} = \omega$. Тоді маємо:

$$A|\omega|^{1/12} + B\omega = Z. \quad (23)$$

Диференціюючи рівняння (23), отримаємо:

$$\omega = \left(\frac{A}{12} |\omega|^{-11/12} \text{sign}(\omega) + B \right) \dot{\omega}. \quad (24)$$

Запишемо це рівняння в такому вигляді:

$$\frac{dt}{d\omega} = \left[\frac{B}{\omega} + \frac{A}{12} \frac{|\omega|^{-11/12}}{\omega} \text{sign}(\omega) \right]. \quad (25)$$

Після інтегрування (25), знаходимо загальний інтеграл

$$t = B \ln |\omega| - \frac{A}{11} |\omega|^{-11/12} \text{sign}(\omega) + C. \quad (26)$$

Повертаючись до рівняння (23), після виконання зворотної заміни, запишемо:

$$\sigma_{xx} = A|\omega|^{1/12} + B\omega + \mu \dot{\varepsilon}_{xx}^* + \sigma_S. \quad (27)$$

Співвідношення (26) та (27) є загальним розв'язком диференціального рівняння (20) в параметричному вигляді.

Для визначення сталої інтегрування рівняння (26) знаходимо ω_0 на границі переходу з пружної в пластичну область. Для точки переходу має місце неперервність за напруженнями, тому прирівнюючи праві частини рівнянь (14) та (27), отримаємо $\omega_0 = E \dot{\varepsilon}_{xx}^*$. Оскільки плинність часу однобічна, тобто $\frac{dt}{d\omega} > 0$, то, підставляючи початкові умови в рівняння (26), отримуємо таке значення сталої інтегрування:

$$C = -\frac{A}{11} |\omega_0|^{-11/12} - B \ln |\omega_0|. \quad (28)$$

Підставляючи (28) в (26), одержимо

$$t = \frac{A}{11} \left(|\omega|^{-11/12} - |\omega_0|^{-11/12} \right) + B \ln \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right|. \quad (29)$$

Для побудови динамічної діаграми деформування матеріалу, що має властивість затримки плинності, до раніше знайдених сталих матеріалу приймемо ще такі значення механічних характеристик: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = 1,0 \cdot 10^6$ Па·с.

Після підстановки всіх числових значень, рівняння (27) і (29) набувають вигляду:

$$t = 1,129 \cdot 10^6 \left(\omega^{-\frac{11}{12}} - \omega_0^{-\frac{11}{12}} \right) - 4,762 \cdot 10^{-6} \ln \frac{\omega}{\omega_0},$$

$$\sigma_{xx} = 12,42 \cdot 10^6 (\omega \dot{\epsilon}_{xx}^*)^{1/12} - 4,762 \cdot 10^{-6} \omega + 10^6 \dot{\epsilon}_{xx}^* + 215 \cdot 10^6, \quad \omega \in [\omega_0, 0]. \quad (30)$$

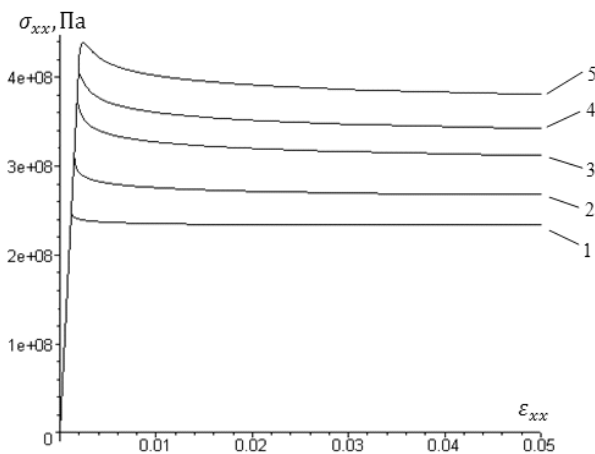


Рис. 3. Теоретичні діаграми деформування матеріалу для різних швидкостей деформації:

$$1 - \dot{\epsilon}_{xx}^* = 0,001 \text{ 1/c}; \quad 2 - \dot{\epsilon}_{xx}^* = 0,5 \text{ 1/c};$$

$$3 - \dot{\epsilon}_{xx}^* = 10 \text{ 1/c}; \quad 4 - \dot{\epsilon}_{xx}^* = 25 \text{ 1/c}; \quad 5 - \dot{\epsilon}_{xx}^* = 50 \text{ 1/c}$$

Криві динамічного деформування матеріалу в пластичній області, побудовані на основі рівнянь (30) та закону Гука для пружної області, яка визначається з умови (14), показано на рис. 3. Розрахунки проведені для широкого діапазону зміни швидкості деформації $\dot{\epsilon}_{xx}^*$.

З вигляду теоретичних діаграм деформування, показаних на рис. 3, можна судити про якісну відповідність аналітичних розрахунків до експериментальних даних. Добитися адекватнішого збігу результатів підрахунку з експериментом можна тоді, коли для одного і того ж матеріалу визначатимуться його механічні властивості за різними програмами деформування та збільшиться точність реєстрації спадаючої ділянки діаграми.

Висновки

Побудована електромеханічна модель ідеального пружно-в'язко-пластичного матеріалу, яка описує ефект затримки плинності. Сформульована динамічна умова пластичності і для точки переходу матеріалу в пластичний стан, і в стані деформування, після появи зуба плинності. Порівняно результати теоретичних розрахунків з експериментальними даними з визначення залежності динамічної границі плинності від швидкості деформування. Встановлена якісна відповідність теоретичної і експериментальної діаграми одновісного стиску для матеріалів, що мають властивість появи зуба плинності, за різних швидкостей деформування.

Література

- [1] Ключников В. Д. Математическая теория пластичности. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 208 с.
- [2] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
- [3] Русинко К. Н. Теория пластичности и неустановившейся ползучести. – Львов.: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981. – 148 с.
- [4] Русинко К. Н. Особенности неупругой деформации твердых тел. – Львов.: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1986. – 152 с.
- [5] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 744 с.
- [6] Груздков А. А., Петров Ю. В., Смирнов В. И. Инвариантная форма критерия динамической текучести металлов // Физика твердого тела. – 2002. – Т. 44. – Вып. 11. – С. 1987–1989.
- [7] Новацкий В. Н. Волновые задачи теории пластичности. – М.: Мир, 1978. – 307 с.
- [8] Кужуджанов В. Н., Никитин Л. В. Распространение волн в стержнях из неоднородного упруго-вязко-пластического материала // Изв. АН СССР. – 1960. – № 4.
- [9] Работнов Ю. Н. Модель упруго-пластической среды с запаздыванием текучести // ПМТФ. – 1968. – № 3. – С. 45–54.
- [10] Суворова Ю. В. Запаздывание текучести в сталях (обзор экспериментальных работ) // ПМТФ. – 1968. – № 3. – С. 55–62.
- [11] Бураго Н. Г., Кужуджанов В. Н. Распространение волн в материале с запаздыванием текучести // Материалы V Всесоюзного симпозиума. – Алма-Ата: Изд-во Наука. Казахской ССР, 1973 – С. 101–107.
- [12] Ломакин Е. В. Распространение упругопластических волн в материале с запаздыванием текучести // Изв. АН СССР. МТТ. – 1970. – № 5.
- [13] Полухин П. И., Гун Г. Я., Галкин А. М. Сопrotивление пластической деформации металлов и сплавов. Справочник. – М.: Металлургия, 1983. – 352 с.

- [14] *Ивлев Д. Д.* К теории сплошных сред // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 148. – № 1. – С. 64–66
- [15] *Быковцев Г. И., Вержейко Н. Д.* О распространении волн в упруго-вязко-пластической среде // МТТ. – 1966. – № 4. – С. 111–123.
- [16] *Perzyna P.* The constitutive equations for rate sensitive plastic materials // Quart. Appl. Math. – 1963. – № 20.
- [17] *Campbell J. D. C., Ferguson W. G.* Philos. Mag. 21, 169, 63 (1970).

ЕЩЁ РАЗ О ЗУБЕ ТЕКУЧЕСТИ И ФОРМУЛИРОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКОГО УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Андрусык Я. Ф.

*Национальный университет “Львівська політехніка”,
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*

Предложена электромеханическая модель идеального упруго-вязко-пластического тела с запаздыванием текучести. Сформулировано условие пластичности для установления момента перехода материала в состояние текучести в результате действия нагрузки, превышающей предельный уровень упругого состояния при статическом деформировании. Получен динамический критерий пластичности для пластического деформирования после “перегрузки”. Сравнены результаты теоретических расчетов с экспериментальными данными по определению зависимости динамического предела текучести от скорости деформирования. Рассчитаны диаграммы одноосного сжатия металла, который имеет свойство возникновения зуба текучести, для широкого диапазона скоростей деформации.

Ключевые слова: пластичность, зуб текучести, статический и динамический предел текучести, динамическая нагрузка, динамический критерий пластичности.

2000 MSC: 60J10

УДК: 539.374.376

ON FLUIDITY TOOTH AND FORMULATION OF DYNAMIC CONDITION OF PLASTICITY

Andrusyk Ya. F.

*Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine*

An electromechanical model of an ideal elastic-visco-plastic material that describes the phenomenon of delay fluctuation has been built. Plasticity condition for establishing the point of transition to a state of fluidity of the material at the load exceeding the maximum level of elastic deformation under static condition has been formulated. Dynamic plasticity criterion for plastic deformation after 'overload' has also been derived. Theoretical calculations and experimental data for the dependence of the dynamic boundary fluidity on the speed of deformation have been obtained. Diagrams for uniaxial compression of metal, with the property of appearance of tooth strength have been calculated for a wide range of deformation speed.

Key words: plasticity, fluidity tooth, static and dynamic fluidity limit, dynamic loading, dynamic plasticity criterion.

2000 MSC: 60J10

UDK: 539.374.376