ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№804, 2014, с. 141–165

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№804, 2014, p. 141–165

ТРИТОЧКОВІ РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У СФЕРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Кунинець А. В., Кутнів М. В.

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 25 жовтня 2014 р.)

Розглянуто крайові задачі для нелінійних стаціонарних рівнянь у сферичній системі координат (нелінійні диференціальні рівняння другого порядку з сингулярністю першого роду). Для чисельного розв'язування цієї задачі побудовано та обгрунтовано точну триточкову різницеву схему на нерівномірній сітці. Доведено існування та єдиність розв'язку цієї схеми, збіжність ітераційного методу послідовних наближень для її розв'язування.

Ключові слова: крайова задача з сингулярністю, нелінійне звичайне диференціальне рівняння, точна триточкова різницева схема, метод лінеаризації, принцип стискаючих відображень.

УДК: 519.6

Вступ

У цій праці побудовано ТТРС для крайової задачі в сферичній системі координат

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \quad x\in[0,R],$$

$$\lim_{x\to 0} x^2k(x)\frac{du}{dx} = 0, \quad u(R)=\mu_2 \tag{1}$$

на нерівномірній сітці. Така різницева схема вимагає для кожного вузла сітки розв'язування чотирьох задач Коші: двох нелінійних звичайних диференціальних рівнянь і двох лінійних звичайних диференціальних рівнянь на інтервалах $[x_{j-1},x_j]$ (вперед) і $[x_j,x_{j+1}]$ (назад).

I. Існування та єдиність розв'язку

Достатні умови існування і єдиності розв'язку задачі (1) дає теорема, яка ґрунтується на методі лінеаризації та принципі стискаючих відображень (див., напр., [8, 9]).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*

$$0<c_1\le k(x)\le c_2 \quad \forall x\in[0,R],\ k(x)\in Q^1[0,R], \tag{2}$$

$$f_u(x)\equiv f(x,u)\in Q^0[0,R],$$

$$|f(x,u)|\le K \quad \forall x\in[0,R],\ u\in\Omega([0,R],r), \tag{3}$$

$$|f(x,u)-f(x,v)|\le L|u-v|$$

$$\forall x\in[0,R],\ u,v\in\Omega([0,R],r), \tag{4}$$

$$q=\frac{LR^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1)<1, \tag{5}$$

тоді задача (1) *в* $\Omega([0,R],r)$ *має єдиний розв'язок* $u(x)$*, який можна знайти за допомогою методу послідовних наближень*

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{du^{(n)}}{dx}\right] = -f(x,u^{(n-1)}(x)), \quad x\in(0,R),$$

$$\lim_{x\to 0} x^2k(x)\frac{du^{(n)}(x)}{dx}=0,$$

$$u^{(n)}(R)=\mu_2, \quad n=1,2,\dots, \quad u^{(0)}(x)=\mu_2 \tag{6}$$

з оцінкою похибки

$$\left\|u^{(n)}-u\right\|^*_{1,\infty,[0,R]} \le \frac{q^n}{1-q}r. \tag{7}$$

Тут $Q^p[0,R]$ — клас функцій з кусково-неперервними похідними до p - го порядку включно із скінченною кількістю точок розриву першого роду, а $\Omega([0,R],r)$ — множина функцій вигляду

$$\Omega([0,R],r)=\Big\{u(x): u(x)\in W^1_\infty[0,R],$$

$$u(x), x^2k(x)\tfrac{du}{dx}\in C[0,R], \left\|u-u^{(0)}\right\|^*_{1,\infty,[0,R]}\le r\Big\},$$

$$r=\tfrac{KR^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1),$$

$$\|u\|_{0,\infty,[0,R]}=\max_{x\in[0,R]}|u(x)|,$$

$$\|u\|^*_{1,\infty,[0,R]}=\max\left\{\|u\|_{0,\infty,[0,R]}, \left\|x^2k(x)\tfrac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,[0,R]}\right\}.$$

Доведення. Задачу (1) запишемо в еквівалентному інтегральному вигляді

$$u(x)=\Re(x,u(\cdot))=$$

$$\int_0^R G(x,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\mu_2, \quad 0\le x\le R, \tag{8}$$

де функція Гріна $G(x,\xi)$ цієї задачі має вигляд:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\xi^2V(\xi), & 0\le x\le\xi,\\ \xi^2V(x), & \xi\le x\le R,\end{cases}\qquad V(x)=\int\limits_x^R\frac{dt}{t^2k(t)}\,.$$

Зазначимо, що крайова умова при $x\to 0$ задовольняється, оскільки

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x^2k(x)}\int\limits_0^x\xi^2f(\xi,u(\xi))d\xi.$$

Покажемо, що оператор (8) переводить множину $\Omega([0,R],r)$ в себе.

$$\|\Re(x,v(\cdot))-u^{(0)}\|^*_{1,\infty,[0,R]}\le$$

$$\le\int\limits_0^R\|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]}\,|f(\xi,v(\xi))|\,d\xi\le$$

$$\le K\int\limits_0^R\|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]}d\xi\quad\forall v\in\Omega([0,R],r).\qquad(9)$$

Оскільки згідно з (2)

$$\int\limits_0^R|G(x,\xi)|d\xi=\int\limits_x^R\xi^2V(\xi)d\xi+V(x)\int\limits_0^x\xi^2d\xi=$$

$$=V(\xi)\frac{\xi^3}{3}\bigg|_x^R+\frac{1}{3}\int\limits_x^R\frac{\xi}{k(\xi)}d\xi+V(x)\frac{\xi^3}{3}\bigg|_0^x=\frac{1}{3}\int\limits_x^R\frac{\xi d\xi}{k(\xi)}\le$$

$$\le\frac{1}{3c_1}\int\limits_x^R\xi d\xi=\frac{R^2-x^2}{6c_1}\le\frac{R^2}{6c_1},$$

$$\int\limits_0^R\left|x^2k(x)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|d\xi=\int\limits_0^x\xi^2d\xi=\frac{x^3}{3}\le\frac{R^3}{3},$$

то

$$\int\limits_0^R\|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]}d\xi\le\frac{R^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1).\qquad(10)$$

З нерівностей (9), (10) випливає нерівність

$$\left\|\Re(x,v(\cdot))-u^{(0)}\right\|^*_{1,\infty,[0,R]}\le$$

$$\le\frac{KR^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1)=r\quad\forall v\in\Omega([0,R],r),$$

яка означає, що оператор (8) переводить множину $\Omega([0,R],r)$ в себе.

Крім того, $\Re(x,u(\cdot))$ на $\Omega([0,R],r)$ – стискувальний оператор, оскільки

$$\|\Re(x,u(\cdot))-\Re(x,v(\cdot))\|^*_{1,\infty,[0,R]}\le$$

$$\le\int\limits_0^R\|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]}\,|f(\xi,u(\xi))-f(\xi,v(\xi))|\,d\xi\le$$

$$\le L\int\limits_0^R\|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]}\,|u(\xi)-v(\xi)|\,d\xi\le$$

$$\le L\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,R]}\int\limits_0^R\|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]}d\xi\le$$

$$\le\frac{LR^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1)\,\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,R]}=$$

$$=q\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,R]}\quad\forall u,v\in\Omega([0,R],r).$$

Звідси, згідно з (5) $\Re(x,u(\cdot))$ на $\Omega([0,R],r)$ є стискувальним оператором.

Таким чином, для оператора $\Re(x,u(\cdot))$ при

$$q=\frac{LR^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1)<1$$

виконані всі умови принципу стискувальних відображень, а тому рівняння (8) має єдиний розв'язок, який можна одержати методом послідовних наближень (6) з оцінкою похибки (7). ■

II. Існування точної триточкової різницевої схеми

На відрізку $[0,R]$ введемо нерівномірну сітку

$$\widehat{\omega}_h=\{x_j\in[0,R],\quad j=0,1,\dots,N,\ x_0=0,\ x_N=R\},$$

$$h_j=x_j-x_{j-1}>0,\quad j=1,2,\dots,N,\quad |h|=\max_{1\le j\le N}h_j$$

так, щоб точки розриву функцій $k(x),f(x,u)$ збігалися з вузлами сітки. Множину всіх точок розриву позначимо через ρ і припустимо, що N таке, що $\rho\subseteq\widehat{\omega}_h$. Будемо вважати, що в точках розриву розв'язок задачі (1) задовольняє умови неперервності

$$u(x_i-0)=u(x_i+0),$$

$$x^2k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_i-0}=x^2k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_i+0}\qquad\forall x_i\in\rho.$$

Розглянемо крайові задачі

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{dY_1^1(x,u)}{dx}\right]=$$

$$=-f(x,Y_1^1(x,u)),\quad 0<x<x_1,$$

$$\lim_{x\to 0}x^2k(x)\frac{dY_1^1(x,u)}{dx}=0,\quad Y_1^1(x_1,u)=u_1,\qquad(11)$$

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx}\right]=$$

$$=-f(x,Y_\alpha^j(x,u)),\quad x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha},$$

$$Y_\alpha^j(x_{j-2+\alpha},u)=u(x_{j-2+\alpha}),$$

$$Y_\alpha^j(x_{j-1+\alpha},u)=u(x_{j-1+\alpha}),$$

$$j=3-\alpha,4-\alpha,\dots,N+1-\alpha,\quad\alpha=1,2.\qquad(12)$$

Лема 1. *Нехай виконані умови* (2)–(5), *тоді задачі* (11), (12) *матимуть єдиний розв'язок* $Y_1^1(x,u)\in\Omega([0,x_1],r)$, $Y_\alpha^j(x,u)\in\Omega([x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],r)$, $j=3-\alpha,4-\alpha,\dots,N+1-\alpha$, $\alpha=1,2$, *причому для розв'язку задачі* (1) *справджується*

$$u(x)=Y_1^1(x,u),\quad x\in[0,x_1],$$

$$u(x)=Y_\alpha^j(x,u),\quad x\in[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],\qquad(13)$$

$$j=3-\alpha,4-\alpha,\dots,N+1-\alpha,\quad\alpha=1,2.$$

Доведення. Крайові задачі (11), (12) запишемо в еквівалентному вигляді

$$Y_1^1(x,u) = \int\limits_0^{x_1} \widetilde{G}^1(x,\xi) f(\xi, Y_1^1(\xi,u)) d\xi + u_1, \quad x \in [0, x_1],$$

$$Y_\alpha^j(x,u) = \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi) f(\xi, Y_\alpha^j(\xi,u)) d\xi + \hat{u}(x),\ x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}],\ j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha,\ \alpha = 1,2,$$

$$\hat{u}(x) = \frac{u(x_j) V_1^j(x) + u(x_{j-1}) V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)},\ x \in [x_{j-1}, x_j],$$

де

$$V_1^j(x) = \int\limits_{x_{j-1}}^{x} \frac{dt}{t^2 k(t)}, \quad V_2^j(x) = \int\limits_{x}^{x_{j+1}} \frac{dt}{t^2 k(t)},$$

$$\widetilde{G}^1(x,\xi) = \begin{cases} \xi^2 V_2^0(\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ \xi^2 V_2^0(x), & \xi \le x \le x_1, \end{cases} \tag{14}$$

$$\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{V_1^{j-1+\alpha}(x) V_2^{j-2+\alpha}(\xi) \xi^2}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}, & x_{j-2+\alpha} \le x \le \xi, \\ \dfrac{V_1^{j-1+\alpha}(\xi) V_2^{j-2+\alpha}(x) \xi^2}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}, & \xi \le x \le x_{j-1+\alpha}. \end{cases} \tag{15}$$

При $\alpha = 1$ отримаємо

$$\hat{u}(x) = \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)} \left[\int\limits_0^R G(x_j,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \mu_2 \right] + \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \left[\int\limits_0^R G(x_{j-1},\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \mu_2 \right],\ x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Оскільки $V_1^j(x) + V_2^{j-1}(x) = V_1^j(x_j)$, то

$$\hat{u}(x) = \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)} \int\limits_0^R G(x_j,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \int\limits_0^R G(x_{j-1},\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \mu_2,\ x \in [x_{j-1}, x_j].$$

Тоді

$$Y_1^1(x,u) = \int\limits_0^R G(x_1,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \int\limits_0^{x_1} \widetilde{G}^1(x,\xi) f(\xi, Y_1^1(\xi,u)) d\xi + u^{(0)}(x), \quad x \in [0, x_1],$$

$$Y_1^j(x,u) = \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)} \int\limits_0^R G(x_j,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \int\limits_0^R G(x_{j-1},\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi +$$
$$+ \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \widetilde{G}^j(x,\xi) f(\xi, Y_1^j(\xi,u)) d\xi + u^{(0)}(x), \quad x \in [x_{j-1}, x_j].$$

На підставі рівності $Y_2^j(x,u) = Y_1^{j+1}(x,u)$ маємо

$$Y_2^j(x,u) = \frac{V_1^{j+1}(x)}{V_2^j(x_j)} \int\limits_0^R G(x_{j+1},\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \frac{V_2^j(x)}{V_2^j(x_j)} \int\limits_0^R G(x_j,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi +$$
$$+ \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \widetilde{G}^{j+1}(x,\xi) f(\xi, Y_2^j(\xi,u)) d\xi + u^{(0)}(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}].$$

Таким чином, питання існування та єдиності розв'язку задач (11), (12) еквівалентне до аналогічної проблеми для рівнянь

$$U_1^1(x) = \Im_1^1(x,u,U_1^1) = \int\limits_0^R G(x_1,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi + \int\limits_0^{x_1} \widetilde{G}^1(x,\xi)f(\xi,U_1^1(\xi,u))d\xi + u^{(0)}(x),\ x\in[0,x_1], \tag{16}$$

$$U_\alpha^j(x) = \Im_\alpha^j(x,u,U_\alpha^j) = \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_\alpha^j(x_j)}\int\limits_0^R G(x_{j-1+\alpha},\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi + \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_\alpha^j(x_j)}\int\limits_0^R G(x_{j-2+\alpha},\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi +$$

$$+\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)f(\xi,U_\alpha^j(\xi,u))d\xi + u^{(0)}(x),\ x\in[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],\ j=3-\alpha,4-\alpha,\ldots,N+1-\alpha,\ \alpha=1,2. \tag{17}$$

Покажемо, що оператори $\Im_1^1(x,u,U_1^1)$, $\Im_1^j(x,u,U_1^j)$ переводять відповідно множини $\Omega([0,x_1],r)$, $\Omega([x_{j-1},x_j],r)$ в себе. Нехай $U_1^1(x)\in\Omega([0,x_1],r)$, $U_1^j(x)\in\Omega([x_{j-1},x_j],r)$. Тоді

$$\left|\Im_1^1(x,u,U_1^1) - u^{(0)}(x)\right| \le \left\{\int\limits_x^{x_1}\xi^2V_2^0(\xi)d\xi + V_2^0(x)\int\limits_0^x \xi^2d\xi + \int\limits_{x_1}^R \xi^2V(\xi)d\xi + V(x_1)\int\limits_0^{x_1}\xi^2d\xi\right\} =$$

$$= K\left\{\left[V_2^0(x)+V(x_1)\right]\int\limits_0^x \xi^2d\xi + \int\limits_x^R \xi^2V(\xi)d\xi + \int\limits_x^{x_1}\xi^2\left[V_2^0(\xi)+V(x_1)-V(\xi)\right]d\xi\right\},$$

$$\left|\Im_1^j(x,u,U_1^j) - u^{(0)}(x)\right| \le K\left\{\frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\int\limits_0^R G(x_{j-1},\xi)d\xi + \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\int\limits_0^R G(x_j,\xi)d\xi + \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\widetilde{G}^j(x,\xi)d\xi\right\} =$$

$$= K\left\{\frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_{x_{j-1}}^R \xi^2V(\xi)d\xi + V(x_{j-1})\int\limits_0^{x_{j-1}}\xi^2d\xi\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_{x_j}^R \xi^2V(\xi)d\xi + V(x_j)\int\limits_0^{x_j}\xi^2d\xi\right] + \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\int\limits_x^{x_j}V_2^{j-1}(\xi)\xi^2d\xi + \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\int\limits_{x_{j-1}}^x V_1^j(\xi)\xi^2d\xi\right\} =$$

$$= K\left\{\frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_x^R \xi^2V(\xi)d\xi + V(x_{j-1})\int\limits_0^x\xi^2d\xi\right] + \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_x^R \xi^2V(\xi)d\xi + V(x_j)\int\limits_0^x\xi^2d\xi\right] +\right.$$

$$+ \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_x^{x_j}V_2^{j-1}(\xi)\xi^2d\xi + V(x_j)\int\limits_x^{x_j}\xi^2d\xi - \int\limits_x^{x_j}\xi^2V(\xi)d\xi\right] +$$

$$\left. + \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_{x_{j-1}}^x V_1^j(\xi)\xi^2d\xi - V(x_{j-1})\int\limits_{x_{j-1}}^x\xi^2d\xi + \int\limits_{x_{j-1}}^x \xi^2V(\xi)d\xi\right]\right\} =$$

$$= K\left\{\left[\frac{V_2^{j-1}(x)V(x_{j-1}) + V_1^j(x)V(x_j)}{V_1^j(x_j)}\right]\int\limits_0^x\xi^2d\xi +\right.$$

$$\left. + \int\limits_x^R \xi^2V(\xi)d\xi + \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\int\limits_x^{x_j}\left[V_2^{j-1}(\xi)+V(x_j)-V(\xi)\right]\xi^2d\xi + \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\int\limits_{x_{j-1}}^x\left[V_1^j(\xi)-V(x_{j-1})+V(\xi)\right]\xi^2d\xi\right\}.$$

Враховуючи рівності

$$V_2^{j-1}(\xi) + V(x_j) - V(\xi) = \int\limits_\xi^{x_j}\frac{dt}{t^2k(t)} + \int\limits_{x_j}^R\frac{dt}{t^2k(t)} - \int\limits_\xi^R\frac{dt}{t^2k(t)} = 0,$$

$$V_1^j(\xi) - V(x_{j-1}) + V(\xi) = \int\limits_{x_{j-1}}^{\xi} \frac{dt}{t^2k(t)} - \int\limits_{x_{j-1}}^{R} \frac{dt}{t^2k(t)} + \int\limits_{\xi}^{R} \frac{dt}{t^2k(t)} = 0,$$

$$\frac{V_2^{j-1}(x)V(x_{j-1}) + V_1^j(x)V(x_j)}{V_1^j(x_j)} = \frac{V_2^{j-1}(x)[V_1^j(x) + V(x)] + V_1^j(x)[V(x) - V_2^{j-1}(x)]}{V_1^j(x_j)} = V(x)$$

отримаємо

$$\left|\Im_1^j(x,u,U_1^j) - u^{(0)}(x)\right| \le K\left\{V(x)\int\limits_0^x \xi^2 d\xi + \int\limits_x^R \xi^2 V(\xi)d\xi\right\} = K\int\limits_0^R G(x,\xi)d\xi, \quad j = 1,2,\ldots,N.$$

Таким чином

$$\|\Im_1^j(x,u,U_1^j) - u^{(0)}(x)\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \le \frac{KR^2}{6c_1}\max(1, 2Rc_1) = r, \quad j = 1,2,\ldots,N.$$

Тобто оператори $\Im_1^1(x,u,U_1^1)$, $\Im_1^j(x,u,U_1^j)$ переводять відповідно множини $\Omega([0,x_1],r)$ і $\Omega([x_{j-1},x_j],r)$ в себе.

Аналогічно можна показати, що якщо $U_2^j(x) \in \Omega([x_j,x_{j+1}],r)$, то

$$\|\Im_2^j(x,u,U_2^j) - u^{(0)}(x)\|^*_{1,\infty,[x_j,x_{j+1}]} \le r.$$

Крім того

$$\Im_1^1(x,u,U_1^1) - \Im_1^1(x,u,\widetilde{U}_1^1)\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \le \int\limits_0^{x_1} \left\|\widetilde{G}^1(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \left|f(\xi,U_1^1(\xi,u)) - f(\xi,\widetilde{U}_1^1(\xi,u))\right| d\xi \le$$

$$\le L\|U_1^1 - \widetilde{U}_1^1\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \int\limits_0^{x_1} \left\|\widetilde{G}^1(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} d\xi, \tag{18}$$

$$\|\Im_\alpha^j(x,u,U_\alpha^j) - \Im_\alpha^j(x,u,\widetilde{U}_\alpha^j)\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \le$$

$$\le \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left\|\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \left|f(\xi,U_\alpha^j(\xi,u)) - f(\xi,\widetilde{U}_\alpha^j(\xi,u))\right| d\xi \le$$

$$\le L\|U_\alpha^j - \widetilde{U}_\alpha^j\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left\|\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} d\xi. \tag{19}$$

Оскільки

$$\int\limits_0^{x_1} |\widetilde{G}^1(x,\xi)|d\xi = V_2^0(x)\int\limits_0^x \xi^2 d\xi + \int\limits_x^{x_1} \xi^2 V_2^0(\xi)d\xi = V_2^0(x)\frac{\xi^3}{3}\bigg|_0^x + V_2^0(\xi)\frac{\xi^3}{3}\bigg|_x^{x_1} + \frac{1}{3}\int\limits_x^{x_1} \frac{\xi^3}{\xi^2k(\xi)}d\xi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_x^{x_1} \frac{\xi d\xi}{k(\xi)} \le \frac{1}{3c_1}\int\limits_x^{x_1} \xi d\xi = \frac{x_1^2 - x^2}{6c_1} \le \frac{R^2}{6c_1},$$

$$\int\limits_0^{x_1} \left|x^2k(x)\frac{\partial\widetilde{G}^1(x,\xi)}{\partial x}\right| d\xi = \int\limits_0^x \xi^2 d\xi = \frac{x^3}{3} \le \frac{R^3}{3},$$

$$\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left|\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)\right| d\xi = \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \int\limits_x^{x_{j-1+\alpha}} V_2^{j-2+\alpha}(\xi)\xi^2 d\xi + \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x} V_1^{j-1+\alpha}(\xi)\xi^2 d\xi =$$

$$= \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}\left[V_2^{j-2+\alpha}(\xi)\frac{\xi^3}{3}\bigg|_x^{x_{j-1+\alpha}} + \int\limits_x^{x_{j-1+\alpha}} \frac{\xi^3}{3}\frac{1}{\xi^2k(\xi)}d\xi\right] +$$

$$+\frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}\left[V_1^{j-1+\alpha}(\xi)\frac{\xi^3}{3}\Big|_{x_{j-2+\alpha}}^{x}-\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x}\frac{\xi^3}{3}\frac{1}{\xi^2k(\xi)}d\xi\right]=$$

$$=\frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}\left[-V_2^{j-2+\alpha}(x)\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\int\limits_{x}^{x_{j-1+\alpha}}\frac{\xi}{k(\xi)}d\xi\right]+\frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}\left[V_1^{j-1+\alpha}(x)\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x}\frac{\xi}{k(\xi)}d\xi\right]\le$$

$$\le\frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{3V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})c_1}\frac{\xi^2}{2}\Big|_{x}^{x_{j-1+\alpha}}-\frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{3V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})c_2}\frac{\xi^2}{2}\Big|_{x_{j-2+\alpha}}^{x}=$$

$$=\frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{6V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})c_1}(x_{j-1+\alpha}^2-x^2)-\frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{6V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})c_2}(x^2-x_{j-2+\alpha}^2)\le\frac{(R^2-x^2)}{6c_1}\le\frac{R^2}{6c_1},$$

$$\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}}\left|x^2k(x)\frac{\partial\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)}{\partial x}\right|d\xi=\frac{1}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}\int\limits_{x}^{x_{j-1+\alpha}}\xi^2V_2^{j-2+\alpha}(\xi)d\xi+\frac{1}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x}\xi^2V_1^{j-1+\alpha}(\xi)d\xi\le$$

$$\le\frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}\frac{\xi^3}{3}\Big|_{x}^{x_{j-1+\alpha}}+\frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}\frac{\xi^3}{3}\Big|_{x_{j-2+\alpha}}^{x}=$$

$$=\frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{3V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}(x_{j-1+\alpha}^3-x^3)+\frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{3V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}(x^3-x_{j-2+\alpha}^3)\le\frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)+V_1^{j-1+\alpha}(x)}{3V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}R^3=\frac{R^3}{3},$$

то

$$\int\limits_{0}^{x_1}\|\widetilde{G}^1(x,\xi)\|_{1,\infty,[0,x_1]}^{*}d\xi\le\frac{R^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1),\tag{20}$$

$$\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}}\|\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}^{*}d\xi\le\frac{R^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1).\tag{21}$$

Отже, згідно з (18)-(21) отримаємо

$$\|\Im_1^1(x,u,U_1^1)-\Im_1^1(x,u,\widetilde{U}_1^1)\|_{1,\infty,[0,x_1]}^{*}\le\frac{LR^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1)\|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\|_{1,\infty,[0,x_1]}^{*}=q\|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\|_{1,\infty,[0,x_1]}^{*},$$

$$\|\Im_\alpha^j(x,u,U_\alpha^j)-\Im_\alpha^j(x,u,\widetilde{U}_\alpha^j)\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}^{*}\le\frac{LR^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1)\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}^{*}=$$

$$=q\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}^{*}.$$

Тобто для операторів (16), (17) на множинах $\Omega([0,x_1],r)$ і $\Omega([x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],r)$ відповідно виконані всі умови принципу стискувальних відображень, а тому задачі (11), (12) мають єдиний розв'язок. ■

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для задачі* (1) *існує ТТРС вигляду*

$$u_{x,0}=-\hat{T}^{x_0}(f(\xi,u(\xi))),\ a_2u_{x,1}/(\hbar_1x_1^2)=-\hat{T}^{x_1}(f(\xi,u(\xi))),$$

$$\frac{1}{x_j^2}(au_{\bar{x}})_{\hat{x},j}=-\hat{T}^{x_j}(f(\xi,u(\xi))),\ j=2,3,\ldots,N-1,\ u_N=\mu_2,\tag{22}$$

де

$$u_{\bar{x},j}=\frac{u_j-u_{j-1}}{h_j},\ u_{x,j}=\frac{u_{j+1}-u_j}{h_{j+1}},\ u_{\hat{x},j}=\frac{u_{j+1}-u_j}{\hbar_j},\ \hbar_j=\frac{h_j+h_{j+1}}{2},$$

$$a_j=a(x_j)=\left[\frac{1}{h_j}V_1^j(x_j)\right]^{-1},\ j=2,3,\ldots,N-1,\tag{23}$$

$$\hat{T}^{x_0}(w(\xi))=h_1^{-1}\int\limits_{0}^{x_1}\xi^2V_2^0(\xi)w(\xi)d\xi,$$

$$\hat{T}^{x_1}(w(\xi))=(\hbar_1x_1^2)^{-1}\int\limits_{0}^{x_1}\xi^2w(\xi)d\xi+\left[\hbar_1x_1^2V_2^1(x_1)\right]^{-1}\int\limits_{x_1}^{x_2}\xi^2V_2^1(\xi)w(\xi)d\xi,$$

$$\hat{T}^{x_j}(w(\xi)) = \left[\hbar_j x_j^2 V_1^j(x_j)\right]^{-1} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \xi^2 V_1^j(\xi) w(\xi) d\xi + \left[\hbar_j x_j^2 V_2^j(x_j)\right]^{-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \xi^2 V_2^j(\xi) w(\xi) d\xi,$$

$$V_1^j(x) = \int\limits_{x_{j-1}}^{x} \frac{dt}{t^2 k(t)},\ j = 2, 3, \ldots, N, \quad V_2^j(x) = \int\limits_{x}^{x_{j+1}} \frac{dt}{t^2 k(t)},\ j = 1, 2, \ldots, N-1,$$

функція $u(x)$ *в правій частині* (22) *визначається за формулою* (13) *і залежить тільки від* $u(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, N$.

Доведення. Розглянемо крайові задачі

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2 k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \quad x \in (0, x_{j+1}), \\ &\lim_{x\to 0} x^2 k(x)\frac{du}{dx} = 0, \quad u(x_{j+1}) = u_{j+1}, \quad j = 0, 1, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2 k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u),\ x \in (x_{j-1}, x_{j+1}), \\ &u(x_{j-1}) = u_{j-1}, u(x_{j+1}) = u_{j+1}, j = 2, 3, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{25}$$

функції Гріна для яких відповідно мають вигляд

$$G^j(x,\xi) = \begin{cases} \xi^2 V_2^j(\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ \xi^2 V_2^j(x), & \xi \le x \le x_{j+1}, \end{cases} \qquad j = 0, 1,$$

$$G^j(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{V_1^j(x) V_2^j(\xi)\xi^2}{V_1^j(x_{j+1})}, & x_{j-1} \le x \le \xi, \\ \dfrac{V_1^j(\xi) V_2^j(x)\xi^2}{V_1^j(x_{j+1})}, & \xi \le x \le x_{j+1}, \end{cases} \qquad j = 2, 3, \ldots, N-1.$$

Побудуємо ТТРС. Для цього запишемо очевидні інтегральні наслідки (24), (25). Отримаємо

$$\int\limits_0^{x_{j+1}} G^j(x,\xi)\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right] d\xi = -\int\limits_0^{x_{j+1}} G^j(x,\xi) f(\xi,u) d\xi, \quad j = 0, 1, \tag{26}$$

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^j(x,\xi)\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right] d\xi = -\int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^j(x,\xi) f(\xi,u) d\xi, \quad j = 2, 3, \ldots, N-1. \tag{27}$$

Якщо інтеграли, які входять в ліві частини (26), (27) проінтегрувати за частинами, то з урахуванням крайових умов (24), (25), отримаємо

$$\int\limits_0^{x_{j+1}} G^j(x,\xi)\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right] d\xi = V_2^j(x)\int\limits_0^{x} \frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right] d\xi + \int\limits_x^{x_{j+1}} V_2^j(\xi)\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right] d\xi =$$

$$= V_2^j(x) x^2 k(x)\frac{du}{dx} + V_2^j(\xi)\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\bigg|_x^{x_{j+1}} + \int\limits_x^{x_{j+1}} \frac{du}{d\xi} d\xi = u(x_{j+1}) - u(x), \quad j = 0, 1,$$

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^j(x,\xi)\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right] d\xi =$$

$$= \frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\int\limits_{x_{j-1}}^{x} \xi^2 V_1^j(\xi)\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right] d\xi + \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\int\limits_x^{x_{j+1}} \xi^2 V_2^j(\xi)\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right] d\xi =$$

$$= \frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\left[V_1^j(\xi)\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\bigg|_{x_{j-1}}^{x} - \int\limits_{x_{j-1}}^{x} \frac{du}{d\xi} d\xi\right] + \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\left[V_2^j(\xi)\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\bigg|_x^{x_{j+1}} + \int\limits_x^{x_{j+1}} \frac{du}{d\xi} d\xi\right] =$$

$$= \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}u(x_{j+1}) - u(x) + \frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}u(x_{j-1}), \quad j = 2, 3, \ldots, N-1.$$

Отже,

$$u(x_{j+1}) - u(x) = -\int\limits_x^{x_{j+1}} \xi^2 V_2^j(\xi) f(\xi, u) d\xi - V_2^1(x) \int\limits_0^x \xi^2 f(\xi, u) d\xi, \quad j = 0, 1, \tag{28}$$

$$\frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}u(x_{j+1}) - u(x) + \frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}u(x_{j-1}) = -\frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})} \int\limits_{x_{j-1}}^x \xi^2 V_1^j(\xi) f(\xi, u) d\xi -$$

$$-\frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})} \int\limits_x^{x_{j+1}} \xi^2 V_2^j(\xi) f(\xi, u) d\xi, \ j = 2, 3, \ldots, N-1. \tag{29}$$

Запишемо рівність (28) для $j = 1$ при $x = x_1$

$$u_2 - u_1 = -\int\limits_{x_1}^{x_2} \xi^2 V_2^1(\xi) f(\xi, u) d\xi - V_2^1(x_1) \int\limits_0^{x_1} \xi^2 f(\xi, u) d\xi. \tag{30}$$

У рівності (28) для $j = 0$ перейдемо до границі при $x \to 0$, тоді отримаємо

$$u_1 - u_0 = -\int\limits_0^{x_1} \xi^2 V_2^0(\xi) f(\xi, u) d\xi. \tag{31}$$

Рівність (31) помножимо на $\dfrac{1}{h_1}$, (30) – на $\dfrac{1}{\hbar_1 x_1^2 V_2^1(x_1)}$, а (29) при $x = x_j$ на $\dfrac{V_1^j(x_{j+1})}{\hbar_j x_j^2 V_1^j(x_j) V_2^j(x_j)}$. Звідси отримаємо

$$u_{x,0} = -\frac{1}{h_1} \int\limits_0^{x_1} \xi^2 V_2^0(\xi) f(\xi, u) d\xi, \ \frac{u_2 - u_1}{\hbar_1 x_1^2 V_2^1(x_1)} = -\hat{T}^{x_1}(f(\xi, u(\xi))),$$

$$\frac{1}{\hbar_j x_j^2} \left[\frac{u_{j+1} - u_j}{V_2^j(x_j)} - \frac{u_j - u_{j-1}}{V_1^j(x_j)} \right] = -\hat{T}^{x_j}(f(\xi, u(\xi))), \quad j = 2, 3, \ldots, N-1. \tag{32}$$

Тоді з (32) і урахуванням рівності $V_2^j(x_j) = V_1^{j+1}(x_{j+1})$ випливає (22). ■

Введемо множину сіткових функцій

$$\Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r) = \left\{ (v_j)_{j=0}^N : \left\| v - u^{(0)} \right\|_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h}^* \le r \right\},$$

де $\|y\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h} = \max\limits_{\xi \in \widehat{\omega}_h} |y(\xi)|$, $\widehat{\omega}_h^- = x_0 \cup \widehat{\omega}_h$, $\|y\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-} = \max\limits_{\xi \in \widehat{\omega}_h^-} |y(\xi)|$, $\widehat{\omega}_h^+ = \widehat{\omega}_h \cup x_N$, $\|y\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+} = \max\limits_{\xi \in \widehat{\omega}_h^+} |y(\xi)|$.

Існування ТТРС (22) доведено в Теоремі 2, а єдиність встановлює

Лема 2. *Нехай виконані умови Теореми 2. Тоді існує таке число $h_0 > 0$, що при $|h| \le h_0$ ТТРС* (22) *матиме єдиний розв'язок $(u_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r)$, який можна одержати методом послідовних наближень:*

$$u_{x,0}^{(n)} = -\hat{T}^{x_0}(f(\xi, u^{(n-1)}(\xi))), \ a_2 u_{x,1}^{(n)}/(\hbar_1 x_1^2) = -\hat{T}^{x_1}(f(\xi, u^{(n-1)}(\xi))),$$

$$\frac{1}{x_j^2}(a u_{\bar{x}}^{(n)})_{\hat{x},j} = -\hat{T}^{x_j}(f(\xi, u^{(n-1)}(\xi))), \quad j = 2, 3, \ldots, N-1, \quad u_N^{(n)} = \mu_2, \tag{33}$$

$$u^{(n)}(x) = Y_1^1(x, u^{(n)}), \quad x \in [0, x_1], \ u^{(n)}(x) = Y_\alpha^j(x, u^{(n)}), \quad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}],$$

$$j = 3 - \alpha, 4 - \alpha, \ldots, N + 1 - \alpha, \quad \alpha = 1, 2, u^{(0)}(x) = \mu_2$$

з оцінкою похибки

$$\left\| u^{(n)} - u \right\|_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h}^* = \max \left\{ \left\| u^{(n)} - u \right\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-}, \left\| x^2 k(x) \frac{du^{(n)}}{dx} - x^2 k(x) \frac{du}{dx} \right\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+} \right\} \le M q_1^n, \tag{34}$$

де $q_1 = q + M_1|h| < 1$, M, M_1 – константи.

Доведення. Оскільки різницева схема (22) є точною, тобто її розв'язок є проекцією точного розв'язку задачі на сітку, то цей розв'язок для $\forall x \in \widehat{\overline{\omega}}_h$ можна записати у вигляді

$$u(x) = \Re_h(x, (u_j)_{j=0}^N) = \int\limits_0^R G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + u^{(0)}(x) = \sum_{j=1}^N \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + u^{(0)}(x), \tag{35}$$

де

$$u(\xi) = Y_1^1(\xi, u), \quad \xi \in [0, x_1],\ u(\xi) = Y_\alpha^j(\xi, u), \quad \xi \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}],\ j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha,\ \alpha = 1, 2.$$

Дослідимо властивості оператора $\Re_h(x, (u_j)_{j=0}^N)$. Оператор (35) переводить множину $\Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r)$ в себе. Нехай $(v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r)$, тоді

$$\left\| \Re_h(x, (v_j)_{j=0}^N) - u^{(0)}(x) \right\|_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h}^* \le K \int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h}^* d\xi \le \frac{KR^2}{6c_1} \max(1, 2Rc_1) = r, \quad \forall (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r).$$

Крім того,

$$\left\| \Re_h(x, (u_j)_{j=0}^N) - \Re_h(x, (v_j)_{j=0}^N) \right\|_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h}^* \le \int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|_{1,\infty,[0,R]}^* \left| f(\xi, u(\xi)) - f(\xi, v(\xi)) \right| d\xi \le$$

$$\le L \int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|_{1,\infty,[0,R]}^* \left| u(\xi) - v(\xi) \right| d\xi \le L \|u - v\|_{1,\infty,[0,R]}^* \int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|_{1,\infty,[0,R]}^* d\xi \le$$

$$\le \frac{LR^2}{6c_1} \max(1, 2Rc_1) \|u - v\|_{1,\infty,[0,R]}^* = q \|u - v\|_{1,\infty,[0,R]}^* \quad \forall (u_j)_{j=0}^N, (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r). \tag{36}$$

Покажемо, що

$$\|u - v\|_{1,\infty,[0,R]}^* \le (1 + M|h|) \|u - v\|_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h}^*. \tag{37}$$

Для цього розглянемо крайові задачі

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^2 k(x) \frac{du}{dx} \right] = -f(x, u), \quad 0 < x < x_1,\ \lim_{x \to 0} x^2 k(x) \frac{du}{dx} = 0, \quad u(x_1) = u_1,$$

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^2 k(x) \frac{du}{dx} \right] = -f(x, u), \quad x_{j-1} < x < x_j,\ u(x_{j-1}) = u_{j-1}, \quad u(x_j) = u_j, \quad j = 2, 3, \ldots, N,$$

розв'язки яких запишемо у вигляді

$$u(x) = \int\limits_0^{x_1} \widetilde{G}^1(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + u_1, \quad x \in [0, x_1],$$

$$u(x) = \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \widetilde{G}^j(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \hat{u}(x),$$

$$\hat{u}(x) = \frac{u(x_j) V_1^j(x) + u(x_{j-1}) V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)},\ x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 2, 3, \ldots, N,$$

де функції Гріна $\widetilde{G}^1(x,\xi), \widetilde{G}^j(x,\xi)$ задаються формулами (14), (15).

На підставі умови Ліпшиця

$$\|u - v\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \le |u_1 - v_1| + L \|u - v\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \int\limits_0^{x_1} \left\| \widetilde{G}^1(x,\xi) \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* d\xi \le$$

$$\le \|u - v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-} + M_2 |h| \|u - v\|_{1,\infty,[0,x_1]}^*,$$

$$\|u-v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \le \|\hat{u}-\hat{v}\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} + L\,\|u-v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \left\|\widetilde{G}^j(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} d\xi \le$$

$$\le \|\hat{u}-\hat{v}\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} + M_3|h|\,\|u-v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]}\,,\ j=2,3,\ldots,N.$$

Оскільки

$$\|\hat{u}-\hat{v}\|_{0,\infty,[x_{j-1},x_j]} = \max_{x\in[x_{j-1},x_j]} \left\{ \frac{|u_j-v_j|V_1^j(x)+|u_{j-1}-v_{j-1}|V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \right\} \le \|u-v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-}\,, \quad j=2,3,\ldots,N,$$

$$\left\| x^2k(x)\frac{d\hat{u}}{dx} - x^2k(x)\frac{d\hat{v}}{dx} \right\|_{0,\infty,[x_{j-1},x_j]} = \max_{x\in[x_{j-1},x_j]} \frac{h_j\,|u_{\overline{x},j}-v_{\overline{x},j}|}{V_1^j(x_j)} \le$$

$$\le (1+M_4|h|) \left\| x^2k(x)\frac{du}{dx} - x^2k(x)\frac{dv}{dx} \right\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+}\,,\ j=2,3,\ldots,N,$$

то

$$\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \le \|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} + M_2|h|\,\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \le \frac{1}{1-M_2|h|}\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} \le (1+M|h|)\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h}\,,$$

$$\|u-v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \le (1+M_4|h|)\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} + M_3|h|\,\|u-v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \le \frac{1+M_4|h|}{1-M_3|h|}\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} \le$$

$$\le (1+M|h|)\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h}\,,\ j=2,3,\ldots,N$$

з яких випливає нерівність (37).

Враховуючи (37), з оцінки (36) отримаємо

$$\left\|\Re_h(x,(u_j)_{j=0}^N) - \Re_h(x,(v_j)_{j=0}^N)\right\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} \le (q+M_1|h|)\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} = q_1\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h}.$$

Оскільки на підставі (5) $q<1$, то $q_1<1$ при достатньо малому h_0 і оператор (35) для $\forall (u_j)_{j=0}^N, (v_j)_{j=0}^N \in \in \Omega(\widehat{\widehat{\omega}}_h, r)$ здійснює стискувальне відображення.

Таким чином, згідно з принципом стискувальних відображень при достатньо малому h_0 ТТРС (22) має єдиний розв'язок, який може бути отриманий методом послідовних наближень (33) з оцінкою похибки (34). ■

Лема 3. *Нехай виконується умова* (2)*) та існує стала* $\Delta>0$ *така, що умови* (3), (4) *справджуються в області* $\Omega([0,R],r+\Delta)$. *Тоді існує таке* $h_0>0$, *що при* $|h|\le h_0$ *і* $\forall (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\widehat{\omega}}_h, r)$ *задачі*

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{dY_2^0(x,v)}{dx}\right] = -f(x,Y_2^0(x,v)), 0<x<x_1,$$

$$Y_2^0(x_1,v)=v_1,\ x^2k(x)\frac{dY_2^0(x,v)}{dx}\bigg|_{x=x_1} = x^2k(x)\frac{dv}{dx}\bigg|_{x=x_1}, \tag{38}$$

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{dY_1^1(x,v)}{dx}\right] = -f(x,Y_1^1(x,v)), 0<x<x_1,$$

$$Y_1^1(0,v)=v_0, \quad \lim_{x\to 0} x^2k(x)\frac{dY_1^1(x,v)}{dx}=0, \tag{39}$$

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{dY_\alpha^j(x,v)}{dx}\right] = -f(x,Y_\alpha^j(x,v)),\ x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha}, Y_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},v)=v(x_{j+(-1)^\alpha}),$$

$$x^2k(x)\frac{dY_\alpha^j(x,v)}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = x^2k(x)\frac{dv}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},\ j=3-\alpha,4-\alpha,\ldots,N+1-\alpha, \quad \alpha=1,2 \tag{40}$$

матимуть єдиний розв'язок.

Доведення. Задачі (38)–(40) еквівалентні операторним рівнянням

$$U_2^0(x) = \Re_2^0(x,v,U_2^0) = \int\limits_{x_1}^{x} \left[V_2^0(x)-V_2^0(\xi)\right]\xi^2 f(\xi,U_1^1(\xi))d\xi + v_1 - x^2k(x)\frac{dv}{dx}\bigg|_{x=x_1} V_2^0(x), \quad x\in[0,x_1],$$

$$U_1^1(x) = \Re_1^1(x, v, U_1^1) = \int\limits_0^x \left[V_2^0(x) - V_2^0(\xi)\right] \xi^2 f(\xi, U_1^1(\xi)) d\xi + v_0, \quad x \in [0, x_1],$$

$$U_\alpha^j(x) = \Re_\alpha^j(x, v, U_\alpha^j) = \frac{1}{V_\alpha^j(x_j)} \int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x \left[V_1^{j-1+\alpha}(\xi) V_2^{j-2+\alpha}(x) - V_1^{j-1+\alpha}(x) V_2^{j-2+\alpha}(\xi)\right] \xi^2 f(\xi, U_\alpha^j(\xi)) d\xi + v_{j+(-1)^\alpha} +$$

$$+(-1)^{\alpha+1} x^2 k(x) \frac{dv}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} V_\alpha^j(x), \ x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \quad j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Дослідимо властивості операторів $\Re_2^0(x, v, U_2^0)$, $\Re_1^1(x, v, U_1^1)$, $\Re_\alpha^j(x, v, U_\alpha^j)$, $j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Врахуємо те, що

$$u^{(0)}(x) = \mu_2 = u_0^{(0)} = u_{j+(-1)^\alpha}^{(0)}, \quad x^2 k(x) \frac{du^{(0)}}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = 0.$$

Зауважимо, що виконуються нерівності

$$V_1^j(\xi) V_2^{j-1}(x) - V_1^j(x) V_2^{j-1}(\xi) = \int\limits_{x_{j-1}}^\xi \frac{dt}{t^2 k(t)} \int\limits_x^{x_j} \frac{dt}{t^2 k(t)} - \left(\int\limits_{x_{j-1}}^\xi \frac{dt}{t^2 k(t)} + \int\limits_\xi^x \frac{dt}{t^2 k(t)}\right) \left(\int\limits_\xi^x \frac{dt}{t^2 k(t)} + \int\limits_x^{x_j} \frac{dt}{t^2 k(t)}\right) =$$

$$= -\int\limits_{x_{j-1}}^\xi \frac{dt}{t^2 k(t)} \int\limits_\xi^x \frac{dt}{t^2 k(t)} - \int\limits_\xi^x \frac{dt}{t^2 k(t)} \int\limits_\xi^x \frac{dt}{t^2 k(t)} - \int\limits_\xi^x \frac{dt}{t^2 k(t)} \int\limits_x^{x_j} \frac{dt}{t^2 k(t)} \le 0,$$

$$V_1^{j+1}(\xi) V_2^j(x) - V_1^{j+1}(x) V_2^j(\xi) = \left(\int\limits_{x_j}^x \frac{dt}{t^2 k(t)} + \int\limits_x^\xi \frac{dt}{t^2 k(t)}\right) \left(\int\limits_x^\xi \frac{dt}{t^2 k(t)} + \int\limits_\xi^{x_{j+1}} \frac{dt}{t^2 k(t)}\right) - \int\limits_{x_j}^x \frac{dt}{t^2 k(t)} \int\limits_\xi^{x_{j+1}} \frac{dt}{t^2 k(t)} =$$

$$= \int\limits_{x_j}^x \frac{dt}{t^2 k(t)} \int\limits_x^\xi \frac{dt}{t^2 k(t)} + \int\limits_x^\xi \frac{dt}{t^2 k(t)} \int\limits_x^\xi \frac{dt}{t^2 k(t)} + \int\limits_x^\xi \frac{dt}{t^2 k(t)} \int\limits_\xi^{x_{j+1}} \frac{dt}{t^2 k(t)} \ge 0.$$

Нехай $U_2^0(x)$, $U_1^1(x) \in \Omega([0, x_1], r + \Delta)$, $U_\alpha^j(x) \in \Omega([x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], r + \Delta)$, тоді

$$\left\|\Re_2^0(x, v, U_2^0) - u^{(0)}\right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \le r + M_3|h| - K \int\limits_{x_1}^x \|V_2^0(x) - V_2^0(\xi)\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \xi^2 d\xi,$$

$$\left\|\Re_1^1(x, v, U_1^1) - u^{(0)}\right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \le r + K \int\limits_0^x \|V_2^0(x) - V_2^0(\xi)\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \xi^2 d\xi,$$

$$\left\|\Re_\alpha^j(x, v, U_\alpha^j) - u^{(0)}\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}]}^* \le$$

$$\le r + M_5|h| + \frac{K(-1)^{(\alpha+1)}}{V_\alpha^j(x_j)} \int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x \left\|V_1^{j-1+\alpha}(\xi) V_2^{j-2+\alpha}(x) - V_1^{j-1+\alpha}(x) V_2^{j-2+\alpha}(\xi)\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}]}^* \xi^2 d\xi.$$

Оскільки

$$\int\limits_x^{x_1} \left|V_2^0(x) - V_2^0(\xi)\right| \xi^2 d\xi = \int\limits_x^{x_1} [V_2^0(x) - V_2^0(\xi)] \xi^2 d\xi = V_2^0(x) \frac{x_1^3}{3} - \frac{1}{3} \int\limits_x^{x_1} \frac{\xi d\xi}{k(\xi)} \le M_1|h|,$$

$$\int\limits_x^{x_1} \left|x^2 k(x) \frac{dV_2^0(x)}{dx}\right| \xi^2 d\xi = \int\limits_x^{x_1} \xi^2 d\xi = \frac{x_1^3 - x^3}{3} \le M_2|h|,$$

$$\int\limits_0^x \left|V_2^0(x) - V_2^0(\xi)\right| \xi^2 d\xi = \int\limits_0^x [V_2^0(\xi) - V_2^0(x)] \xi^2 d\xi = [V_2^0(\xi) - V_2^0(x)] \frac{\xi^3}{3}\bigg|_0^x + \frac{1}{3} \int\limits_0^x \frac{\xi d\xi}{k(\xi)} \le \frac{x^2}{6c_1} \le M_1|h|^2,$$

$$\int\limits_0^x \left| x^2 k(x) \frac{dV_2^0(x)}{dx} \right| \xi^2 d\xi = \int\limits_0^x \xi^2 d\xi = \frac{x^3}{3} \le M_2 |h|^2,$$

$$\frac{(-1)^{\alpha+1}}{V_\alpha^j(x_j)} \int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x \left| V_1^{j-1+\alpha}(\xi) V_2^{j-2+\alpha}(x) - V_1^{j-1+\alpha}(x) V_2^{j-2+\alpha}(\xi) \right| \xi^2 d\xi =$$

$$= \frac{1}{V_\alpha^j(x_j)} \int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x \left[V_1^{j-1+\alpha}(x) V_2^{j-2+\alpha}(\xi) - V_1^{j-1+\alpha}(\xi) V_2^{j-2+\alpha}(x) \right] \xi^2 d\xi =$$

$$= \frac{1}{V_\alpha^j(x_j)} \left[V_1^{j-1+\alpha}(x) V_2^{j-2+\alpha}(\xi) - V_1^{j-1+\alpha}(\xi) V_2^{j-2+\alpha}(x) \right] \frac{\xi^3}{3} \Big|_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x + \int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x \frac{\xi}{3k(\xi)} d\xi =$$

$$= (-1)^\alpha V_\alpha^j(x) \frac{x_{j+(-1)^\alpha}^3}{3} + \frac{1}{3} \int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x \frac{\xi}{k(\xi)} d\xi \le M_3 |h|,$$

$$\frac{(-1)^{\alpha+1}}{V_\alpha^j(x_j)} \int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x \left| x^2 k(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[V_1^{j-1+\alpha}(\xi) V_2^{j-2+\alpha}(x) - V_1^{j-1+\alpha}(x) V_2^{j-2+\alpha}(\xi) \right] \right| \xi^2 d\xi = (-1)^{\alpha+1} \int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x \xi^2 d\xi \le M_4 |h|,$$

то

$$\int\limits_{x_1}^x \left\| V_2^0(x) - V_2^0(\xi) \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \xi^2 d\xi \le \max\{M_1, M_2\} |h|,$$

$$\int\limits_0^x \left\| V_2^0(x) - V_2^0(\xi) \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \xi^2 d\xi \le \max\{M_1, M_2\} |h|^2,$$

$$\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x \left\| V_1^{j-1+\alpha}(\xi) V_2^{j-2+\alpha}(x) - V_1^{j-1+\alpha}(x) V_2^{j-2+\alpha}(\xi) \right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}]}^* \xi^2 d\xi \le \max\{M_3, M_4\} |h|.$$

Звідси

$$\left\| \Re_2^0(x, v, U_2^0) - u^{(0)} \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \le r + M_3 |h| + K \max\{M_1, M_2\} |h| = r + \Delta,$$

$$\left\| \Re_1^1(x, v, U_1^1) - u^{(0)} \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \le r + K \max\{M_1, M_2\} |h|^2 = r + \Delta,$$

$$\left\| \Re_\alpha^j(x, v, U_\alpha^j) - u^{(0)} \right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}]}^* \le r + M_5 |h| + K \max\{M_3, M_4\} |h| = r + \Delta,$$

тобто оператори $\Re_2^0(x, v, U_2^0)$, $\Re_1^1(x, v, U_1^1)$, $\Re_\alpha^j(x, v, U_\alpha^j)$, $j = 3 - \alpha, 4 - \alpha, \ldots, N + 1 - \alpha$, $\alpha = 1, 2$ переводять відповідно множини $\Omega([0, x_1], r + \Delta)$, $\Omega([x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], r + \Delta)$ в себе.

Крім того,

$$\left\| \Re_2^0(x, v, U_2^0) - \Re_1^1(x, v, \tilde{U}_2^0) \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \le L \left\| U_2^0 - \widetilde{U}_2^0 \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \int\limits_{x_1}^x \left\| V_2^0(x) - V_2^0(\xi) \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \xi^2 d\xi \le$$

$$\le L \max\{M_1, M_2\} |h| \left\| U_2^0 - \widetilde{U}_2^0 \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \le q \left\| U_2^0 - \widetilde{U}_2^0 \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^*,$$

$$\left\| \Re_1^1(x, v, U_1^1) - \Re_1^1(x, v, \tilde{U}_1^1) \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \le L \left\| U_1^1 - \widetilde{U}_1^1 \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \int\limits_0^x \left\| V_2^0(x) - V_2^0(\xi) \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \xi^2 d\xi \le$$

$$\le L \max\{M_1, M_2\} |h|^2 \left\| U_1^1 - \widetilde{U}_1^1 \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \le q \left\| U_1^1 - \widetilde{U}_1^1 \right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^*,$$

$$\left\| \Re_\alpha^j(x, v, U_\alpha^j) - \Re_\alpha^j(x, v, \widetilde{U}_\alpha^j) \right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}]}^* \le$$

$$\leq L\left\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x}\left\|V_1^{j-1+\alpha}(\xi)V_2^{j-2+\alpha}(x)-V_1^{j-1+\alpha}(x)V_2^{j-2+\alpha}(\xi)\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\xi^2d\xi\leq$$

$$\leq L\max\{M_3,M_4\}|h|\left\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\leq q\left\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}.$$

Оскільки на підставі (5) $q<1$,а $\tilde{q}=q|h|<1$ при достатньо малому h_0, то оператори $\Re_2^0(x,v,U_2^0)$, $\Re_1^1(x,v,U_1^1)$, $\Re_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)$, $j=3-\alpha,4-\alpha,\ldots,N+1-\alpha$, $\alpha=1,2$ здійснюють стискувальне відображення.

Отже, згідно з принципом стискувальних відображень, при достатньо малому h_0 задачі (39), (40) матимуть єдиний розв'язок. ■

III. Алгоритмічна реалізація точної триточкової різницевої схеми

Оскільки

$$\int\limits_0^{x_1}\xi^2V_2^0(\xi)f(\xi,u)d\xi=Y_2^0(0,u)-u_1,\quad \int\limits_0^{x_1}\xi^2f(\xi,u)d\xi=-x_1^2Z_1^1(x_1,u),$$

$$\int\limits_0^{x_1}\xi^2V_2^1(\xi)f(\xi,u)d\xi=-x_1^2V_2^1(x_1)Z_1^1(x_1,u)-Y_1^1(x_1,u)+u_0,$$

$$(-1)^{\alpha+1}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j}\xi^2V_\alpha^j(\xi)f(\xi,u)d\xi=(-1)^\alpha x_j^2V_\alpha^j(x_j)Z_\alpha^j(x_j,u)+Y_\alpha^j(x_j,u)-u_{j+(-1)^\alpha},$$

де $Y_2^0(0,u)$, $Y_1^1(x_1,u)$, $Z_1^1(x_1,u)$, $Y_\alpha^j(x_j,u)$, $Z_\alpha^j(x_j,u)$, $\alpha=1,2$ – розв'язки задач Коші

$$\frac{dY_2^0(x,u)}{dx}=\frac{Z_2^0(x,u)}{k(x)},\quad \frac{dZ_2^0(x,u)}{dx}=-f(x,Y_2^0(x,u))-\frac{2Z_2^0(x,u)}{x},\quad 0<x<x_1,$$

$$Y_2^0(x_1,u)=u_1,\quad Z_2^0(x_1,u)=k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_1},\quad j=3-\alpha,4-\alpha,\ldots,N+1-\alpha,\quad \alpha=1,2,\tag{41}$$

$$\frac{dY_1^1(x,u)}{dx}=\frac{Z_1^1(x,u)}{k(x)},\quad \frac{dZ_1^1(x,u)}{dx}=-f(x,Y_1^1(x,u))-\frac{2Z_1^1(x,u)}{x},\quad 0<x<x_1,$$

$$Y_1^1(0,u)=u_0,\quad \lim_{x\to 0}Z_1^1(x,u)=0,\tag{42}$$

$$\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx}=\frac{Z_\alpha^j(x,u)}{k(x)},\quad \frac{dZ_\alpha^j(x,u)}{dx}=-f(x,Y_\alpha^j(x,u))-\frac{2Z_\alpha^j(x,u)}{x},\quad x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha},$$

$$Y_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)=u_{j+(-1)^\alpha},\ Z_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)=k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},\ j=3-\alpha,4-\alpha,\ldots,N+1-\alpha,\ \alpha=1,2,\tag{43}$$

а $\bar{V}_\alpha^j(x)=(-1)^{\alpha+1}V_\alpha^j(x)$ – розв'язки задач Коші

$$\frac{d\bar{V}_\alpha^j(x)}{dx}=\frac{1}{x^2k(x)},\quad x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha},\quad \bar{V}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})=0,\quad j=3-\alpha,4-\alpha,...,N+1-\alpha,\quad \alpha=1,2.\tag{44}$$

Тоді праву частину ТТРС(22) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_0,u)=\hat{T}^{x_0}(f(\xi,u(\xi)))=\frac{Y_2^0(0,u)-u_1}{h_1},\\
&\varphi(x_1,u)=\hat{T}^{x_1}(f(\xi,u(\xi)))=\frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^1(x_1,u)-Z_1^1(x_1,u)+\frac{Y_2^1(x_1,u)-u_2}{x_1^2V_2^1(x_1)}\right],\\
&\varphi(x_j,u)=\hat{T}^{x_j}(f(\xi,u(\xi)))=\frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^j(x_j,u)+(-1)^\alpha\frac{Y_\alpha^j(x_j,u)-u_{j+(-1)^\alpha}}{x_j^2V_\alpha^j(x_j)}\right],\quad j=2,3,\ldots,N-1.
\end{aligned}\tag{45}$$

Отже, для побудови ТТРС (22), (23), (45) необхідно для $\forall x_j\in\hat{\omega}_h$ розв'язати чотири задачі Коші (41) або (42) або (43) і (44). Якщо задачі (41)–(44) розв'язати чисельно, можна було б побудувати відсічені ТРС.

Задачі Коші (42)–(44) будемо розв'язувати чисельно за допомогою будь-яких однокрокових методів (див., напр., [8])

$$Y_1^{(\bar m)1}(x_1,u)=u_0+h_1\widetilde{\Phi}_1\left(x_0,u_0,0,h_1\right),\quad Z_1^{(m)1}(x_1,u)=h_1\widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,0,h_1\right), \tag{46}$$

$$\begin{gathered}Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)=u_{j+(-1)^\alpha}+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku^{'})_{j+(-1)^\alpha},(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right),\\ Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)=(ku^{'})_{j+(-1)^\alpha}+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku^{'})_{j+(-1)^\alpha},(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right),\\ \bar V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)=(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right),\ j=3-\alpha,4-\alpha,...,N+1-\alpha,\ \alpha=1,2.\end{gathered} \tag{47}$$

де $\widetilde{\Phi}_1(x,u,y,h)$, $\widetilde{\Phi}_2(x,u,y,h)$, $\Phi_1(x,u,y,h)$, $\Phi_2(x,u,y,h)$, $\Phi_3(x,u,h)$ є функціями приросту, $(ku')_{j+(-1)^\alpha}=k(x)\dfrac{du}{dx}\Big|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}$, $Z_1^{(m)1}(x_1,u)$, $Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)$ апроксимує значення $Z_1^1(x_1,u)$, $Z_\alpha^j(x_j,u)$ з порядком точності m (m – ціле додатне), $Y_1^{(\bar m)1}(x_1,u)$, $Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)$, $V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)$ апроксимують відповідно $Y_1^1(x_1,u)$, $Y_\alpha^j(x_j,u)$, $V_\alpha^j(x_j)$ з порядком точності $\bar m=2[(m+1)/2]$ ($[\cdot]$ – ціла частина). Якщо $k(x)$ та права частина диференціального рівняння $f(x,u)$ достатньо гладкі, то існують розклади

$$Y_1^1(x_1,u)=Y_1^{(\bar m)1}(x_1,u)+h_1^{\bar m+1}\psi_1^1(x_0,u)+O(h_1^{\bar m+2}), \tag{48}$$

$$Z_1^1(x_1,u)=Z_1^{(m)1}(x_1,u)+h_1^{m+1}\tilde\psi_1^1(x_0,u)+O(h_1^{m+2}), \tag{49}$$

$$Y_\alpha^j(x_j,u)=Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)+[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{\bar m+1}\psi_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}), \tag{50}$$

$$Z_\alpha^j(x_j,u)=Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)+[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{m+1}\tilde\psi_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)+O(h_{j-1+\alpha}^{m+2}), \tag{51}$$

$$\bar V_\alpha^j(x_j)=\bar V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)+[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{\bar m+1}\bar\psi_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}). \tag{52}$$

У випадку методу рядів Тейлора

$$\widetilde{\Phi}_1\left(x_0,u_0,0,h_1\right)=-h_1\frac{f(x_0,u_0)}{4k(x_0)}-\sum_{p=3}^{\bar m}\frac{h_1^{p-1}}{p!}\left[\sum_{j=0}^{p-2}\begin{pmatrix}p-1\\ j\end{pmatrix}\frac{p-j-1}{p-j}\frac{d^{p-j-2}f}{dx^{p-j-2}}\Big|_{x=x_0}\frac{d^j}{dx^j}\frac{1}{k(x)}\Big|_{x=x_0}\right],$$

$$\widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,0,h_1\right)=-\frac{1}{2}f(x_0,u_0)-\sum_{p=2}^{m}\frac{h_1^{p-1}}{(p-1)!(p+1)}\frac{d^{p-1}f}{dx^{p-1}}\Big|_{x=x_0},$$

$$\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right)=\left[1-(-1)^{\alpha+1}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}\left(\frac{1}{x_{j+(-1)^\alpha}}+\frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right]u'_{j+(-1)^\alpha}-$$

$$-(-1)^{\alpha+1}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}\frac{f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha})}{k_{j+(-1)^\alpha}}+\sum_{p=3}^{\bar m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{p-1}}{p!}\frac{d^pY_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)}{dx^p},$$

$$\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right)=-f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha})-\frac{(ku')_{j+(-1)^\alpha}}{x_{j+(-1)^\alpha}}+$$

$$+\sum_{p=2}^{m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{p-1}}{p!}\frac{d^pZ_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)}{dx^p},$$

$$\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right)=\frac{1}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}}+\sum_{p=2}^{\bar m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{p-1}}{p!}\left[\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\frac{1}{xk(x)}\right]\Big|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}.$$

Лема 4. *Нехай*

$$0<c_1\le k(x)\le c_2\quad\forall x\in[0,R],\quad k(x)\in Q^{m+1}[0,R],$$

$$f(x,u)\in\bigcup_{j=1}^{N}C^m\left([x_{j-1},x_j]\times\Omega([0,R],r+\triangle)\right),$$

і для чисельних методів (47) *існують розклади* (50)–(52), *тоді справджуються співвідношення*

$$Y_\alpha^j(x_j,u)=Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha},u)+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}), \tag{53}$$

$$Z_\alpha^j(x_j,u)=Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)+[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{m+1}\tilde\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha},u)+O(h_{j-1+\alpha}^{m+2}), \tag{54}$$

$$V_\alpha^j(x_j) = V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j) + h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}\bar\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}), \tag{55}$$
$$j = 3-\alpha,\ 4-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2.$$

Доведення. З того, що метод (47) має порядок точності $\bar m$ та виконуються умови гладкості, випливає, що існують розклади (50)–(52) (див., напр., [8, с.168]) Згідно з (50), (51)

$$Y_1^j(x_j,u) - Y_1^{(\bar m)j}(x_j,u) =$$
$$= Y_1^j(x_j,u) - u(x_j-h_j) - h_j\Phi_1(x_j-h_j, u(x_j-h_j), ku'|_{x=x_j-h_j}, h_j) = h_j^{\bar m+1}\psi_1^j(x_j-h_j,u) + O(h_j^{\bar m+2}), \tag{56}$$
$$Z_1^j(x_j,u) - Z_1^{(m)j}(x_j,u) =$$
$$= Z_1^j(x_j,u) - ku'|_{x=x_j-h_j} - h_j\Phi_2(x_j-h_j, u(x_j-h_j), ku'|_{x=x_j-h_j}, h_j) = h_j^{m+1}\tilde\psi_1^j(x_j-h_j,u) + O(h_j^{m+2}). \tag{57}$$

Зазначимо, що

$$Y_2^j(x_j,u) - Y_2^{(\bar m)j}(x_j,u) = Y_2^j(x_j,u) - u_{j+1} + h_{j+1}\Phi_1(x_{j+1}, u_{j+1}, (ku')_{j+1}, -h_{j+1}),$$
$$Z_2^j(x_j,u) - Z_2^{(m)j}(x_j,u) = Z_2^j(x_j,u) - (ku')_{j+1} + h_{j+1}\Phi_2(x_{j+1}, u_{j+1}, (ku')_{j+1}, -h_{j+1}).$$

Підставимо в рівності (56), (57) замість h_j величину $-h_{j+1}$ і врахуємо, що $Y_1^j(x_j,u) = Y_2^j(x_j,u)$, $Z_1^j(x_j,u) = Z_2^j(x_j,u)$, тоді отримаємо

$$Y_2^j(x_j,u) - u_{j+1} + h_{j+1}\Phi_1(x_{j+1}, u_{j+1}, (ku')_{j+1}, -h_{j+1}) = -h_{j+1}^{\bar m+1}\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u) + O(h_{j+1}^{\bar m+2}),$$
$$Z_2^j(x_j,u) - (ku')_{j+1} + h_{j+1}\Phi_2(x_{j+1}, u_{j+1}, (ku')_{j+1}, -h_{j+1}) = (-1)^{m+1}h_{j+1}^{m+1}\tilde\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u) + O(h_{j+1}^{m+2}).$$

Звідси випливають співвідношення (53), (54). Аналогічно до (53) доводиться рівність

$$\bar V_\alpha^j(x_j) = \bar V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j) + (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}\bar\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}),$$

з якої з урахуванням того, що $\bar V_\alpha^j(x) = (-1)^{\alpha+1}V_\alpha^j(x)$, випливає (55). ■

Замість ТТРС (22), (23), (45) можна тепер скористатися ТРС рангу $\bar m$ вигляду

$$y_{x,0}^{(\bar m)} = -\varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m)}), \quad a_2^{(\bar m)}y_{x,1}^{(\bar m)}/(\hbar_1 x_1) = -\varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m)}), \quad \frac{1}{x_j}\left(a^{(\bar m)}y_{\bar x}^{(\bar m)}\right)_{\hat x,j} = -\varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m)}), \tag{58}$$
$$j = 2,3,\ldots,N-1, \quad y_N^{(\bar m)} = \mu_2,$$

де

$$a^{(\bar m)}(x_j) = \left[\frac{1}{h_j}V_1^{(\bar m)j}(x_j)\right]^{-1}, \quad \varphi^{(\bar m)}(x_0,u) = \frac{1}{h_1}\left(u_0 - Y_1^{(\bar m)1}(x_1,u)\right),$$
$$\varphi^{(\bar m)}(x_1,u) = \frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^{(m)1}(x_1,u) - Z_1^{(m)1}(x_1,u) + \frac{Y_2^{(\bar m)1}(x_1,u) - u_2}{x_1V_2^{(\bar m)1}(x_1)}\right],$$
$$\varphi^{(\bar m)}(x_j,u) = \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u) + (-1)^\alpha\frac{Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{x_jV_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}\right].$$

Для доведення існування та єдиності розв'язку ТРС (58), а також для встановлення її точності необхідна

Лема 5. *Нехай виконані умови леми 4; тоді будуть виконуватися оцінки*

$$\left|a^{(\bar m)}(x_j) - a(x_j)\right| \le M|h|^{\bar m}, \tag{59}$$

$$\varphi^{(\bar m)}(x_0,u) - \varphi(x_0,u) = h_1^{\bar m}\psi_1^1(x_0,u) + O(h_1^{\bar m+1}), \tag{60}$$
$$\varphi^{(\bar m)}(x_j,u) - \varphi(x_j,u) =$$
$$= \left\{h_j^{m+1}\left[k(x)\left(\psi_1^j(x,u) - \bar\psi_1^j(x,u)xk(x)\frac{du}{dx}\right) - \tilde\psi_1^j(x,u)\right]_{x=x_j+0}\right\}_{\hat x} + O\left(\frac{h_j^{m+2}+h_{j+1}^{m+2}}{\hbar_j}\right), j = 1,2,\ldots,N-1, \tag{61}$$

якщо m непарне,

$$\varphi^{(\bar m)}(x_j,u) - \varphi(x_j,u) =$$

$$= \left\{ h_j^m \left[k(x) \left(\psi_1^j(x,u) - \bar{\psi}_1^j(x,u) x k(x) \frac{du}{dx} \right) \right]_{x=x_j+0} \right\}_{\hat{x}} + O\left(\frac{h_j^{m+1} + h_{j+1}^{m+1}}{\hbar_j} \right), \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{62}$$

якщо m парне; крім того

$$\begin{aligned} &\left| \varphi^{(\bar{m})}(x_0, u) \right| \le M|h|, \\ &\left| \varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) \right| \le K + M|h| \ \forall u \in \Omega(\widehat{\widetilde{\omega}}_h, r + \triangle), \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} &\left| \varphi^{(\bar{m})}(x_0, u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_0, v) \right| \le M|h| \|u - v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widetilde{\omega}}_h}, \\ &\left| \varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_j, v) \right| \le (L + M|h|) \|u - v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widetilde{\omega}}_h} \\ &\qquad \forall u, v \in \Omega(\widehat{\widetilde{\omega}}_h, r + \triangle), \quad j = 1, 2, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{64}$$

Тут і надалі через M позначатимемо різні сталі, що не залежать від $|h|$, якщо це не буде спричиняти непорозуміння.

Доведення. Нерівність (59) випливає з (55), а співвідношення (60) – з (48). Дійсно,

$$a^{(\bar{m})}(x_j) - a(x_j) = \frac{h_j [V_1^j(x_j) - V_1^{(\bar{m})j}(x_j)]}{V_1^j(x_j) V_1^{(\bar{m})j}(x_j)} = O(h_j^{\bar{m}}),$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_0, u) - \varphi(x_0, u) = \frac{1}{h_1} \left(Y_1^1(x_1, u) - Y_1^{(\bar{m})1}(x_1, u) \right) = h_1^{\bar{m}} \psi_1^1(x_0, u) + O(h_1^{\bar{m}+1}).$$

Доведемо (61), (62). Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \varphi^{(\bar{m})}(x_1, u) - \varphi(x_1, u) = \frac{1}{\hbar_1} \Bigg[&\sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^\alpha \left(Z_\alpha^{(m)1}(x_1, u) - Z_\alpha^1(x_1, u) \right) + \\ &+ \frac{1}{x_1} \left(\frac{Y_2^{(\bar{m})1}(x_1, u) - u_2}{V_2^{(\bar{m})1}(x_1)} - \frac{Y_2^1(x_1, u) - u_2}{V_2^1(x_1)} \right) \Bigg], \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) = \frac{1}{\hbar_j} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^\alpha \Bigg[&Z_\alpha^{(m)j}(x_j, u) - Z_\alpha^j(x_j, u) + \\ &+ \frac{(-1)^\alpha}{x_j} \left(\frac{Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)} - \frac{Y_\alpha^j(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^j(x_j)} \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{66}$$

З леми 3 та рівності

$$Y_\alpha^j(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha} = (-1)^\alpha h_{j-1+\alpha} \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} + O(h_{j-1+\alpha}^2)$$

маємо

$$Z_1^{(m)1}(x_1, u) - Z_1^1(x_1, u) = -h_1^{m+1} \tilde{\psi}_1^1(x_0, u) + O(h_1^{m+2}),$$

$$Z_\alpha^{(m)j}(x_j, u) - Z_\alpha^j(x_j, u) = -[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}]^{m+1} \tilde{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, u) + O(h_{j-1+\alpha}^{m+2}),$$

$$\frac{Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)} - \frac{Y_\alpha^j(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^j(x_j)} =$$

$$= \frac{Y_\alpha^j(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha} - (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1} \psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, u) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2})}{V_\alpha^j(x_j) - h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1} \bar{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2})} - \frac{Y_\alpha^j(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^j(x_j)} =$$

$$= -\frac{(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1} \psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{V_\alpha^j(x_j)} + \frac{(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2} \bar{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}) \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}}{\left[V_\alpha^j(x_j) \right]^2} + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1}). \tag{67}$$

З урахуванням (67) та співвідношення

$$V_\alpha^j(x_j) = \frac{h_{j-1+\alpha}}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}} + O(h_{j-1+\alpha}^2),$$

рівності (65), (66) за непарних m зводяться до

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_1,u)-\varphi(x_1,u)=\frac{1}{\hbar_1}\Big\{\frac{1}{x_1}\big[h_2^{m+1}x_2k_2\psi_1^2(x_2,u)-h_1^{m+1}x_0k_0\psi_1^1(x_0,u)-h_2^{m+1}x_2k_2\bar{\psi}_1^2(x_2)(xku')_2+$$

$$+h_1^{m+1}x_0k_0\bar{\psi}_1^1(x_0)(xku')_0\big]-h_2^{m+1}\tilde{\psi}_1^2(x_2,u)+h_1^{m+1}\tilde{\psi}_1^1(x_0,u)\Big\}+O\left(\frac{h_1^{m+2}+h_2^{m+2}}{\hbar_1}\right), \tag{68}$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)=\frac{1}{\hbar_j}\Big\{\frac{1}{x_j}\big[h_{j+1}^{m+1}k_{j+1}\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u)-h_j^{m+1}k_{j-1}\psi_1^j(x_{j-1},u)-h_{j+1}^{m+1}k_{j+1}\bar{\psi}_1^{j+1}(x_{j+1})(xku')_{j+1}+$$

$$+h_j^{m+1}k_{j-1}\bar{\psi}_1^j(x_{j-1})(xku')_{j-1}\big]-h_{j+1}^{m+1}\tilde{\psi}_1^{j+1}(x_{j+1},u)+h_j^{m+1}\tilde{\psi}_1^j(x_{j-1},u)\Big\}+O\left(\frac{h_j^{m+2}+h_{j+1}^{m+2}}{\hbar_j}\right), \tag{69}$$

а за парних m – до виразів

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_1,u)-\varphi(x_1,u)=\frac{1}{x_1\hbar_1}\big[h_2^m x_2k_2\psi_1^2(x_2,u)-h_1^m x_0k_0\psi_1^1(x_0,u)-$$

$$-h_2^m x_2k_2\bar{\psi}_1^2(x_2)(xku')_2+h_1^m x_0k_0\bar{\psi}_1^1(x_0)(xku')_0\big]+O\left(\frac{h_1^{m+1}+h_2^{m+1}}{\hbar_1}\right), \tag{70}$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)=\frac{1}{x_j\hbar_j}\big[h_{j+1}^m k_{j+1}\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u)-h_j^m k_{j-1}\psi_1^j(x_{j-1},u)-$$

$$-h_{j+1}^m k_{j+1}\bar{\psi}_1^{j+1}(x_{j+1})(xku')_{j+1}+h_j^m k_{j-1}\bar{\psi}_1^j(x_{j-1})(xku')_{j-1}\big]+O\left(\frac{h_j^{m+1}+h_{j+1}^{m+1}}{\hbar_j}\right). \tag{71}$$

Оскільки

$$k_{j-1}\psi_1^j(x_{j-1},u)=k_j\psi_1^j(x_j,u)+O(h_j),\quad \tilde{\psi}_1^j(x_{j-1},u)=\tilde{\psi}_1^j(x_j,u)+O(h_j),$$
$$k_{j-1}\bar{\psi}_1^j(x_{j-1})(xku')_{j-1}=k_j\bar{\psi}_1^j(x_j)(xku')_j+O(h_j),$$

то з урахуванням $x_j=x_{j+(-1)^\alpha}+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}$ із (68)–(71) випливають оцінки (61), (62).

Доведемо нерівності (63), (64). Із (46), (47) випливають співвідношення

$$\widetilde{\Phi}_1(x,u,0,0)=0,\quad \frac{\partial\widetilde{\Phi}_1(x,u,0,0)}{\partial h}=-\frac{f(x,u)}{4k(x)},\quad \widetilde{\Phi}_2(x,u,0,0)=-\frac{f(x,u)}{2},$$

$$\Phi_1(x,u,y,0)=\frac{y}{k(x)},\quad \frac{\partial\Phi_1(x,u,y,0)}{\partial h}=-\frac{1}{2}\left(\frac{f(x,u)}{k(x)}+\frac{y}{k(x)x}+\frac{yk'(x)}{k^2(x)}\right)$$

$$\Phi_2(x,u,y,0)=-f(x,u)-\frac{y}{x},\quad \Phi_3(x,0,0)=\frac{1}{xk(x)},\quad \frac{\partial\Phi_3(x,0,0)}{\partial h}=-\frac{1}{2xk(x)}\left(\frac{1}{x}+\frac{k'(x)}{k(x)}\right).$$

Отже, справджуються рівності

$$Y_1^{(\bar{m})1}(x_1,u)=u_0+h_1\widetilde{\Phi}_1(x_0,u_0,0,0)+h_1^2\frac{\partial\widetilde{\Phi}_1(x_0,u_0,0,0)}{\partial h}+\frac{h_1^3}{2}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_1\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar{h}}\right)}{\partial h^2}=$$

$$=u_0-h_1^2\frac{f(x_0,u_0)}{4k_0}+\frac{h_1^3}{2}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_1\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar{h}}\right)}{\partial h^2},$$

$$Z_1^{(m)1}(x_1,u)=h_1\widetilde{\Phi}_2(x_0,u_0,0,0)+h_1^2\frac{\partial\widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,0,\tilde{\bar{h}}\right)}{\partial h}=-h_1\frac{f(x_0,u_0)}{2}+h_1^2\frac{\partial\widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar{h}}\right)}{\partial h},$$

$$Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u)=u_{j+(-1)^\alpha}+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\left[1-\frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}}{2}\left(\frac{1}{x_{j+(-1)^\alpha}}+\frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right]u'_{j+(-1)^\alpha}-$$

$$-\frac{h_{j-1+\alpha}^2}{2}\frac{f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha})}{k_{j+(-1)^\alpha}}+(-1)^{\alpha+1}\frac{h_{j-1+\alpha}^3}{2}\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\bar{h}\right)}{\partial h^2},$$

$$Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)=\left(1-\frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}}{x_{j+(-1)^\alpha}}\right)(ku')_{j+(-1)^\alpha}-(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha})+$$

$$h_{j-1+\alpha}^2 \frac{\partial \Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, (ku')_{j+(-1)^\alpha}, \tilde{h}\right)}{\partial h},$$

$$V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j) = \frac{h_{j-1+\alpha}}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}} + (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}^2 \frac{\partial \Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, \check{h}\right)}{\partial h},$$

$$V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j) = \frac{h_{j-1+\alpha}}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}} \left(1 - (-1)^{\alpha+1} \frac{h_{j-1+\alpha}}{2} \left(\frac{1}{x_{j+(-1)^\alpha}} + \frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right) + h_{j-1+\alpha}^3 \frac{\partial^2 \Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, \check{h}\right)}{\partial h^2}.$$

Звідси

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_0, u) = \frac{1}{h_1}\left(y_0^{(\bar{m})} - Y_1^{(\bar{m})1}(x_1, u)\right) = \frac{1}{h_1}\left(h_1^2 \frac{f(x_0, u_0)}{4k_0} + \frac{h_1^3}{2} \frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}_1\left(x_0, u_0, 0, \hat{\tilde{h}}\right)}{\partial h^2}\right) = h_1 \frac{f(x_0, u_0)}{4k_0} + O(h_1^2),$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_1, u) = \frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^{(m)1}(x_1, u) - Z_1^{(m)1}(x_1, u) + \frac{Y_2^{(\bar{m})1}(x_1, u) - u_2}{x_1 V_2^{(\bar{m})1}(x_1)}\right] = \frac{1}{\hbar_1}\left\{\frac{h_1}{2} f(x_0, u_0) + \right.$$

$$+ \left[1 - \frac{1}{x_1 V_2^{(\bar{m})1}(x_1)} \frac{h_2}{2k_2}\right] h_2 f(x_2, u_2) + \left[1 + \frac{h_2}{x_2} - \frac{h_2}{x_1 V_2^{(\bar{m})1}(x_1)} \left(\frac{1}{k_2} + \frac{h_2}{2}\left(\frac{k'_2}{k_2^2} + \frac{1}{(xk)_2}\right)\right)\right] (ku')_2 -$$

$$\left. -h_1^2 \frac{\partial \widetilde{\Phi}_2\left(x_0, u_0, 0, \hat{\tilde{h}}\right)}{\partial h} + h_2^2 \frac{\partial \Phi_2\left(x_2, u_2, (ku')_2, \tilde{h}\right)}{\partial h} - \frac{h_2^3}{2x_1 V_2^{(\bar{m})1}(x_1)} \frac{\partial^2 \Phi_1\left(x_2, u_2, (ku')_2, \bar{h}\right)}{\partial h^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{h_1}{2} f(x_0, u_0) + \frac{h_2}{2} f(x_2, u_2)\right) + O\left(\frac{h_1^2 + h_2^2}{\hbar_1}\right),$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) = \frac{1}{\hbar_j} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^\alpha \left[Z_\alpha^{(m)j}(x_j, u) + (-1)^\alpha \frac{Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{x_j V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\hbar_j} \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{\left[1 - \frac{1}{x_j V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)} \frac{h_{j-1+\alpha}}{2k_{j+(-1)^\alpha}}\right] h_{j-1+\alpha} f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}) + \right.$$

$$+ (-1)^\alpha \left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}}{x_{j+(-1)^\alpha}} - \frac{h_{j-1+\alpha}}{x_j V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{k_{j+(-1)^\alpha}} - \frac{(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}}{2} \left(\frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}^2} + \frac{1}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right)\right] (ku')_{j+(-1)^\alpha} +$$

$$+ (-1)^\alpha h_{j-1+\alpha}^2 \frac{\partial \Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, (ku')_{j+(-1)^\alpha}, \tilde{h}\right)}{\partial h} +$$

$$\left. + \frac{(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}^3}{2x_j V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)} \frac{\partial^2 \Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, (ku')_{j+(-1)^\alpha}, \bar{h}\right)}{\partial h^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\hbar_j} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h_{j-1+\alpha}}{2} f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}) + O\left(\frac{h_j^2 + h_{j+1}^2}{\hbar_j}\right).$$

Тоді

$$\left|\varphi^{(\bar{m})}(x_0, u)\right| \le M|h|, \quad |\varphi^{(\bar{m})}(x_j, u)| \le K + M|h|.$$

Доведемо оцінку (64). Оскільки

$$|\varphi^{(\bar{m})}(x_0, u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_0, v)| \le \frac{h_1}{4k_0} |f(x_0, u_0) - f(x_0, v_0)| + \frac{h_1^2}{2} \left|\frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}_1\left(x_0, u_0, 0, \hat{\tilde{h}}\right)}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}_1\left(x_0, v_0, 0, \hat{\tilde{h}}\right)}{\partial h^2}\right|,$$

$$|\varphi^{(\bar{m})}(x_1, u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_1, v)| \le \frac{1}{\hbar_1}\left[\frac{h_1}{2} |f(x_0, u_0) - f(x_0, v_0)| + \frac{h_2}{2} |f(x_2, u_2) - f(x_2, v_2)| \times\right.$$

$$\times\left[1+\frac{h_2^2}{|V_2^{(\bar m)1}(x_1)|}\left|\frac{\partial\Phi_3\left(x_2,0,\check h\right)}{\partial h}\right|\right]+\frac{h_2^3}{2x_2|V_2^{(\bar m)1}(x_1)|}\left|\frac{\partial^2\Phi_3\left(x_2,0,\hat h\right)}{\partial h^2}\right|\|xku'-xkv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}+$$

$$+h_1^2\left|\frac{\partial\widetilde\Phi_2\left(x_0,u_0,0,\hat{\hat h}\right)}{\partial h}-\frac{\partial\widetilde\Phi_2\left(x_0,v_0,0,\hat{\hat h}\right)}{\partial h}\right|+h_2^2\left|\frac{\partial\Phi_2\left(x_2,u_2,(ku')_2,\tilde h\right)}{\partial h}-\frac{\partial\Phi_2\left(x_2,v_2,(kv')_2,\tilde h\right)}{\partial h}\right|+$$

$$+\frac{h_2^3}{2x_1|V_2^{(\bar m)1}(x_1)|}\left|\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_2,u_2,(ku')_2,\bar h\right)}{\partial h^2}-\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_2,v_2,(kv')_2,\bar h\right)}{\partial h^2}\right|\Bigg],$$

$$|\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_j,v)|\le\frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}|f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha})-f(x_{j+(-1)^\alpha},v_{j+(-1)^\alpha})|\times\right.$$

$$\times\left[1+\frac{h_{j-1+\alpha}^2}{|V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)|}\left|\frac{\partial\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,\check h\right)}{\partial h}\right|\right]+\frac{h_{j-1+\alpha}^3}{2x_j|V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)|}\left|\frac{\partial^2\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,\tilde h\right)}{\partial h^2}\right|\|xku'-xkv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}+$$

$$+\frac{h_{j-1+\alpha}^3}{2x_j|V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)|}\left|\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\bar h\right)}{\partial h^2}-\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},v_{j+(-1)^\alpha},(kv')_{j+(-1)^\alpha},\bar h\right)}{\partial h^2}\right|+$$

$$\left.+h_{j-1+\alpha}^2\left|\frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\tilde h\right)}{\partial h}-\frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},v_{j+(-1)^\alpha},(kv')_{j+(-1)^\alpha},\tilde h\right)}{\partial h}\right|\right\},$$

то за формулою скінченних приростів знайдуться $\hat u$, $\hat y$, $\bar u$, $\bar y$, $\tilde u$, $\tilde y$ такі, що

$$|\varphi^{(\bar m)}(x_0,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_0,v)|\le M|h|\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-},$$

$$|\varphi^{(\bar m)}(x_1,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_1,v)|\le(L+M|h|)\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-}+M|h|^2\|xku'-xkv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}+$$

$$+M|h|\left\{\left[\left|\frac{\partial^2\widetilde\Phi_2\left(x_0,\hat u,0,\hat h\right)}{\partial h\partial u}\right|+\left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_2,\tilde u,(ku')_2,\tilde h\right)}{\partial h\partial u}\right|+\left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_2,\bar u,(ku')_2,\bar h\right)}{\partial h^2\partial u}\right|\right]\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-}\right\}+$$

$$+M|h|\left\{\left[\left|\frac{\partial^2\widetilde\Phi_2\left(x_0,u_0,\hat y,\hat h\right)}{\partial h\partial y}\right|+\left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_2,u_2,\tilde y,\tilde h\right)}{\partial h\partial y}\right|+\left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_2,u_2,\bar y,\bar h\right)}{\partial h^2\partial y}\right|\right]\|xku'-xkv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}\right\},$$

$$|\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_j,v)|\le(L+M|h|)\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-}+M|h|^2\|xku'-xkv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}+$$

$$+M|h|\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\left[\left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},\tilde u,(ku')_{j+(-1)^\alpha},\tilde h\right)}{\partial h\partial u}\right|+\left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},\bar u,(ku')_{j+(-1)^\alpha},\bar h\right)}{\partial h^2\partial u}\right|\right]\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-}\right\}+$$

$$+M|h|\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\left[\left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},\tilde y,\tilde h\right)}{\partial h\partial y}\right|+\left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},\bar y,\bar h\right)}{\partial h^2\partial y}\right|\right]\|xku'-xkv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}\right\}.$$

Звідси отримаємо оцінку (64). ■

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (2)–(5), *леми 5, тоді* $\exists h_0>0$ *таке, що при* $|h|\le h_0$ *ТРС (58) має єдиний розв'язок, точність якого характеризується оцінкою*

$$\left\|y^{(\bar m)}-u\right\|_{1,\infty,\widehat{\widetilde\omega}_h}^{*}=\max\left\{\left\|y^{(\bar m)}-u\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-},\ \left\|xk\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}-xk\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}\right\}\le M|h|^{\bar m},$$

де

$$\left[xk\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_1}=x_1Z_1^{(m)1}(x_1,y^{(\bar m)}),$$

$$\left[xk\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_j}=x_jZ_1^{(m)j}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)+\frac{y_j^{(\bar m)}-Y_1^{(\bar m)j}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)}{V_1^{(\bar m)j}(x_j)},\quad j=2,3,...,N.$$

Доведення. Покажемо, що за умов теореми ТРС рангу $\bar{m}$ (58) має єдиний розв'язок $y^{(\bar{m})}(x),\ x \in \hat{\bar{\omega}}_h$. Використаємо принцип стискувальних відображень. Розглянемо операторне рівняння

$$y^{(\bar{m})}(x) = \Re_h(x, (y_j^{(\bar{m})})_{j=0}^N) = \sum_{\xi \in \hat{\omega}_h} \hbar(\xi) G^{(\bar{m})}(x,\xi) \varphi^{(\bar{m})}\left(\xi, y^{(\bar{m})}(\xi)\right) + \mu_2 + h_1 \varphi^{(\bar{m})}\left(x_0, y^{(\bar{m})}(x_0)\right) \delta_{i,0},$$

де $\delta_{i,j}$ – символ Кронеккера, $G^{(\bar{m})}(x,\xi)$ – функція Гріна задачі (58) вигляду

$$G^{(\bar{m})}(x,\xi) = \begin{cases} \xi V^{(\bar{m})}(\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ \xi V^{(\bar{m})}(x), & \xi \le x \le R, \end{cases}$$

$$V^{(\bar{m})}(x_j) = \sum_{k=j+1}^{N} \frac{h_k}{a^{(\bar{m})}(x_k)} = \sum_{k=j+1}^{N} V_1^{(\bar{m})k}(x_k).$$

Зауважимо, що

$$\left[xk\frac{dy^{(\bar{m})}}{dx}\right]_{x=x_1} = O\left(|h|^2\right), \quad \left[xk\frac{dy^{(\bar{m})}}{dx}\right]_{x=x_j} = a^{(\bar{m})}(x_j) y_{\bar{x},j}^{(\bar{m})} + O\left(|h|\right), \quad j = 2,3,...,N.$$

Враховуючи формулу підсумовування за частинами отримаємо

$$\sum_{j=1}^{N-1} G^{(\bar{m})}(x_i,x_j)\hbar_j = V^{(\bar{m})}(x_i)\sum_{j=1}^{i} x_j\hbar_j + \sum_{j=i+1}^{N-1} V^{(\bar{m})}(x_j) x_j \hbar_j =$$

$$= \frac{1}{2} V^{(\bar{m})}(x_i) x_{i+1} x_i + \frac{1}{2}\sum_{j=i+1}^{N-1} V^{(\bar{m})}(x_j)(x_j x_{j-1})_{\hat{x},j}\hbar_j = -\frac{1}{2}\sum_{j=i+1}^{N}\left(V^{(\bar{m})}(x_j) - V^{(\bar{m})}(x_{j-1})\right) x_j x_{j-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=i+1}^{N} V_1^{(\bar{m})j}(x_j) x_j x_{j-1} \le \frac{1}{2c_1}\sum_{j=i+1}^{N} x_j h_j \le \frac{1}{4c_1}\sum_{j=i+1}^{N}\left(x_j^2 + h_j^2\right) \le \frac{R^2}{4c_1} + M|h|,$$

$$\left|a^{(\bar{m})}(x_i)\right| \sum_{j=1}^{N-1}\left|\left(G^{(\bar{m})}(x_i,x_j)\right)_{\bar{x},i}\right| \hbar_j = \frac{h_i\left|V_{\bar{x},i}^{(\bar{m})}(x_i)\right|}{\left|V_1^{(\bar{m})i}(x_i)\right|}\sum_{j=1}^{i-1} x_j\hbar_j = \sum_{j=1}^{i-1} x_j\hbar_j = \frac{1}{2}x_i x_{i-1} \le \frac{R^2}{2}.$$

Отже,

$$\left\|\Re_h(x,(u_j)_{j=0}^N) - u^{(0)}(x)\right\|_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}^* \le \max\left\{\frac{R^2}{4c_1} + M|h|, \frac{R^2}{2}\right\}(K + M|h|) =$$

$$= \frac{KR^2}{4c_1}\max(1,2c_1) + M|h| = r + M|h| \le r + \Delta \quad \forall (u_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\bar{\omega}}_h, r+\Delta),$$

тобто оператор $\Re_h(x,(u_j)_{j=0}^N)$ переводить $\Omega(\widehat{\bar{\omega}}_h, r+\Delta)$ в себе.

Крім того, враховуючи нерівності (64)

$$\begin{aligned} &\left\|\Re_h(x,(u_j)_{j=0}^N) - \Re_h(x,(v_j)_{j=0}^N)\right\|_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}^* \le \max\left\{\frac{R^2}{4c_1} + M|h|, \frac{R^2}{2}\right\} \max_{j=\overline{1,N-1}}\left|\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_j,v)\right| + \\ &+ h_1\left|\varphi^{(\bar{m})}(x_0,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_0,v)\right| \le \left(\frac{LR^2}{4c_1}\max(1,2c_1) + M_2|h|\right)\|u-v\|_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}^* = q_2\|u-v\|_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}^* \\ &\forall (u_j)_{j=0}^N, (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\bar{\omega}}_h, r+\Delta). \end{aligned} \tag{72}$$

Якщо вибрати h_0 таким, що $q_2 = q + M_2|h| < 1$, то відображення $\Re_h(x,(u_j)_{j=0}^N)$ стискувальне.

Для похибки $z(x) = y^{(\bar{m})} - u(x)$, $x \in \hat{\omega}_h$ отримаємо задачу

$$\begin{aligned} &z_{x,0} = \varphi(x_0,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_0, y^{(\bar{m})}), \\ &a_2^{(\bar{m})} z_{x,1}/(\hbar_1 x_1) = \varphi(x_1,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_1, y^{(\bar{m})}) + \left(a_2 - a_2^{(\bar{m})}\right) u_{x,1}/(\hbar_1 x_1), \\ &\frac{1}{x_j}(a^{(\bar{m})} z_{\bar{x}})_{\hat{x},j} = \varphi(x_j,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_j, y^{(\bar{m})}) + \frac{1}{x_j}\left[\left(a - a^{(\bar{m})}\right) u_{\bar{x}}\right]_{\hat{x},j}, \quad j = 2,3,\ldots,N-1, \\ &z_N = 0, \end{aligned}$$

розв'язок якої за допомогою функції Гріна можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} z_i &= \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar m)}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)-\varphi\left(x_j,u\right)\right]+\sum_{j=2}^{N-1}\hbar_j\frac{1}{x_j}G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\left[\left(a^{(\bar m)}(x_j)-a(x_j)\right)u_{\bar x,j}\right]_{\hat x,j}+\\ &+\frac{1}{x_1}G^{(\bar m)}(x_i,x_1)\left(a_2^{(\bar m)}-a_2\right)u_{x,1}+h_1\left\{\varphi^{(\bar m)}\left(x_0,y^{(\bar m)}\right)-\varphi\left(x_0,u\right)\right\}\delta_{i,0}=\\ &=\sum_{j=2}^{N}h_j\left[\frac{1}{x_j}G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\right]_{\bar x,j}\left[a(x_j)-a^{(\bar m)}(x_j)\right]u_{\bar x,j}+\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_j G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar m)}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)-\varphi\left(x_j,u\right)\right]+\\ &+h_1\left\{\varphi^{(\bar m)}\left(x_0,y^{(\bar m)}\right)-\varphi\left(x_0,u\right)\right\}\delta_{i,0}. \end{aligned} \tag{73}$$

Для непарного m з урахуванням (60)–(61), з (73) отримаємо

$$\begin{aligned} z_i &= \sum_{j=2}^{N}h_j\left\{\frac{1}{x_j}G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\right\}_{\bar x,j}\left[a(x_j)-a^{(\bar m)}(x_j)\right]u_{\bar x,j}-\\ &-\sum_{j=1}^{N}h_j^{m+2}\left\{G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\right\}_{\bar x,j}\left[k(x)\left(\psi_1^j(x,u)-\bar\psi_1^j(x)xk(x)\frac{du}{dx}\right)-\tilde\psi_1^j(x,u)\right]_{x=x_j+0}+\\ &+\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_j G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar m)}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)-\varphi^{(\bar m)}\left(x_j,u\right)\right]+h_1\left\{\varphi^{(\bar m)}\left(x_0,y^{(\bar m)}\right)-\varphi^{(\bar m)}\left(x_0,u\right)\right\}\delta_{i,0}+O(|h|^{m+1}). \end{aligned}$$

Тоді

$$|z_i|\le\left(\frac{1}{c_1x_i}+M|h|\right)\|a-a^{(m+1)}\|_{0,1,\hat\omega_h^+\setminus x_1}\|u_{\bar x}\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}+M|h|^{m+1}+q_2\|z\|^*_{1,\infty,\hat{\bar\omega}_h}\le M|h|^{m+1}+q_2\|z\|^*_{1,\infty,\hat{\bar\omega}_h}.$$

Якщо m – парне, то, враховуючи (60), (62), рівність (73) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} z_i &= \sum_{j=2}^{N}h_j\left\{\frac{1}{x_j}G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\right\}_{\bar x,j}\left[a(x_j)-a^{(\bar m)}(x_j)\right]u_{\bar x,j}-\\ &-\sum_{j=1}^{N}h_j^{m+1}\left\{G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\right\}_{\bar x,j}\left[k(x)\left(\psi_1^j(x,u)-\bar\psi_1^j(x)xk(x)\frac{du}{dx}\right)\right]_{x=x_j+0}+\\ &+\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_j G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar m)}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)-\varphi^{(\bar m)}\left(x_j,u\right)\right]+h_1\left\{\varphi^{(\bar m)}\left(x_0,y^{(\bar m)}\right)-\varphi^{(\bar m)}\left(x_0,u\right)\right\}\delta_{i,0}+O(|h|^{m}). \end{aligned}$$

Звідси

$$|z_i|\le\left(\frac{1}{c_1x_i}+M|h|\right)\|a-a^{(m)}\|_{0,1,\hat\omega_h^+\setminus x_1}\|u_{\bar x}\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}+M|h|^{m}+q_2\|z\|^*_{1,\infty,\hat{\bar\omega}_h}\le M|h|^{m}+q_2\|z\|^*_{1,\infty,\hat{\bar\omega}_h}.$$

Отже,

$$|z_i|\le M|h|^{\bar m}+q_2\|z\|^*_{1,\infty,\hat{\bar\omega}_h}.\qquad \|z\|_{1,\infty,\hat{\bar\omega}_h}\le M_1|h|^{\bar m}.$$

Враховуючи рівність $y_j^{(\bar m)}=Y_1^j(x_j,y_j^{(\bar m)})$ (див. лему 1), отримаємо

$$\left|\left[xk\frac{dz}{dx}\right]_{x=x_1}\right|\le x_1\left|Z_1^{(m)1}(x_1,y^{(\bar m)})-Z_1^1(x_1,y^{(\bar m)})\right|+\left|x_1Z_1^1(x_1,y^{(\bar m)})-x_1Z_1^1(x_1,u)\right|,$$

$$\begin{aligned}\left|\left[xk\frac{dz}{dx}\right]_{x=x_j}\right| &\le x_j\left|Z_1^{(m)j}(x_j,y^{(\bar m)})-Z_1^j(x_j,y^{(\bar m)})\right|+\left|x_jZ_1^j(x_j,y^{(\bar m)})-x_jZ_1^j\left(x_j,u\right)\right|+\\ &+\frac{1}{\left|V_1^{(\bar m)j}(x_j)\right|}\left|Y_1^j(x_j,y^{(\bar m)})-Y_1^{(\bar m)j}(x_j,y^{(\bar m)})\right|,\quad j=2,3,...,N.\end{aligned}$$

Зауважимо, що розв'язок ТТРС (22) можна записати у вигляді

$$u(x)=\Re_h(x,(u_j)_{j=0}^N)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}G(x,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\mu_2, \tag{74}$$

де $G(x,\xi)$— функція Гріна задачі (1), функція $u(x)$ в правій частині(74) визначається формулою

$$u(x) = Y_1^j(x,u), \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1,2,...,N.$$

Оскільки оператор $\Re_h(x,(u_j)_{j=0}^N)$ є стискувальний, то

$$\left| x_j Z_1^j(x_j, y^{(\bar m)}) - x_j Z_1^j\,(x_j,u) \right| \le \left\| \Re_h(x,(y_j^{\bar m})_{j=0}^N) - \Re_h(x,(u_j)_{j=0}^N) \right\|^*_{1,\infty,\widehat{\widetilde{\omega}}_h} \le$$

$$\le (q + M_1|h|)\|y^{\bar m} - u\|^*_{1,\infty,\widehat{\widetilde{\omega}}_h} = q_1\|y^{\bar m} - u\|^*_{1,\infty,\widehat{\widetilde{\omega}}_h}, \quad j = 1,2,...,N.$$

Тоді

$$\left| \left[xk\frac{dz}{dx} \right]_{x=x_j} \right| \le M|h|^{\bar m} + q_1\|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\widetilde{\omega}}_h}, \quad j = 1,2,...,N.$$

Отже,

$$\|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\widetilde{\omega}}_h} \le \frac{M|h|^{\bar m}}{1 - \max(q_1,q_2)},$$

з якої в силу того, що $\max(q_1,q_2) < 1$ при $|h| \le h_0$ випливає

$$\|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\widetilde{\omega}}_h} \le M|h|^{\bar m}.$$

Теорема доведена. ■

Розв'язок нелінійної ТРС (58) можна знайти за методом послідовних наближень.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови Теореми 3, тоді розв'язок задачі (58) можна знайти за допомогою методу послідовних наближень*

$$\begin{aligned} &y_{x,0}^{(\bar m,n)} = -\varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n-1)}), \quad a_2^{(\bar m)} y_{x,1}^{(\bar m,n)}/(\hbar_1 x_1) = -\varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n-1)}), \\ &\frac{1}{x_j}\left(a^{(\bar m)} y_{\bar x}^{(\bar m,n)}\right)_{\hat x,j} = -\varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n-1)}), \quad j = 2,3,\ldots,N-1, \\ &y_N^{(\bar m,n)} = \mu_2, \quad n = 1,2,\ldots, \quad y_j^{(\bar m,0)} = \mu_2, \quad j = 0,1,\ldots,N \end{aligned} \tag{75}$$

і справджується оцінка

$$\left\| y^{(\bar m,n)} - u \right\|^*_{1,\infty,\hat{\widetilde{\omega}}_h} \le M(|h|^{\bar m} + q_2^n),$$

де

$$\left[xk\frac{dy^{(\bar m,n)}}{dx} \right]_{x=x_1} = x_1 Z_1^{(m)1}(x_1, y^{(\bar m,n)}),$$

$$\left[xk\frac{dy^{(\bar m,n)}}{dx} \right]_{x=x_j} = x_j Z_1^{(m)j}\left(x_j, y^{(\bar m,n)}\right) + \frac{y_j^{(\bar m)} - Y_1^{(\bar m)j}\left(x_j, y^{(\bar m,n)}\right)}{V_1^{(\bar m)j}(x_j)}, \quad j = 2,3,...,N,$$

стала M не залежить від $|h|, m, n$, а величина $q_2 = q + M_2|h| < 1$.

Доведення. В силу теореми 3 маємо

$$\left\| y^{(\bar m,n)} - u \right\|^*_{1,\infty,\widehat{\widetilde{\omega}}_h} \le \left\| y^{(\bar m)} - u \right\|^*_{1,\infty,\widehat{\widetilde{\omega}}_h} + \left\| y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m)} \right\|^*_{1,\infty,\widehat{\widetilde{\omega}}_h} \le M|h|^{\bar m} + \left\| y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m)} \right\|^*_{1,\infty,\widehat{\widetilde{\omega}}_h}. \tag{76}$$

Послідовність наближень

$$y^{(\bar m,n)}(x) = \Re_h(x, (y^{(\bar m,n-1)})_{j=0}^N), \quad x \in \hat{\widetilde{\omega}}_h, \quad , n = 1,2,...$$

збігається (див. доведення теореми 3) і має місце оцінка швидкості збіжності

$$\left\| y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m)} \right\|^*_{0,\infty,\widehat{\widetilde{\omega}}_h} \le \frac{q_2^n}{1 - q_2}(r + \Delta). \tag{77}$$

З нерівностей (76), (77) випливає оцінка (75). ■

З практичного погляду для обчислення розв'язку ТРС (58) доцільніше використовувати ітераційний метод Ньютона. Лінеаризуємо (58) з урахуванням рівностей

$$\varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n)}) = \varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n-1)}) + \frac{h_1}{4k_0}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} + O(h_1^2),$$

$$\varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n)}) = \varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n-1)}) + \frac{h_1}{2\hbar_1}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} + \\ + \frac{h_2}{2\hbar_1}\frac{x_2}{x_1}\frac{\partial f(x_2, y_2^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_2^{(\bar m,n)} + O\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{\hbar_1}\right),$$

$$\varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n)}) = \varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n-1)}) + \frac{h_j}{2\hbar_j}\frac{x_{j-1}}{x_j}\frac{\partial f(x_{j-1}, y_{j-1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j-1}^{(\bar m,n)} + \\ + \frac{h_{j+1}}{2\hbar_1}\frac{x_{j+1}}{x_j}\frac{\partial f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j+1}^{(\bar m,n)} + O\left(\frac{h_j^2+h_{j+1}^2}{\hbar_j}\right),$$

тоді модифікований ітераційний метод Ньютона матиме вигляд

$$\nabla y_{x,0}^{(\bar m,n)} + \frac{h_1}{4k_0}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} = -\varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n-1)}) - y_{x,0}^{(\bar m,n-1)},$$

$$\frac{a_2^{(\bar m)}\nabla y_{x,1}^{(\bar m)}}{\hbar_1 x_1} + \frac{h_1}{2\hbar_1}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} + \frac{h_2}{2\hbar_1}\frac{x_2}{x_1}\frac{\partial f(x_2, y_2^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_2^{(\bar m,n)} = -\varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n-1)}) - \frac{a_2^{(\bar m)} y_{x,1}^{(\bar m,n-1)}}{\hbar_1 x_1},$$

$$\frac{1}{x_j}\left(a^{(\bar m)}\nabla y_{\bar x}^{(\bar m,n)}\right)_{\hat x,j} + \frac{h_j}{2\hbar_j}\frac{x_{j-1}}{x_j}\frac{\partial f(x_{j-1}, y_{j-1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j-1}^{(\bar m,n)} + \frac{h_{j+1}}{2\hbar_1}\frac{x_{j+1}}{x_j}\frac{\partial f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j+1}^{(\bar m,n)} = \\ = -\varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n-1)}) + \frac{1}{x_j}\left(a^{(\bar m)} y_{\bar x}^{(\bar m,n-1)}\right)_{\hat x,j}, \quad \nabla y_N^{(\bar m,n)} = 0, \tag{78}$$

$$y_j^{(\bar m,n)} = y_j^{(\bar m,n-1)} + \nabla y_j^{(\bar m,n)}, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \quad n = 1, 2, \ldots$$

IV. Чисельні експерименти

Приклад 1. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\frac{du}{dx}\right] = u^3 - 3u^5, \quad x \in (0,1), \quad \lim_{x\to 0} x\frac{du}{dx} = 0, \quad u(1) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

з точним розв'язком $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Задачу будемо розв'язувати чисельно на рівномірній сітці $\overline{\omega}_h = \{x_j = jh,$ $j = 0, 1, \ldots, N,\ h = 1/N\}$ за допомогою схеми (58) при $m = \bar m = 4$. Для розв'язування допоміжних задач Коші (42), (43) застосуємо метод рядів Тейлора четвертого порядку точності, тоді отримаємо

$$Y_1^{(4)1}(x_1, u) = u_0 - \frac{h^2}{4}f(0, u_0) - \frac{h^3}{9}\frac{df(0,u_0)}{dx} - \frac{h^4}{32}\frac{d^2 f(0,u_0)}{dx^2},$$

$$Z_1^{(4)1}(x_1, u) = -\frac{h}{2}f(0, u_0) - \frac{h^2}{3}\frac{df(0,u_0)}{dx} - \frac{h^3}{8}\frac{d^2 f(0,u_0)}{dx^2} - \frac{h^4}{30}\frac{d^3 f(0,u_0)}{dx^3},$$

$$Y_\alpha^{(4)j}(x_j, u) = u_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1}h\left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{2(j+(-1)^\alpha)} + \frac{1}{3(j+(-1)^\alpha)^2} - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{4(j+(-1)^\alpha)^3}\right]\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} - \\ -\frac{h^2}{2}\left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{3(j+(-1)^\alpha)} + \frac{1}{4(j+(-1)^\alpha)^2}\right] f\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}\right) - \\ -(-1)^{\alpha+1}\frac{h^3}{6}\left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{4(j+(-1)^\alpha)}\right]\frac{df(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha})}{dx} - \frac{h^4}{24}\frac{d^2 f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha})}{dx^2},$$

$$Z_\alpha^{(4)j}(x_j, u) = \left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{j+(-1)^\alpha} + \frac{1}{(j+(-1)^\alpha)^2} - \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(j+(-1)^\alpha)^3} + \frac{1}{(j+(-1)^\alpha)^4}\right]\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} -$$

$$-(-1)^{\alpha+1}h\left[1-\frac{(-1)^{\alpha+1}}{2(j+(-1)^{\alpha})}+\frac{1}{2(j+(-1)^{\alpha})^2}-\frac{(-1)^{\alpha+1}}{2(j+(-1)^{\alpha})^3}\right]f(x_{j+(-1)^{\alpha}},u_{j+(-1)^{\alpha}})-$$

$$-\frac{h^2}{2}\left[1-\frac{(-1)^{\alpha+1}}{3(j+(-1)^{\alpha})}+\frac{1}{3(j+(-1)^{\alpha})^2}\right]\frac{df(x_{j+(-1)^{\alpha}},u_{j+(-1)^{\alpha}})}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^{\alpha}}}-$$

$$-(-1)^{\alpha+1}\frac{h^3}{6}\left[1-\frac{(-1)^{\alpha+1}}{4(j+(-1)^{\alpha})}\right]\frac{d^2f(x_{j+(-1)^{\alpha}},u_{j+(-1)^{\alpha}})}{dx^2}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^{\alpha}}}-\frac{h^4}{24}\frac{d^3f(x_{j+(-1)^{\alpha}},u_{j+(-1)^{\alpha}})}{dx^3}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^{\alpha}}}.$$

Розв'язок різницевої схеми (58) $y_j^{(4)}$, $j=0,1,\dots N$ шукатимемо за допомогою модифікованого ітераційного методу Ньютона, а розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (78) з тридіагональною матрицею — методом прогонки. Результати чисельного розв'язування задачі наведено в таблиці, де

$$\mathrm{Error}=\left\|z^{(4)}\right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_h}=\left\|y^{(4)}-u\right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_h}=$$

$$=\max\left\{\left\|y^{(4)}-u\right\|_{0,\infty,\overline{\omega}_h^-},\left\|x\frac{dy^{(4)}}{dx}-x\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,\overline{\omega}_h^+}\right\},$$

$$\mathrm{p}=\log_2\frac{\left\|z^{(4)}\right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_h}}{\left\|z^{(4)}\right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_{h/2}}},$$

NIT — кількість ітерацій.

Результати чисельного розв'язування задачі за допомогою ТРС порядку точності 4

N	NIT	Error	p
20	9	0.7337E-05	
40	4	0.4527E-06	4
80	4	0.2802E-07	4
160	3	0.1741E-08	4
320	3	0.1091E-09	4

Література

[1] *Makarov V. L.* Exact three-point difference schemes for second-order nonlinear ordinary differential equations and their implementation / V. L. Makarov, A. A. Samarskii // Soviet Math. Dokl. – 1991. – Vol. 41. – No. 3. – P. 495–500.

[2] *Kutniv M. V.* Accurate three-point difference schemes for second-order nonlinear ordinary differential equations and their implementation / M. V. Kutniv, V. L. Makarov, A. A. Samarskii // Comput. Math. Math. Phys. – 1999. – Vol. 39. – No. 1. – P. 45–60.

[3] *Kutniv M. V.* Modified three-point difference schemes of high-accuracy order for second order nonlinear ordinary differential equations / M. V. Kutniv // Computational Methods in Applied Mathematics(CMAM). – 2003. – Vol. 3. – No. 2. – P. 287–312.

[4] *Kutniv M. V.* Accurate three-point difference schemes for second-order monotone ordinary differential equations and their implementation / M. V. Kutniv // Comput. Math. Math. Phys. – 2000. – Vol. 40. – No. 3. – P. 368–382.

[5] *Gnativ L. B.* Generalized three-point difference schemes of high-accuracy for systems of second order nonlinear ordinary differential equations / L. B. Gnativ, M. V. Kutniv, V. L. Makarov // Differential Equations. – 2009. – Vol. 45. – No. 7. – P. 980–1000.

[6] *Kunynets A. V.* Exact three-point difference scheme for nonlinear stationary differential equations in cylindrical coordinates / A. V. Kunynets, M. V. Kutniv // Journal of Numerical and Applied Mathematics (Series "Numerical Mathematics"). – 2011. – Vol. 2(105). – P. 51–68.

[7] *Kunynets A. V.* Three-point difference scheme of high order accuracy for nonlinear ordinary differential equations of the second order in cylindrical coordinates / A. V. Kunynets, M. V. Kutniv // Journal of National University "Lvivska politechnika"(Physical & mathematical sciences). – 2013. – Vol. 768. – P. 85–99. (in Ukrainian).

[8] *Trenogin V. A.* Functional analysis / V. A. Trenogin. – M.: Nauka, 1980. (in Russian).

[9] *Kufner A.* Nonlinear differential equations. Studies in Applied Mechanics / A. Kufner, S. Fucik. – New-York: Elsevier, 1980. – Vol. 2.

ТРЕХТОЧЕЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Кунинец А. В., Кутнив М. В.

Национальный университет "Львивська политэхника"
ул. С. Бандеры 12, 79013, Львов, Украина

Рассмотрены краевые задачи для нелинейных стационарных уравнений в сферической системе координат (нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка с сингулярностью первого рода). Для численного решения этой задачи построена и обоснована точная трехточечная разностная схема на неравномерной сетке. Доказано существование и единственность решения этой схемы, сходимость итерационного метода последовательных приближений для ее решения.

Ключевые слова: краевая задача с сингулярностью, нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, точная трехточечная разностная схема, метод линеаризации, принцип сжимающих отображений.

УДК: 519.6

EXACT THREE-POINT DIFFERENCE SCHEME FOR NONLINEAR STATIONARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SPHERICAL COORDINATES

Kunynets A. V., Kutniv M. V.

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

The boundary value problems (BVP) for nonlinear stationary equations in spherical coordinate system (so-called nonlinear second order differential equations with singularity of the first kind) is considered. Exact three-point difference scheme (ETDS) on a irregular grid for the numerical solution of this problem boundary value problems for nonlinear stationary equations in spherical coordinate system is constructed and justified. The existence and uniqueness of the solution of this scheme, the convergence of iterative method of successive approximation for its solution are proved.

Key words: Singular boundary value problem, nonlinear ordinary differential equation, exact three-point difference scheme, linearization method, principle of contraction mapping.

UDK: 519.6