ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№804, 2014, с. 38–48

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№804, 2014, p. 38–48

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРАХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ-ТЕЙЛОРА

Ільків В. С., Страп Н. І.

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 3 липня 2014 р.)

Досліджено нелокальну крайову задачу для системи диференціально-операторних рівнянь з оператором диференціювання $B=(B_1,\ldots,B_p)$, де $B_j\equiv z_j\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j=1,\ldots,p$, у просторах функцій багатьох комплексних змінних, що є рядами Діріхле-Тейлора з фіксованим спектром. Задача є некоректною за Адамаром, а її розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, що виникають під час побудови розв'язку. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які залежать від асимптотики спектра рядів Діріхле-Тейлора, а також установлено умови існування та єдиності розв'язку цієї нелокальної задачі у шкалі просторів функцій багатьох комплексних змінних.

Ключові слова: рівняння з частинними похідними, нелокальна задача, малі знаменники, метрична оцінка, ряд Діріхле-Тейлора.

2000 MSC: 35E20

УДК: 517.946+511.37

Вступ

У сучасній теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними важливе місце посідають задачі з нелокальними крайовими умовами [1, 2]. В основному ці задачі пов'язані з проблемою малих знаменників і є умовно коректними щодо своїх параметрів; їх коректність забезпечується вибором області розгляду та накладанням додаткових умов на коефіцієнти рівнянь та параметри нелокальних умов [3, 4, 5].

У цій праці досліджується нелокальна задача для системи диференціально-операторних рівнянь з оператором диференціювання $B=(B_1,\ldots,B_p)$, де $B_j\equiv z_j\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j=1,\ldots,p$, який діє на функції просторових змінних $(z_1,\ldots,z_p)$, що приймають комплексні значення. Встановлено умови однозначної розв'язності цієї задачі у класі функцій, що є рядами Діріхле-Тейлора з фіксованим дійсним спектром, для майже всіх векторів складених з коефіцієнтів рівняння та параметра крайових умов. Для цього доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, що виникли під час побудови розв'язку цієї задачі. Аналогічну задачу для одного диференціально-операторного рівняння у просторах функцій з цілочисловим спектром та у просторах рядів Діріхле-Тейлора досліджено у працях відповідно [6] і [7].

I. Простори рядів Діріхле-Тейлора

Нехай $\mathcal{S}$ — однозв'язна область проколотої у нулі комплексної площини, тобто $\mathcal{S}\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$, а $\mathcal{D}^p$ — циліндрична область $[0,T]\times\mathcal{S}^p$, де $T>0$, $p\geq 2$.

Введемо та зафіксуємо множину дійсних векторів

$$\mathcal{N}=\{\nu_k=(\nu_{k1},\ldots,\nu_{kp})\in\mathbb{R}^p\colon k\in\mathbb{Z}^p\},$$

яку використовуватимемо при означенні просторів і називатимемо спектром функцій, якщо вона підпорядкована таким двом умовам:

1) рівність $\nu_k=\nu_r$ справджується лише при $k=r$, тобто відображення $k\leftrightarrow\nu_k$ є бієктивним відображенням $\mathbb{Z}^p$ на множину $\mathcal{N}$;

2) $\tilde{\nu}_k\to\infty$ при $k\to\infty$, де $\tilde{\nu}_k=\sqrt{1+\nu_{k1}^2+\ldots+\nu_{kp}^2}$.

Нехай $\mathbf{W}\mathcal{N}$ — лінійний простір кратних скінченних сум (основних функцій) вигляду

$$P(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}P_kz^{\nu_k}\equiv\sum_{k_1}\ldots\sum_{k_p}P_{k_1,\ldots,k_p}z_1^{\nu_{k1}}\ldots z_p^{\nu_{kp}},$$

де $z=(z_1,\ldots,z_p)\in\mathcal{S}^p$, P_k — комплексні коефіцієнти, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $z^{\nu_k}=z_1^{\nu_{k1}}\ldots z_p^{\nu_{kp}}$.

Простір $\mathbf{W}\mathcal{N}'$ — це простір узагальнених функцій, які є формальними рядами $Q(z)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}Q_kz^{\nu_k}$, що діють на основну функцію $P\in\mathbf{W}\mathcal{N}$ за правилом $\langle Q,P\rangle=\sum\limits_{k}Q_k\overline{P}_k$. У випадку від'ємних координат всіх векторів ν_k ряди $Q(z)$ є стандартними рядами Діріхле-Тейлора.

Позначимо $\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)$, $q\in\mathbb{R}$, — гільбертів (соболєвського типу) простір функцій $\psi(z)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\psi_kz^{\nu_k}$ зі спектром $\mathcal{N}$ із таким скалярним добутком:

$$(\psi,\varphi)_{\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)}=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{\nu}_k^{2q}\psi_k\overline{\varphi}_k$$

та квадратом норми $\|\psi\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)} = (\psi,\psi)_{\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)}$; $\mathbf{H}\mathcal{N}^n_q(\mathcal{D}^p)$, $q\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, — банахів простір функцій $u=u(t,z)$ таких, що похідні $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r}=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(r)}(t)z^{\nu_k}$ для $r=0,1,\ldots,n$ і кожного $t\in[0,T]$ належать до просторів $\mathbf{H}\mathcal{N}_{q-r}(\mathcal{S}^p)$ відповідно та неперервні за t у цих просторах. Квадрат норми у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}^n_q(\mathcal{D}^p)$ визначає формула

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}^n_q(\mathcal{D}^p)} = \sum_{r=0}^{n}\max_{[0,T]}\left\|\frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}\right\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}_{q-r}(\mathcal{S}^p)}.$$

Введемо дві шкали просторів $\{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_q(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ так. Нехай $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_q(\mathcal{S}^p)$ — простір вектор-функцій $v=v(z)=\mathrm{col}\ (v_1(z),\ldots,v_m(z))$, де $v_j=v_j(z)\in\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)$, $j=1,\ldots,m$, з квадратом норми

$$\|v\|^2_{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_q(\mathcal{S}^p)} = \sum_{j=1}^{m}\|v_j\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}_q(\mathcal{S}^p)},$$

а $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)$ — простір таких вектор-функцій $u=u(t,z)=\mathrm{col}\ (u_1(t,z),\ldots,u_m(t,z))$ з компонентами $u_j=u_j(t,z)\in\mathbf{H}\mathcal{N}^n_q(\mathcal{D}^p)$, $j=1,\ldots,m$, квадрат норми яких задає формула

$$\|u\|^2_{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)} = \sum_{j=1}^{m}\|u_j\|^2_{\mathbf{H}\mathcal{N}^n_q(\mathcal{D}^p)}.$$

Позначимо область $\mathcal{O}_R$ — круг радіуса R із центром у початку координат комплексної площини $\mathbb{C}$.

II. Постановка задачі. Позначення

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із частинними похідними і сталими коефіцієнтами

$$\sum_{s_0+|s|\le n} A_{s_0,s}B^s\frac{\partial^{s_0}u}{\partial t^{s_0}}=0,\qquad n\in\mathbb{N},\qquad (1)$$

де $s=(s_1,\ldots,s_p)\in\mathbb{Z}^p_+$, $|s|=s_1+\ldots+s_p$, $A_{s_0,s}$ — квадратні матриці розміру m, $A_{n,0,\ldots,0}=I_m$ — одинична матриця; $u=u(t,z)=\mathrm{col}\ (u_1(t,z),\ldots,u_m(t,z))$ — шукана вектор-функція. Оператор $B=(B_1,\ldots,B_p)$ складено з операторів узагальненого диференціювання $B_j\equiv z_j\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, для яких зокрема $B_jz^{\nu_k}=\nu_{kj}z^{\nu_k}$. Степенями цих операторів є $B^0_ju=u$, $B^l_ju=B_j(B^{l-1}_ju)$, де $j=1,\ldots,p$, $l=1,\ldots,n$, і $B^s=B^{s_1}_1\ldots B^{s_p}_p$.

Шукаємо розв'язок з простору $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)$ системи (1), що має спектр $\mathcal{N}$, який задовольняє нелокальні умови

$$\mu\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=0}-\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=T}=\varphi_j,\qquad j=0,1,\ldots,n-1,\ (2)$$

де μ — ненульовий комплексний параметр, $\varphi_j=\varphi_j(z)=\mathrm{col}\ (\varphi_{j1}(z),\ldots,\varphi_{jm}(z))$ — задані функції зі шкали просторів $\{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_q(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$.

Нехай для кожного вектора $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_p)\in\mathbb{R}^p$ число $\tilde\nu$ визначає формула $\tilde\nu=\sqrt{1+\nu_1^2+\ldots+\nu_p^2}$, а функцію $\zeta_{\mathcal{N}}(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — формула $\zeta_{\mathcal{N}}(x)=\sum\limits_{\nu\in\mathcal{N}}\tilde\nu^{-x}$. Очевидно, що для $x\le 0$ ряд $\sum\limits_{\nu\in\mathcal{N}}\tilde\nu^{-x}$ є розбіжним. Припустимо, що $\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)<\infty$ для деякого $\theta>0$, тоді $\zeta_{\mathcal{N}}(x)<\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)<\infty$ для всіх $x\ge\theta$, тобто $\zeta_{\mathcal{N}}$ існує на $[\theta,\infty)$. Число θ задає асимптотику спектра $\mathcal{N}$, а саме швидкість зростання послідовності ν_k при $k\to\infty$.

Означення 1. *Під розв'язком задачі* (1), (2) *будемо розуміти таку вектор-функцію:*

$$u=u(t,z)=\mathrm{col}\ (u_1(t,z),\ldots,u_m(t,z))$$

зі значеннями $u_i(t,\cdot)$ у просторі $\mathbf{W}\mathcal{N}'$ для $t\in[0,T]$, $i=1,\ldots,m$, яка задовольняє систему (1) *і умови* (2) *та належить до простору $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)$.*

Введемо псевдодиференціальні оператори. Для цього розглянемо довільну послідовність комплексних матриць $F(\nu)$, $\nu\in\mathcal{N}$. Вона породжує псевдодиференціальний оператор-матрицю

$$F(B)=F(B_1,\ldots,B_p)=F\Big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,z_p\frac{\partial}{\partial z_p}\Big),$$

що діє на вектор-функцію $\varphi(z)=\sum\limits_{\nu\in\mathcal{N}}\psi(\nu)z^\nu$ за формулою

$$F(B)\varphi(z)=\sum_{\nu\in\mathcal{N}}F(\nu)\psi(\nu)z^\nu.$$

Коефіцієнти $\psi(\nu)$ розвинення $\varphi(z)$ в ряд Фур'є породжують оператор $\psi(B)$. А тому кожній функції з $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_q(\mathcal{S}^p)$ відповідає псевдодиференціальний вектор-оператор $\psi(B)$. При цьому $\varphi(z)=\psi(B)\delta_{\mathcal{N}}(z)$, де $\delta_{\mathcal{N}}(z)=\sum\limits_{\nu\in\mathcal{N}}z^\nu$.

Аналогічно послідовність $F(t,\nu)$, $t\in[0,T]$, породжує оператор $F(t,B)$, функція $v(t,z)=\sum\limits_{\nu\in\mathcal{N}}V(t,\nu)z^\nu$ з простору $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)$ — оператор-функцію $V(t,B)$. При цьому $v(t,z)=V(t,B)\delta_{\mathcal{N}}(z)$.

Задача (1), (2) еквівалентна задачі з нелокальними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку за часовою змінною

$$\frac{\partial v(t,z)}{\partial t}=L(B)v(t,z),\qquad (3)$$

$$\mu\ v(0,z)-v(T,z)=\varphi(z),\qquad (4)$$

де вектор-функція $v=v(t,z)$ має розмір $mn\times 1$,

$$v=\mathrm{col}\ \Big(u,\frac{\partial u}{\partial t},\ldots,\frac{\partial^{n-1}u}{\partial t^{n-1}}\Big)=\mathrm{col}\ (v_0,v_1,\ldots,v_{n-1}),$$

матриця $L=L(B)$ має таку структуру:

$$L(B)=\left(\begin{array}{c|c|c|c} 0_{(n-1)m\times m} & \multicolumn{3}{c}{I_{(n-1)m}} \\ \hline -L_n(B) & -L_{n-1}(B) & \ldots & -L_1(B)\end{array}\right),$$

оператори $L_r(B)$, $r=1,\ldots,n$, є матрицями порядку m з елементами $L^{ij}_r(B)$, зокрема

$$L_r(B)=\sum_{|s|\le r}A_{n-r,s}B^s,$$

права частина $\varphi = \varphi(z)$ — вектор-функція розміру mn вигляду

$$\varphi(z) = \mathrm{col}\,\big(\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_{n-1}(z)\big).$$

Оскільки у термінах псевдодиференціальних операторів справджуються тотожності

$$\begin{aligned} v(t,z) &\equiv V(t,B)\delta_{\mathcal{N}}(z) \equiv \\ &\equiv \mathrm{col}\,\big(V_0(t,B), V_1(t,B), \ldots, V_{n-1}(t,B)\big)\delta_{\mathcal{N}}(z), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &\equiv \psi(B)\delta_{\mathcal{N}}(z) \equiv \\ &\equiv \mathrm{col}\,\big(\psi_0(B), \psi_1(B), \ldots, \psi_{n-1}(B)\big)\delta_{\mathcal{N}}(z), \end{aligned} \tag{6}$$

то задача (3), (4) еквівалентна множині нелокальних крайових задач на проміжку $[0,T]$ для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dV(t,\nu)}{dt} = L(\nu)V(t,\nu), \qquad \nu \in \mathcal{N}, \tag{7}$$

$$\mu V(0,\nu) - V(t,\nu) = \psi(\nu). \tag{8}$$

Нехай $Z = \mathrm{diag}(\tilde{\nu}^n I_m, \ldots, \tilde{\nu}^2 I_m, \tilde{\nu} I_m)$ і $Z\psi(\nu) = \tilde{\psi}(\nu)$, $ZV(t,\nu) = \tilde{V}(t,\nu)$. Перепишемо задачу (7), (8) у цих позначеннях

$$\frac{d\tilde{V}(t,\nu)}{dt} = \tilde{\nu}\widetilde{L}(\nu)\tilde{V}(t,\nu), \qquad \nu \in \mathcal{N}, \tag{9}$$

$$\mu\widetilde{V}(0,\nu) - \widetilde{V}(t,\nu) = \widetilde{\psi}(\nu), \tag{10}$$

де

$$\widetilde{L}(\nu) = \begin{pmatrix} 0 & & I_{(n-1)m} & \\ -\widetilde{L}_n(\nu) & -\widetilde{L}_{n-1}(\nu) & \ldots & -\widetilde{L}_1(\nu) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{L}_j(\nu) = \tilde{\nu}^{-j} L_j(\nu) = \sum_{|s| \le j} A_{n-j,s}\Big(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\Big)^s \tilde{\nu}^{|s|-j}.$$

Якщо числа $\lambda_j(\nu)$, де $j = 1, \ldots, nm$, є коренями характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} f(\lambda,\nu) &= \det\big(\lambda I_{nm} - \widetilde{L}(\nu)\big) = \\ &= \det\big(\lambda^{mn} I_{nm} + \sum_{j=1}^{mn} \lambda^{mn-j}\widetilde{L}_j(\nu)\big) = 0, \end{aligned}$$

то величини $\gamma_j(\nu) = \tilde{\nu}\lambda_j(\nu)$ є коренями рівняння

$$\det\big(\gamma I_{nm} - L(\nu)\big) = 0.$$

Функцію $f(\lambda,\nu)$ запишемо у вигляді многочлена

$$\begin{aligned} f(\lambda,\nu) &= \sum_{j=0}^{mn} f_j(\nu)\lambda^{mn-j} = \\ &= \lambda^{mn} - \mathrm{Sp}\,\widetilde{L}(\nu)\lambda^{mn-1} + \ldots + (-1)^{mn}\det\widetilde{L}(\nu) = 0, \end{aligned}$$

де $\mathrm{Sp}\,\widetilde{L}(\nu)$ — слід матриці $\widetilde{L}(\nu)$. Вважатимемо також, що $f_j(\nu) = 0$, якщо $j < 0$, або $j > mn$.

З оцінки Коші [8, с.10] для коренів многочлена

$$|\lambda_j(\nu)| \le 1 + \max\{|f_1(\nu)|, \ldots, |f_{mn}(\nu)|\}$$

випливає, що вони є рівномірно обмеженими за ν разом із коефіцієнтами $f_1(\nu), \ldots, f_{mn}(\nu)$ многочлена $f(\lambda,\nu)$.

III. Існування та єдиність розв'язку

Загальний розв'язок системи (9) запишемо у вигляді

$$\widetilde{V}(t,\nu) = e^{\tilde{\nu}\widetilde{L}(\nu)t} C(\nu), \tag{11}$$

де $C(\nu)$ — довільний вектор з констант. Для знаходження $C(\nu)$ підставимо $\widetilde{V}(t,\nu)$ в умови (10) і отримаємо лінійну алгебричну систему

$$(\mu I_{nm} - e^{\tilde{\nu}\widetilde{L}(\nu)T})C(\nu) = \widetilde{\psi}(\nu).$$

Якщо матриця $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{\nu}\widetilde{L}(\nu)T})$ невироджена, то невідомі $C(\nu)$ знаходимо за формулою

$$C(\nu) = (\mu I_{nm} - e^{\tilde{\nu}\widetilde{L}(\nu)T})^{-1}\widetilde{\psi}(\nu).$$

Тоді розв'язок задачі (9), (10) набуде вигляду

$$\widetilde{V}(t,\nu) = e^{\tilde{\nu}\widetilde{L}(\nu)t}(\mu I_{nm} - e^{\tilde{\nu}\widetilde{L}(\nu)T})^{-1}\widetilde{\psi}(\nu). \tag{12}$$

Оскільки визначник матриці дорівнює добутку її власних значень, а власними значеннями матриці $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{\nu}\widetilde{L}(\nu)T})$ є числа $\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_j(\nu)T}$, то розв'язок (12) існує лише для ненульового числа

$$\det(\mu I_{nm} - e^{\tilde{\nu}\widetilde{L}(\nu)T}) = \prod_{j=1}^{nm}(\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_j(\nu)T}). \tag{13}$$

Взявши до уваги рівність (13), сформулюємо і доведемо теорему єдиності розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *необхідно і достатньо, щоб алгебричне діофантове рівняння*

$$\det\Big(\frac{\ln\mu - i2\pi m_1}{\tilde{\nu}} I_{nm} - \widetilde{L}(\nu)\Big) = 0 \tag{14}$$

не мало розв'язків (m_1, ν) *на множині* $\mathbb{Z} \times \mathcal{N}$.

□ *Доведення. Необхідність.* Нехай розв'язок задачі (1), (2) єдиний. Тоді задача (9), (10) має також єдиний розв'язок, що зображується у вигляді (12). Отже, матриця $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{\nu}\widetilde{L}(\nu)T})$ є невиродженою, тобто її визначник не дорівнює нулеві. У такий спосіб, враховуючи (13), $\mu \ne e^{\tilde{\nu}\lambda_j(\nu)T}$. Логарифмуючи цю нерівність, отримаємо, що рівняння (14) не має розв'язків (m_1, ν) на множині $\mathbb{Z} \times \mathcal{N}$.

Достатність. Доведемо методом від супротивного. Нехай пара $(m_1^*, \nu_{k^*}) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{N}$ є розв'язком рівняння (14). Тоді число $\dfrac{\ln\mu - i2\pi m_1^*}{\tilde{\nu}_{k^*}}$ є власним значенням матриці $\widetilde{L}(\nu_{k^*})$, яке позначимо $\lambda_1(\nu_{k^*})$, і однорідна задача (9), (10) має безліч розв'язків $\widetilde{V}(t, \nu_{k^*})$, що утворюють підпростір та визначаються формулою (11), у якій вектор $C(\nu)$ є загальним розв'язком виродженої однорідної системи лінійних рівнянь

$$(\mu I_{nm} - e^{\tilde{\nu}\widetilde{L}(\nu)T})C(\nu) = 0.$$

Тому задача (1), (2) також має безліч розв'язків, які утворюють підпростір у просторі $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)$. Теорему доведено. ■

Встановимо умови існування розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)$. Для всіх векторів $\nu \in \mathbb{R}^p$, для яких корені $\lambda_1(\nu), \dots, \lambda_{mn}(\nu)$ многочлена $f(\cdot, \nu)$ є різними, введемо такі позначення:

$$R(\nu) = \big(\widetilde{\psi}(\nu), \widetilde{L}(\nu)\widetilde{\psi}(\nu), \dots, \widetilde{L}^{nm-1}(\nu)\widetilde{\psi}(\nu)\big),$$

$$W(\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1(\nu) & \lambda_2(\nu) & \dots & \lambda_{nm}(\nu) \\ \lambda_1^2(\nu) & \lambda_2^2(\nu) & \dots & \lambda_{nm}^2(\nu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1}(\nu) & \lambda_2^{n-1}(\nu) & \dots & \lambda_{nm}^{n-1}(\nu) \end{pmatrix},$$

$$\Omega(t, \nu) = \operatorname{col}\,\big(\rho_\nu(t, \lambda_1(\nu)), \dots, \rho_\nu(t, \lambda_{nm}(\nu))\big),$$

де $W(\nu)$ — матриця Вандермонда, що побудована за коренями $\lambda_1(\nu)$, $\dots$, $\lambda_{nm}(\nu)$, а $\Omega(t, \nu)$ — вектор значень функцій $\rho_\nu(t, \lambda) = \dfrac{e^{\tilde{\nu}\lambda t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda T}}$ на коренях $\lambda_1(\nu)$, $\dots$, $\lambda_{nm}(\nu)$.

Тоді розв'язок (12) задачі (9), (10) записується у вигляді [9]

$$\widetilde{V}(t, \nu) = R(\nu) W^{-\mathsf{T}}(\nu)\Omega(t, \nu), \tag{15}$$

де $W^{-\mathsf{T}}(\nu) = \big(W^{-1}(\nu)\big)^{\mathsf{T}} = \big(W^{\mathsf{T}}(\nu)\big)^{-1}$ — обернена до транспонованої матриці Вандермонда. Для обчислення матриці $W^{-\mathsf{T}}(\nu)$ використовуємо формулу [10]

$$W^{-\mathsf{T}}(\nu) = \big(f_{mn+1-i-j}(\nu)\big)_{i,j=1}^{mn} W(\nu) \times \\ \times \big(\operatorname{diag}\big(f'(\lambda_j(\nu), \nu)\big)_{j=1}^{mn}\big)^{-1}, \tag{16}$$

де $f'(\lambda, \nu) = \dfrac{\partial f(\lambda, \nu)}{\partial \lambda}$. Вирази $\big(f'(\lambda_j(\nu), \nu)\big)^{-2}$ перетворимо до дробів

$$\frac{1}{\operatorname{Res}(f, f')} \prod_{\substack{1 \le \alpha < \beta \le mn \\ \alpha, \beta \ne j}} (\lambda_\alpha(\nu) - \lambda_\beta(\nu))^2,$$

де $\operatorname{Res}(f, f') = \prod\limits_{j=1}^{mn} f'(\lambda_j(\nu), \nu)$ — результант [8] многочленів f та f' і $\operatorname{Res}(f, f') = \operatorname{Disc} f = \det S(f)$, причому $\operatorname{Disc} f$ — дискримінант, а $S(f)$ — матриця Сильвестра многочлена $f = f(\lambda, \nu)$, яка є блочною матрицею і складається з двох теплицевих матриць із $mn-1$ та mn рядками відповідно,

$$S(f) = \begin{pmatrix} \big(f_{j-i}(\nu)\big)_{i,j=1}^{mn-1,\ 2mn-1} \\ \big((mn - j + i) f_{j-i}(\nu)\big)_{i,j=1}^{mn,\ 2mn-1} \end{pmatrix}.$$

Встановимо умови існування розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)$. Оскільки

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = -L_n(B)u - L_{n-1}(B)\frac{\partial u}{\partial t} - \dots - L_1(B)\frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}},$$

то

$$\Big\|\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\Big\|_{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_{q-n}(\mathcal{S}^p)} \le C_1\Big(\|u\|^2_{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_q(\mathcal{S}^p)} + \\ + \Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_{q-1}(\mathcal{S}^p)} + \dots + \Big\|\frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}}\Big\|^2_{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_{q-n+1}(\mathcal{S}^p)}\Big),$$

де $C_1 = C_1(n, p) > 0$.

Отже, отримуємо оцінку

$$\|u\|^2_{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)} \le (C_1 + 1)\sum_{j=0}^{n-1} \max_{[0,T]} \Big\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big\|_{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_{q-j}(\mathcal{S}^p)} = \\ = (C_1 + 1)\sum_{j=0}^{n-1} \max_{[0,T]} \|v_j\|_{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_{q-j}(\mathcal{S}^p)} = \\ = (C_1 + 1)\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\nu\in\mathcal{N}} \max_{[0,T]} |\tilde{\nu}^{q-j} V_j(t, \nu)|^2 = \\ = (C_1 + 1)\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\nu\in\mathcal{N}} \max_{[0,T]} |\tilde{\nu}^{q-n} \widetilde{V}_j(t, \nu)|^2. \tag{17}$$

З формули (15) одержимо таку оцінку:

$$|\tilde{\nu}^{q-n}\widetilde{V}_j(t, \nu)|^2 \le \\ \le C_2\|\Omega(t, \nu)\|^2 \|W^{-\mathsf{T}}(\nu)\|^2 \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{\nu}^{q-n}\widetilde{\psi}_j(\nu)|^2 = \\ = C_2\|\Omega(t, \nu)\|^2 \|W^{-\mathsf{T}}(\nu)\|^2 \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{\nu}^{q-j}\psi_j(\nu)|^2, \tag{18}$$

де $C_2 > 0$ — величина, яка залежить від m, n, p та коефіцієнтів системи (1).

Сформулюємо та доведемо теорему існування розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 2. *Нехай вектор $\Omega(0, \cdot)$ визначений на $\mathcal{N}$ та для деяких дійсних чисел η_1, η_2 для всіх (крім скінченного числа) векторів $\nu \in \mathcal{N}$ та всіх $t \in [0, T]$ виконуються нерівності*

$$|\det S(f)| \ge \tilde{\nu}^{-\eta_1}, \tag{19}$$

$$\big|\rho_\nu\big(t, \lambda_l(\nu)\big)\big| \le \tilde{\nu}^{\eta_2}, \qquad l = 1, \dots, mn. \tag{20}$$

Якщо $\varphi_j \in \overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_{q-j+\psi}(\mathcal{S}^p)$, де $\psi = \eta_1 + \eta_2$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з простору $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)$, який неперервно залежить від правих частин умов (2).

□ *Доведення.* Враховуючи оцінки (18)–(20), а також формулу (16) для обчислення матриці $W^{-\mathsf{T}}(\nu)$, нерівність (17) набуде вигляду

$$\|u\|^2_{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)} \le C_3 \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_{\psi-j}(\mathcal{S}^p)},$$

де величина $C_3 > 0$ залежить від параметрів задачі (1), (2). Теорему доведено. ■

Розглянемо умови, за яких виконується нерівність (19). Для отримання потрібних оцінок сформулюємо наступні леми.

Лема 1. *Нехай $g = g(\lambda)$ — многочлен вигляду $g(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{n} g_j\lambda^{n-j}$, тоді його дискримінант стосовно старших степенів g_j має таку структуру:*

$$\operatorname{Disc} g = \sum_{\alpha=0}^{n-1}(-1)^{\alpha+n\alpha}\alpha^{\alpha}(n-\alpha)^{n-\alpha}g_0^{\alpha}g_n^{n-\alpha-1}g_{\alpha}^{n} + \mathfrak{G},$$

де многочлен $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(g_0, g_1, \ldots, g_n)$ не містить n-х степенів коефіцієнтів g_α.

Доведення цієї леми наведено у роботі [11].

Лема 2. *Якщо $f = h + ag$, де $a \in \mathbb{C}$ — параметр, $f=f(\lambda)$, $h=h(\lambda)$, $g=g(\lambda)$ — многочлени і*

$$f(\lambda) = f_0\lambda^t + f_1\lambda^{t-1} + \ldots + f_t,$$

$$h(\lambda) = h_0\lambda^t + h_1\lambda^{t-1} + \ldots + h_t,$$

$$g(\lambda) = g_0\lambda^s + g_1\lambda^{s-1} + \ldots + g_s,$$

причому $0 \le s < t$, то дискримінант $\operatorname{Disc} f$ є многочленом за змінною a степеня не вище $t + s - 1$, зокрема

$$\operatorname{Disc} f = \big((s-t)h_0g_0\big)^{t-s}a^{t+s-1}\operatorname{Disc} g + \ldots + \operatorname{Disc} h.$$

□ *Доведення.* За умовою леми $f_i = h_i + ag_{s-t+i}$ для $i \in \{t-s, t-s+1, \ldots, t\}$ і $f_i = h_i$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, t-s-1\}$. Оскільки матриця Сильвестра $S(f)$ многочлена $f(\lambda)$ має блочний вигляд

$$S(f) = \begin{pmatrix} \big(f_{j-i}\big)_{t-1}^{2t-1} \\ \big((\omega+t-s)f_{j-i}\big)_{t}^{2t-1} \end{pmatrix},$$

де i — номер рядка, j — стовпця, $(\ )_r^q$ — тепліцева матриця розміру $r\times q$, $\omega = s - j + i$, отримаємо

$$S(f) = \begin{pmatrix} \big(h_{j-i}\big)_{t-1}^{2t-1} \\ \big((\omega+t-s)h_{j-i}\big)_{t}^{2t-1} \end{pmatrix} + \\ + a\begin{pmatrix} \big(0\big)_{t-1}^{t-s} & \big(g_{j-i}\big)_{t-1}^{t+s-1} \\ \big(0\big)_{t}^{t-s} & \big(\omega g_{j-i}\big)_{t}^{t+s-1} \end{pmatrix},$$

де $h_j = 0$ для $j < 0$ та $j > t$ і $g_j = 0$ для $j < 0$ та $j > s$. Подамо $S(f)$ як добуток прямокутних матриць:

$$S(f) = \begin{pmatrix} \big(h_{j-i}\big)_{t-1}^{2t-1} & \big(g_{j-i}\big)_{t-1}^{t+s-1} \\ \big((\omega+t-s)h_{j-i}\big)_{t}^{2t-1} & \big(\omega g_{j-i}\big)_{t}^{t+s-1} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} E_{t-s} & 0 \\ 0 & E_{t+s-1} \\ 0 & aE_{t+s-1} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формулу Біне-Коші, для обчислення $\det S(f) = \operatorname{Disc} f$ отримаємо многочлен за змінною a, тобто

$$\operatorname{Disc} f = \operatorname{Disc} h + \ldots + \\ + \begin{pmatrix} \big(h_{j-i}\big)_{t-1}^{t-s} & \big(g_{j-i}\big)_{t-1}^{t+s-1} \\ \big((\omega+t-s)h_{j-i}\big)_{t}^{t-s} & \big(\omega g_{j-i}\big)_{t}^{t+s-1} \end{pmatrix} a^{t+s-1}.$$

Перепишемо коефіцієнт при a^{t+s-1} у такий спосіб:

$$\det\begin{pmatrix} S_3 & S_4 & \mathcal{X}_2 \\ 0 & 0 & \big(g_{j-i}\big)_{s-1}^{2s-1} \\ S_1 & S_2 & \mathcal{X}_1 \\ 0 & 0 & \big(\omega g_{j-i}\big)_{s-1}^{2s-1} \end{pmatrix} = \\ = (-1)^{t-s}\det\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \mathcal{X}_1 \\ S_3 & S_4 & \mathcal{X}_2 \\ 0 & 0 & \big(g_{j-i}\big)_{s-1}^{2s-1} \\ 0 & 0 & \big(\omega g_{j-i}\big)_{s-1}^{2s-1} \end{pmatrix} = \\ = \det\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} \big(g_{j-i}\big)_{s-1}^{2s-1} \\ \big(\omega g_{j-i}\big)_{s-1}^{2s-1} \end{pmatrix},$$

де матриці $S_1 = (\omega+t-s)h_{j-i}$, $S_3 = h_{j-i}$, $S_2 = \omega g_{j-i}$, $S_4 = g_{j-i}$ мають порядок $t-s$, $\mathcal{X}_1$ та $\mathcal{X}_2$ позначають матриці, від яких не залежать відповідні визначники. Підставивши цю формулу і рівність

$$\det\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} = \left(\det\begin{pmatrix} th_0 & sg_0 \\ h_0 & g_0 \end{pmatrix}\right)^{t-s} = \Big(h_0g_0(t-s)\Big)^{t-s}$$

у формулу для $\operatorname{Disc} f$, отримуємо

$$\operatorname{Disc} f = (-1)^{t-s}\big((t-s)h_0g_0\big)^{t-s}a^{t+s-1}\times \\ \times\det\begin{pmatrix} \big(g_{j-i}\big)_{s-1}^{2s-1} \\ \big(\omega g_{j-i}\big)_{s}^{2s-1} \end{pmatrix} + \ldots + \operatorname{Disc} h = \\ = \big((s-t)h_0g_0\big)^{t-s}a^{t+s-1}\operatorname{Disc} g + \ldots + \operatorname{Disc} h.$$

Лему доведено. ■

Позначимо через $b_1, \ldots, b_p$ коефіцієнти при похідних $B_1^n, \ldots, B_p^n$ оператора $\widetilde{L}_n^{11}(B)$, через $b_{p+1}, \ldots, b_{2p}$ відповідні коефіцієнти оператора $\widetilde{L}_n^{22}(B)$ і т.д., через $b_{(m-1)p+1}, \ldots, b_{mp}$ відповідні коефіцієнти оператора $\widetilde{L}_n^{mm}(B)$, і нехай $b = (b_1, \ldots, b_{mp})$.

Многочлен $f(\lambda, \nu)$ можна записати у вигляді

$$f(\lambda,\nu) = b_j\Big(\frac{\nu_j}{\tilde{\nu}}\Big)^n g_1(\lambda,\nu) + h_1(\lambda,\nu), \quad j = 1, \ldots, p,$$

де многочлени $g_1(\lambda, \nu)$ та $h_1(\lambda, \nu)$ залежать від j, але не залежать від b_j. Многочлен $g_1(\lambda, \nu)$ також можна розписати у вигляді суми

$$g_1(\lambda,\nu) = b_{p+j}\Big(\frac{\nu_j}{\tilde{\nu}}\Big)^n g_2(\lambda,\nu) + h_2(\lambda,\nu), \quad j = 1, \ldots, p,$$

де многочлени $g_2(\lambda, \nu)$ та $h_2(\lambda, \nu)$ не залежать від b_{p+j}. Кожен многочлен $g_i(\lambda, \nu)$, $i = 1, \ldots, m-2$, можна записати аналогічно

$$g_i(\lambda,\nu) = b_{ip+j}\Big(\frac{\nu_j}{\tilde{\nu}}\Big)^n g_{i+1}(\lambda,\nu) + h_{i+1}(\lambda,\nu), \ j=1, \ldots, p,$$

де $g_{i+1}(\lambda, \nu)$ та $h_{i+1}(\lambda, \nu)$ не залежать від b_{ip+j}.

Застосувавши для кожного з многочленів $f(\lambda,\nu)$ і $g_i(\lambda,\nu)$, $i=1,2,\dots,m-2$, лему 2 при $a=b_j\Big(\dfrac{\nu_j}{\tilde\nu}\Big)^n$ у розкладі многочлена $f(\lambda,\nu)$ і $a=b_{ip+j}\Big(\dfrac{\nu_j}{\tilde\nu}\Big)^n$ у розкладах многочленів $g_i(\lambda,\nu)$ та при $g_{l0}=h_{l0}=1$, де g_{l0} і h_{l0}, $l=1,2,\dots,m-1$, є коефіцієнтами найстарших членів многочленів $g_l(\lambda,\nu)$ і $h_l(\lambda,\nu)$, отримаємо

$$\operatorname{Disc} f(\cdot,\nu)=(-1)^n n^n\Big(\frac{\nu_j}{\tilde\nu}\Big)^{n(2mn-n-1)}\times \times b_j^{2mn-n-1}\operatorname{Disc} g_1(\cdot,\nu)+\mathfrak{F}, \quad (21)$$

$$\operatorname{Disc} g_i(\cdot,\nu)=(-1)^n n^n\Big(\frac{\nu_j}{\tilde\nu}\Big)^{n(2mn-(2i+1)n-1)}\times \times b_{ip+j}^{2mn-(2i+1)n-1}\operatorname{Disc} g_{i+1}(\cdot,\nu)+\mathfrak{G}_i, \quad (22)$$

де $\mathfrak{F}$ і $\mathfrak{G}_i$ не містять доданки зі степенями $b_j^{2mn-n-1}$ і $b_{ip+j}^{2mn-(2i+1)n-1}$ відповідно.

Для знаходження $\operatorname{Disc} g_{n-1}(\cdot,\nu)$ використаємо лему 1 при $\alpha=0$ і $g_{m-1,0}=1$

$$\operatorname{Disc} g_{n-1}(\cdot,\nu)=n^n\Big(\frac{\nu_j}{\tilde\nu}\Big)^{n(n-1)}b_{(m-1)p+j}^{n-1}+\mathfrak{G}_{m-1}, \quad (23)$$

де $j=1,\dots,p$, а $\mathfrak{G}_{m-1}$ не містять доданки зі степенями $b_{(m-1)p+j}^{n-1}$.

Теорема 3. *Нехай $0<\delta<1$, коефіцієнти системи (1) фіксовані (за винятком b_1, …, b_{mp}). Тоді існує множина $\mathrm{W}\mathcal{N}_\delta\subset\mathcal{O}_R^{mp}$ така, що $\operatorname{meas}\mathrm{W}\mathcal{N}_\delta\le\delta\operatorname{meas}\mathcal{O}_R^{mp}$, і для всіх $b\in\mathcal{O}_R^{mp}\setminus\mathrm{W}\mathcal{N}_\delta$ та $\nu\in\mathcal{N}$ при $\eta_1=m(mn-1)\theta/2$ справджується оцінка*

$$|\operatorname{Disc} f(\cdot,\nu)|\ge\delta^{m(mn-1)/2}C_4\tilde\nu^{-\eta_1}, \quad (24)$$

де $C_4=n^{mn}\Big(\dfrac{\operatorname{meas}\mathcal{O}_R^{mp}}{m\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)(p+1)^n\pi^{mp}R^{2mp-2}}\Big)^{m(mn-1)/2}$.

□ *Доведення.* Використовуючи рівності (22) і (23), формулу (21) перепишемо так:

$$\operatorname{Disc} f(\cdot,\nu)=(-1)^{n(m-1)}n^{mn}\Big(\frac{\nu_j}{\tilde\nu}\Big)^{mn(mn-1)}\times \times b_j^{2mn-n-1}b_{p+j}^{2mn-3n-1}\dots b_{(m-2)p+j}^{3n-1}b_{(m-1)p+j}^{n-1}+\dots= =(-1)^{n(m-1)}n^{mn}\Big(\frac{\nu_j}{\tilde\nu}\Big)^{mn(mn-1)}\times \times B_j(\nu)B_{p+j}(\nu)\dots B_{(m-1)p+j}(\nu),$$

де $B_{ip+j}(\nu)$, $i=0,1,\dots,m-1$, — унітальний степеня $2(m-i)n-n-1$ многочлен змінної b_{ip+j}, коефіцієнти якого не залежать від b_1, …, b_{ip+j-p}, $j=1,\dots,p$. Знайдемо модуль дискримінанта многочлена $f(\cdot,\nu)$:

$$|\operatorname{Disc} f(\cdot,\nu)|=n^{mn}\Big(\frac{|\nu_j|}{\tilde\nu}\Big)^{mn(mn-1)}\times \times |B_j(\nu)||B_{p+j}(\nu)|\dots|B_{(m-1)p+j}(\nu)|. \quad (25)$$

У рівності (25) так (однозначно) виберемо індекс $j=j(\nu)$, де $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_p)$, щоб $\nu_j=\max\{\nu_1,\dots,\nu_p\}$.

Нехай $\mathrm{W}\mathcal{N}_\delta^{m-1}(\nu)$ — множина векторів $b\in\mathcal{O}_R^{mp}$, для яких для фіксованого ν виконується оцінка

$$|B_{(m-1)p+j}(\nu)|<\Big(\frac{\delta\operatorname{meas}\mathcal{O}_R^{mp}\ \tilde\nu^{-\theta}}{m\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)\pi^{mp}R^{2mp-2}}\Big)^{(n-1)/2}, \quad (26)$$

$j=1,\dots,p$. Оцінимо міру цієї множини. Позначимо через $\widetilde{\mathrm{W}\mathcal{N}}_\delta^{m-1}(\nu)\subset\mathcal{O}_R^p$ множину векторів $b_{(m-1)p+1}$, …, b_{mp}, а через $\widetilde{\mathrm{W}\mathcal{N}}_\delta^{m-1}(\nu,\tilde b_{(m-1)p+j})$ — множину тих значень змінної $b_{(m-1)p+j}$ для фіксованого $\tilde b_{(m-1)p+j}$, де $\tilde b_{(m-1)p+j}$ — вектор з компонентами $b_{(m-1)p+1}$, …, b_{mp} без компоненти $b_{(m-1)p+j}$, для яких виконується нерівність (26). Оскільки множина $\mathrm{W}\mathcal{N}_\delta^{m-1}(\nu)$ є декартовим добутком $\mathcal{O}_R^{(m-1)p}\times\widetilde{\mathrm{W}\mathcal{N}}_\delta^{m-1}(\nu)$, то її міра визначається так:

$$\operatorname{meas}\mathrm{W}\mathcal{N}_\delta^{m-1}(\nu)=(\pi R^2)^{(m-1)p}\operatorname{meas}\widetilde{\mathrm{W}\mathcal{N}}_\delta^{m-1}(\nu),$$

$$\operatorname{meas}\widetilde{\mathrm{W}\mathcal{N}}_\delta^{m-1}(\nu)= =\int_{\mathcal{O}_R^{p-1}}\operatorname{meas}\widetilde{\mathrm{W}\mathcal{N}}_\delta^{m-1}(\nu,\tilde b_{(m-1)p+j})\,d\tilde b_{(m-1)p+j}.$$

Використовуючи лему Картана [12, с. 267], для міри множини $\widetilde{\mathrm{W}\mathcal{N}}_\delta^{m-1}(\nu,\tilde b_{(m-1)p+j})$ одержимо оцінку

$$\operatorname{meas}\widetilde{\mathrm{W}\mathcal{N}}_\delta^{m-1}(\nu,\tilde b_{(m-1)p+j})<\frac{\delta\operatorname{meas}\mathcal{O}_R^{mp}\ \tilde\nu^{-\theta}}{m\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)(\pi R^2)^{mp-1}}.$$

Після інтегрування по області $\mathcal{O}_R^{p-1}$ отримаємо, що

$$\operatorname{meas}\widetilde{\mathrm{W}\mathcal{N}}_\delta^{m-1}(\nu)<\frac{\delta\operatorname{meas}\mathcal{O}_R^{mp}\ \tilde\nu^{-\theta}}{m\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)(\pi R^2)^{(m-1)p}}.$$

Тоді для міри множини $\mathrm{W}\mathcal{N}_\delta^{m-1}(\nu)$ виконується така нерівність:

$$\operatorname{meas}\mathrm{W}\mathcal{N}_\delta^{m-1}(\nu)<\frac{\delta\operatorname{meas}\mathcal{O}_R^{mp}\ \tilde\nu^{-\theta}}{m\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)}.$$

Нехай $\mathrm{W}\mathcal{N}_\delta^{m-2}(\nu)$ — множина векторів $b\in\mathcal{O}_R^{mp}$, для яких для фіксованого ν при кожному $j=1,\dots,p$ виконується оцінка

$$|B_{(m-2)p+j}(\nu)|<\Big(\frac{\delta\operatorname{meas}\mathcal{O}_R^{mp}\ \tilde\nu^{-\theta}}{m\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)\pi^{mp}R^{2mp-2}}\Big)^{(3n-1)/2}. \quad (27)$$

Знайдемо оцінку для міри цієї множини. Позначимо через $\widetilde{\mathrm{W}\mathcal{N}}_\delta^{m-2}(\nu)\subset\mathcal{O}_R^{2p}$ множину векторів $b_{(m-2)p+1}$, …, b_{mp}, а через $\widetilde{\mathrm{W}\mathcal{N}}_\delta^{m-2}(\nu,\tilde b_{(m-2)p+j})$ — множину значень змінної $b_{(m-2)p+j}$ для фіксованого $\tilde b_{(m-2)p+j}$ із останніми p складовими з компонентами з множини $\widetilde{\mathrm{W}\mathcal{N}}_\delta^{m-1}(\nu)$, для яких виконується нерівність (27), де $\tilde b_{(m-2)p+j}$ — вектор з компонентами $b_{(m-2)p+1}$, …, b_{mp} без компоненти $b_{(m-2)p+j}$. Оскільки $\mathrm{W}\mathcal{N}_\delta^{m-2}(\nu)=\mathcal{O}_R^{(m-2)p}\times\widetilde{\mathrm{W}\mathcal{N}}_\delta^{m-2}(\nu)$, то міра цієї множини обчислюється за формулою

$$\operatorname{meas}\mathrm{W}\mathcal{N}_\delta^{m-2}(\nu)=(\pi R^2)^{(m-2)p}\operatorname{meas}\widetilde{\mathrm{W}\mathcal{N}}_\delta^{m-2}(\nu).$$

Для міри множини $\widetilde{W\mathcal{N}}_{\delta}^{m-2}(\nu, \tilde{b}_{(m-2)p+j})$ за лемою Картана справджується оцінка

$$\operatorname{meas} \widetilde{W\mathcal{N}}_{\delta}^{m-2}(\nu, \tilde{b}_{(m-2)p+j}) < \frac{\delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp} \ \tilde{\nu}^{-\theta}}{m\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)(\pi R^2)^{mp-1}}.$$

Проінтегрувавши по області $\mathcal{O}_R^{2p-1} \times \big(\mathcal{O}_R^{p} \backslash \widetilde{W\mathcal{N}}_{\delta}^{m-1}(\nu)\big)$, отримаємо, що

$$\operatorname{meas} \widetilde{W\mathcal{N}}_{\delta}^{m-2}(\nu) < \frac{\delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp} \ \tilde{\nu}^{-\theta}}{m\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)(\pi R^2)^{(m-2)p}}.$$

Тоді для міри множини $W\mathcal{N}_{\delta}^{m-2}(\nu)$ виконується така оцінка:

$$\operatorname{meas} W\mathcal{N}_{\delta}^{m-2}(\nu) < \frac{\delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp} \ \tilde{\nu}^{-\theta}}{m\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)}.$$

Аналогічно, через $W\mathcal{N}_{\delta}^{i}(\nu)$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, позначимо множину тих векторів $b \in \mathcal{O}_R^{mp}$, для яких для фіксованого ν при кожному $j = 1, \ldots, p$ виконується нерівність

$$|B_{ip+j}(\nu)| < \Big(\frac{\delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp} \ \tilde{\nu}^{-\theta}}{m\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)\pi^{mp}R^{2mp-2}}\Big)^{(2mn-(2i+1)n-1)/2}. \tag{28}$$

Знайдемо оцінки мір множин $W\mathcal{N}_{\delta}^{i}(\nu)$. Нехай $\widetilde{W\mathcal{N}}_{\delta}^{i}(\nu) \subset \mathcal{O}_R^{(m-i)p}$ — множина векторів b_{ip+1}, …, b_{mp}, а $\widetilde{W\mathcal{N}}_{\delta}^{i}(\nu, \tilde{b}_{ip+j})$ — множина змінної b_{ip+j} для фіксованого $\tilde{b}_{ip+j}$ із останніми $(m-i-1)p$ компонентами з множини $\widetilde{W\mathcal{N}}_{\delta}^{i+1}(\nu)$, де $\tilde{b}_{ip+j}$ — вектор з компонентами b_{ip+1}, …, b_{mp} без компоненти b_{ip+j}, для яких виконується нерівність (28). Оскільки $W\mathcal{N}_{\delta}^{i}(\nu) = \mathcal{O}_R^{ip} \times \widetilde{W\mathcal{N}}_{\delta}^{i}(\nu)$, то для міри цієї множини маємо

$$\operatorname{meas} W\mathcal{N}_{\delta}^{i}(\nu) = (\pi R^2)^{ip} \operatorname{meas} \widetilde{W\mathcal{N}}_{\delta}^{i}(\nu).$$

Для міри множини $\widetilde{W\mathcal{N}}_{\delta}^{i}(\nu, \tilde{b}_{ip+j})$ за лемою Картана справджується оцінка

$$\operatorname{meas} \widetilde{W\mathcal{N}}_{\delta}^{i}(\nu, \tilde{b}_{ip+j}) < \frac{\delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp} \ \tilde{\nu}^{-\theta}}{m\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)(\pi R^2)^{mp-1}}.$$

Інтегруючи по області $\mathcal{O}_R^{ip-1} \times \big(\mathcal{O}_R^{(m-i-1)p} \backslash \widetilde{W\mathcal{N}}_{\delta}^{i+1}(\nu)\big)$, отримаємо, що

$$\operatorname{meas} \widetilde{W\mathcal{N}}_{\delta}^{i}(\nu) < \frac{\delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp} \ \tilde{\nu}^{-\theta}}{m\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)(\pi R^2)^{ip}}.$$

Отже, для міри множини $W\mathcal{N}_{\delta}^{i}(\nu)$ виконується така нерівність:

$$\operatorname{meas} W\mathcal{N}_{\delta}^{i}(\nu) < \frac{\delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp} \ \tilde{\nu}^{-\theta}}{m\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)}.$$

Оцінку для міри множини $W\mathcal{N}_{\delta}(\nu) = \bigcup\limits_{i=0}^{m-1} W\mathcal{N}_{\delta}^{i}(\nu)$ запишемо у вигляді

$$\operatorname{meas} W\mathcal{N}_{\delta}(\nu) \le \sum_{i=0}^{m-1} \operatorname{meas} W\mathcal{N}_{\delta}^{i}(\nu) < \frac{\delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp} \ \tilde{\nu}^{-\theta}}{\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)}.$$

Об'єднаємо множини $W\mathcal{N}_{\delta}(\nu)$ в одну множину

$$W\mathcal{N}_{\delta} = \bigcup_{i=0}^{m-1} W\mathcal{N}_{\delta}^{i}(\nu) \tag{29}$$

і оцінимо міру цієї множини

$$\operatorname{meas} W\mathcal{N}_{\delta} \le \sum_{\nu \in \mathcal{N}} \operatorname{meas} W\mathcal{N}_{\delta}(\nu) < \delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp}. \tag{30}$$

Вектор b вважатимемо елементом множини $\mathcal{O}_R^{mp} \backslash W\mathcal{N}_{\delta}$. Враховуючи формулу (30), отримаємо таку нерівність для оцінки її міри:

$$\operatorname{meas} (\mathcal{O}_R^{mp} \setminus W\mathcal{N}_{\delta}) \ge (1-\delta) \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp}. \tag{31}$$

На множині $\mathcal{O}_R^{mp} \backslash W\mathcal{N}_{\delta}$ із рівності (25) та нерівностей (26)–(28) випливає, що

$$\begin{aligned} &\Big|\operatorname{Disc} f(\cdot, \nu)\Big| \ge \\ &\ge n^{mn}\Big(\frac{\delta \operatorname{meas} \mathcal{O}_R^{mp} \ \tilde{\nu}^{-\theta}}{m\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)(p+1)^n \pi^{mp} R^{2mp-2}}\Big)^{m(mn-1)/2} = \\ &\qquad = \delta^{m(mn-1)/2} C_4 \tilde{\nu}^{-\eta_1} \end{aligned}$$

для фіксованого вектора $\nu \in \mathcal{N}$.

Отже, поза множиною $W\mathcal{N}_{\delta}$ нерівність (24) виконується для всіх $\nu \in \mathcal{N}$. Теорему доведено. ■

Розглянемо умови, за яких виконуються нерівності (20). Послідовність знаменників функції $\rho_\nu(\lambda_l(\nu), t)$ може мати збіжні до нуля підпослідовності, тобто містити малі знаменники. Для оцінювання величини $\rho_\nu(\lambda_l(\nu), t)$, як функції ν, побудуємо виняткові множини малої міри на комплексній площині для параметра μ, використання яких є варіантом метричного підходу до оцінювання малих знаменників [1, 3].

Виберемо додатне число $\chi_{\mathcal{N}}$ з умови

$$\chi_{\mathcal{N}}^2 32 n T^2 \zeta_{\mathcal{N}}(\theta) = \pi.$$

Нехай $\varepsilon < 1$ і $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\chi_{\mathcal{N}} T)$, якщо $n = 1$; тоді для $n > 1$ виконується нерівність

$$\ln 2/(2\chi_{\mathcal{N}} T) = \ln 2\sqrt{8n\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)/\pi} \ge \sqrt{2n/\pi} > 1,$$

тобто також $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\chi_{\mathcal{N}} T)$.

Позначимо $\chi_{1\mathcal{N}} = \sqrt{\varepsilon}\chi_{\mathcal{N}}\tilde{\nu}^{-\theta/2}$ та $\mu_{l\nu} = e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}$, $\mu_\nu(\lambda) = e^{\tilde{\nu}\lambda T}$. Враховуючи ці позначення, отримаємо, що $\rho_\nu(\lambda, t) = \dfrac{e^{\tilde{\nu}\lambda t}}{\mu - \mu_\nu(\lambda)}$.

Виберемо множини $V\mathcal{N}_l(\nu)$ для тих $l = 1, \ldots, n$ та $\nu \in \mathcal{N}$, що задовольняють умову $|\mu_{l\nu}| < 2M$ за такою формулою:

$$\begin{aligned} V\mathcal{N}_l(\nu) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(\lambda - \lambda_l(\nu))| < \frac{\chi_{1\mathcal{N}}}{2}, \\ |\operatorname{Im}(\lambda - \lambda_l(\nu))| < \frac{\chi_{1\mathcal{N}}}{2}\Big\}. \end{aligned}$$

Кожна множина $V\mathcal{N}_l(\nu)$ — це квадрат (рис. 1) зі стороною $\chi_{1\mathcal{N}}$, центром $\lambda_l(\nu)$ і вершинами M^{--}, M^{-+}, M^{++}, M^{+-} у комплексній площині змінної λ. Точки M^{--}, M^{-+}, M^{++}, M^{+-} зображають комплексні числа $\lambda_l(\nu) - (1+i)\chi_{1\mathcal{N}}/2$, $\lambda_l(\nu) - (1-i)\chi_{1\mathcal{N}}/2$, $\lambda_l(\nu) + (1+i)\chi_{1\mathcal{N}}/2$, $\lambda_l(\nu) + (1-i)\chi_{1\mathcal{N}}/2$ відповідно.

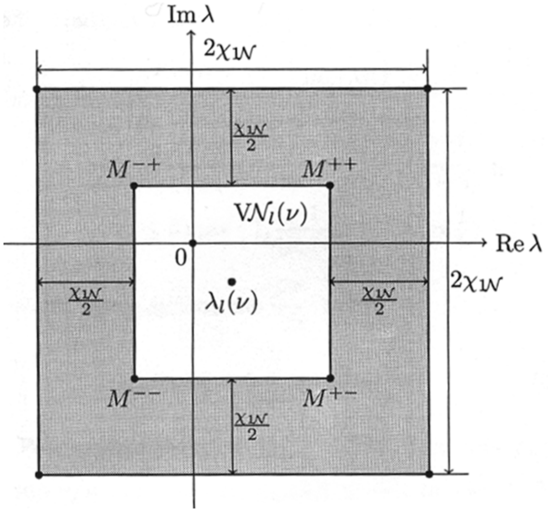

Рис. 1. Концентричні квадрати з центром у точці $\lambda_l(\nu)$: квадрат $V\mathcal{N}_l(\nu)$ зі стороною $\chi_{1\mathcal{N}}$ та квадрат із стороною $2\chi_{1\mathcal{N}}$. Виділено множину, яка є різницею цих квадратів

Нехай множина

$$V\mathcal{N}_{l,2}(\nu) = \Big\{\mu \in \mathbb{C}\colon e^{-\chi_{1\mathcal{N}}T/2} \le \Big|\frac{\mu}{\mu_{l\nu}}\Big| \le e^{\chi_{1\mathcal{N}}T/2}, \\ \Big|\arg\frac{\mu}{\mu_{l\nu}}\Big| \le \chi_{1\mathcal{N}}T/2\Big\}$$

є образом квадрата $V\mathcal{N}_l(\nu)$ при відображенні $\lambda \to e^{\tilde{\nu}\lambda T}$, а множина $V\mathcal{N}_{l,1}(\nu)$ є образом концентричного до $V\mathcal{N}_l(\nu)$ квадрата зі стороною $2\chi_{1\mathcal{N}}$ (рис. 2), тобто її можна задати за допомогою формули

$$V\mathcal{N}_{l,1}(\nu) = \Big\{\mu \in \mathbb{C}\colon e^{-\chi_{1\mathcal{N}}T} \le \Big|\frac{\mu}{\mu_{l\nu}}\Big| \le e^{\chi_{1\mathcal{N}}T}, \\ \Big|\arg\frac{\mu}{\mu_{l\nu}}\Big| \le \chi_{1\mathcal{N}}T\Big\}.$$

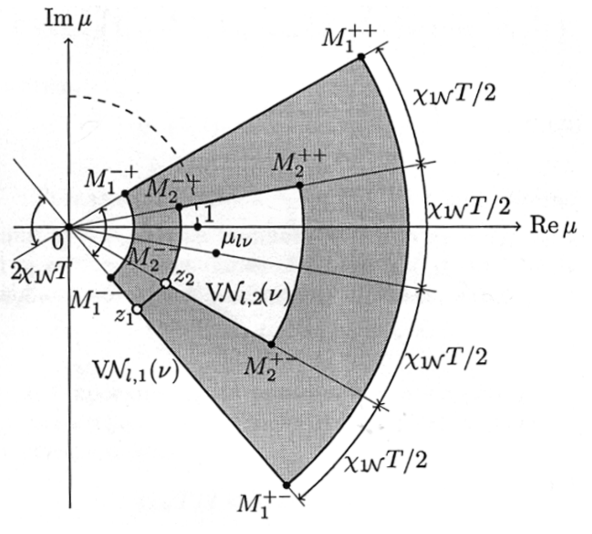

Рис. 2. Образи квадратів з рис. 1 при відображенні $\lambda \to e^{\tilde{\nu}\lambda T}$ і мінімальна відстань $|z_1 z_2|$ між ними

Площа (міра) множини $V\mathcal{N}_{l,1}(\nu)$, яку назвемо винятковою множиною для заданого ν, обчислюється за формулою

$$\operatorname{meas} V\mathcal{N}_{l,1}(\nu) = \frac{2\chi_{1\mathcal{N}}T}{2\pi}\big(\pi|\mu_{l\nu}|^2 e^{2\chi_{1\mathcal{N}}T} - \\ - \pi|\mu_{l\nu}|^2 e^{-2\chi_{1\mathcal{N}}T}\big) = \chi_{1\mathcal{N}}T|\mu_{l\nu}|^2\big(e^{2\chi_{1\mathcal{N}}T} - e^{-2\chi_{1\mathcal{N}}T}\big).$$

Оскільки $e^{2\chi_{1\mathcal{N}}T} < 2$ і

$$\frac{e^{y_2\chi_{1\mathcal{N}}T} - e^{y_1\chi_{1\mathcal{N}}T}}{y_2 - y_1} = \chi_{1\mathcal{N}}Te^{y_3\chi_{1\mathcal{N}}T} \le \chi_{1\mathcal{N}}Te^{y_2\chi_{1\mathcal{N}}T},$$

де $y_3 \in (y_1; y_2)$, то

$$\operatorname{meas} V\mathcal{N}_{l,1}(\nu) = 4\chi_{1\mathcal{N}}T|\mu_{l\nu}|^2\frac{e^{2\chi_{1\mathcal{N}}T} - e^{-2\chi_{1\mathcal{N}}T}}{4} \le \\ \le 4\big(\chi_{1\mathcal{N}}T|\mu_{l\nu}|\big)^2 e^{2\chi_{1\mathcal{N}}T} < 32(\chi_{1\mathcal{N}}TM)^2.$$

Об'єднаємо виняткові множини $V\mathcal{N}_{l,1}(\nu)$ в одну виняткову множину

$$V\mathcal{N}_\varepsilon = \bigcup_{\substack{\nu\in\mathcal{N};\\ |\mu_{l\nu}|\le 2M}} \bigcup_{l=1}^{n} V\mathcal{N}_{l,1}(\nu) \tag{32}$$

і знайдемо оцінку її міри:

$$\operatorname{meas} V\mathcal{N}_\varepsilon = \sum_{\substack{\nu\in\mathcal{N};\\ |\mu_{l\nu}|\le 2M}} \sum_{l=1}^{n} \operatorname{meas} V\mathcal{N}_{l,1}(\nu) \le \\ \le 32(TM)^2 \sum_{\nu\in\mathcal{N}} \chi_{1\mathcal{N}}^2.$$

Враховуючи позначення $\chi_{1\mathcal{N}}$ та $\chi_{\mathcal{N}}$, отримуємо, що

$$\operatorname{meas} V\mathcal{N}_\varepsilon \le 32nT^2\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)\chi_{\mathcal{N}}^2\varepsilon M^2 = \varepsilon\pi M^2 = \varepsilon \operatorname{meas}\mathcal{O}_M. \tag{33}$$

Параметр μ вважатимемо елементом множини $\mathcal{O}_M \setminus V\mathcal{N}_\varepsilon$. Враховуючи формулу (33), для міри множини $\mathcal{O}_M \setminus V\mathcal{N}_\varepsilon$ запишемо таку оцінку:

$$\operatorname{meas}(\mathcal{O}_M \setminus V\mathcal{N}_\varepsilon) \ge (1-\varepsilon)\operatorname{meas}\mathcal{O}_M. \tag{34}$$

Теорема 4. *Якщо $\eta_2 = \theta/2$, то для всіх векторів $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V\mathcal{N}_\varepsilon$ функція $\rho_\nu(\lambda, t)$ в області $V\mathcal{N}_l(\nu) \times [0, T]$ має оцінку зверху*

$$|\rho_\nu(\lambda, t)| \le \frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon}}\tilde{\nu}^{\eta_2}, \tag{35}$$

де $\tau = 8\max\{2, 1/|\mu|\}\sqrt{2\pi n\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)} \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$.

□ *Доведення.* Спочатку розглянемо випадок $|\mu_{l\nu}| \ge 2M$. У кожному такому квадраті $V\mathcal{N}_l(\nu)$ виконуються нерівності

$$|\mu_{l\nu}|e^{-\chi_{1\mathcal{N}}T/2} \le |\mu_\nu(\lambda)| \le |\mu_{l\nu}|e^{\chi_{1\mathcal{N}}T/2},$$

де $e^{2\chi_{1\mathcal{N}}T} = e^{2\sqrt{\varepsilon}\chi_{\mathcal{N}}T\tilde{\nu}^{-\eta_2}} < e^{\tilde{\nu}^{-\eta_2}\ln 2} = 2^{\tilde{\nu}^{-\eta_2}} \le 2$, тому

$$3M/2 < 2^{3/4}M \le 2^{-1/4}|\mu_{l\nu}| \le |\mu_\nu(\lambda)| \le 2^{1/4}|\mu_{l\nu}|.$$

Далі отримуємо, що

$$|\rho_\nu(\lambda,t)| = \Big|\frac{e^{\tilde{\nu}\lambda(\nu)T\frac{t}{T}}}{\mu-\mu_\nu(\lambda)}\Big| = \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu-\mu_\nu(\lambda)|} =$$
$$= \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu_\nu(\lambda)||\mu/\mu_\nu(\lambda)-1|} = \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}-1}}{|\mu/\mu_\nu(\lambda)-1|} \le$$
$$\le 3\max\Big\{1, \frac{1}{|\mu_\nu(\lambda)|}\Big\} < \max\Big\{3, \frac{2}{M}\Big\},$$

а також, враховуючи, що $\dfrac{\tilde{\nu}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} > 1$,

$$|\rho_\nu(\lambda,t)| < \frac{\tilde{\nu}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}}\max\Big\{3, \frac{2}{M}\Big\}. \tag{36}$$

Розглянемо випадок $|\mu_{l\nu}| < 2M$, тоді для $\mu_\nu(\lambda)$ маємо три можливості: $|\mu_\nu(\lambda)| \le \dfrac{|\mu|}{2}$, $|\mu_\nu(\lambda)| \ge 2|\mu|$ та $\dfrac{|\mu|}{2} < |\mu_\nu(\lambda)| < 2|\mu|$.

Якщо $|\mu_\nu(\lambda)| \le \dfrac{|\mu|}{2}$, то $|\mu-\mu_\nu(\lambda)| \ge \dfrac{|\mu|}{2}$ і

$$|\rho_\nu(\lambda,t)| = \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu-\mu_\nu(\lambda)|} \le \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu|/2} = \frac{2|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu|} \le$$
$$\le \frac{2}{|\mu|}\max\{1, |\mu_\nu(\lambda)|\} \le \frac{2}{|\mu|}\max\Big\{1, \frac{|\mu|}{2}\Big\} = \max\Big\{1, \frac{2}{|\mu|}\Big\},$$

а також

$$|\rho_\nu(\lambda,t)| \le \frac{\tilde{\nu}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}}\max\Big\{1, \frac{2}{|\mu|}\Big\}. \tag{37}$$

Якщо $|\mu_\nu(\lambda)| \ge 2|\mu|$, то

$$|\mu-\mu_\nu(\lambda)| = |\mu_\nu(\lambda)|\Big|\frac{\mu}{\mu_\nu(\lambda)} - 1\Big| \ge \frac{|\mu_\nu(\lambda)|}{2}$$

і виконується нерівність

$$|\rho_\nu(\lambda,t)| = \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu-\mu_\nu(\lambda)|} \le \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu_\nu(\lambda)|/2} = 2|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t-T}{T}} \le$$
$$\le 2\max\Big\{1, \frac{1}{|\mu_\nu(\lambda)|}\Big\} \le \max\Big\{2, \frac{2}{2|\mu|}\Big\} = \max\Big\{2, \frac{1}{|\mu|}\Big\},$$

а отже,

$$|\rho_\nu(\lambda,t)| \le \frac{\tilde{\nu}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}}\max\Big\{2, \frac{1}{|\mu|}\Big\}. \tag{38}$$

Розглянемо випадок $\dfrac{|\mu|}{2} < |\mu_\nu(\lambda)| < 2|\mu|$. Знаменник $|\mu-\mu_\nu(\lambda)|$ не менший, ніж $\min|z_1 - z_2|$, де z_1 і z_2 належать границям областей $\mathrm{V}\mathcal{N}_{l,1}(\nu)$ і $\mathrm{V}\mathcal{N}_{l,2}(\nu)$ відповідно. Цей мінімум досягається, якщо

$$z_2 = e^{\tilde{\nu}(\lambda_l(\nu)-(i+1)\chi_{1\mathcal{N}}/2)T},$$

а z_1 — проекція z_2 на промінь $z = \arg\lambda_l(\nu) - \chi_{1\mathcal{N}}T$ і дорівнює $|\mu_{l\nu}|e^{-\chi_{1\mathcal{N}}T/2}\sin(\chi_{1\mathcal{N}}T/2)$. Оскільки справджуються оцінки

$$\chi_{1\mathcal{N}}T/2 < \ln 2/4 < 1/4 < \pi/4$$

і $\sin x > 2\sqrt{2}x/\pi$ для $x \in [0, \pi/4]$, то

$$\sin\chi_{1\mathcal{N}}T/2 \ge 2\sqrt{2}\chi_{1\mathcal{N}}T/2\pi = \sqrt{2}\chi_{1\mathcal{N}}T/\pi.$$

З нерівності $|\mu_{l\nu}| \ge |\mu_\nu(\lambda)|e^{-\chi_{1\mathcal{N}}T/2}$ отримаємо

$$|\mu-\mu_\nu(\lambda)| \ge |\mu_{l\nu}|e^{-\chi_{1\mathcal{N}}T/2}\sin(\chi_{1\mathcal{N}}T/2) \ge$$
$$\ge |\mu_\nu(\lambda)|e^{-\chi_{1\mathcal{N}}T}\sqrt{2}\chi_{1\mathcal{N}}T/\pi > |\mu|\chi_{1\mathcal{N}}T/2\pi,$$

звідки випливає

$$|\rho_\nu(\lambda,t)| = \frac{|\mu_\nu(\lambda)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu-\mu_\nu(\lambda)|} < \frac{\max\{1, 2|\mu|\}}{|\mu-\mu_\nu(\lambda)|} \le$$
$$\le \frac{2\pi\max\{1, 2|\mu|\}}{|\mu|\chi_{1\mathcal{N}}T} \le \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}\chi_{\mathcal{N}}\tilde{\nu}^{-\eta_2}T}\max\Big\{2, \frac{1}{|\mu|}\Big\} \le$$
$$\le \frac{\tilde{\nu}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}}8\sqrt{2n\pi\zeta_{\mathcal{N}}(\theta)}\max\Big\{2, \frac{1}{|\mu|}\Big\}. \tag{39}$$

Праві частини у формулах (36)–(39) оцінюються числом $\dfrac{\tau\tilde{\nu}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}}$. Отже, нерівність (35) виконується при $\eta_2 = \theta/2$ для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\mathcal{N}_\varepsilon$. Теорему доведено. ■

Оскільки $\lambda_l(\nu) \in \mathrm{V}\mathcal{N}_l(\nu)$ і $\left|\dfrac{e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)t}}{\mu - e^{\tilde{\nu}\lambda_l(\nu)T}}\right| = |\rho_\nu(\lambda_l(\nu), t)|$, то оцінка (20) виконується для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\mathcal{N}_\varepsilon$.

Сформулюємо та доведемо теорему існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)$ з урахуванням метричних теорем 3 та 4.

Теорема 5. *Нехай число θ задає асимптотику спектра $\mathcal{N}$, множини $\mathrm{W}\mathcal{N}_\delta$ і $\mathrm{V}\mathcal{N}_\varepsilon$ задано формулами (29) і (32), а оцінки мір множин $\mathcal{O}^{mp}_R \setminus \mathrm{W}\mathcal{N}_\delta$ та $\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\mathcal{N}_\varepsilon$ визначають рівності (31) та (34) відповідно, $\psi = (m^2n - m + 1)\theta/2$. Тоді у разі $\varphi_0 \in \overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_{q+\psi}(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in \overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_{q-1+\psi}(\mathcal{S}^p)$, …, $\varphi_{n-1} \in \overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_{q-n+1+\psi}(\mathcal{S}^p)$ для всіх (b,μ) з множини $(\mathcal{O}^{mp}_R \setminus \mathrm{W}\mathcal{N}_\delta) \times (\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\mathcal{N}_\varepsilon)$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з простору $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)$, який неперервно залежить від правих частин умов (2).*

□ *Доведення.* За теоремою 3 для всіх векторів $b \in \mathcal{O}^{mp}_R \setminus \mathrm{W}\mathcal{N}_\delta$ виконується оцінка (19) зі сталою $\eta_1 = m(mn-1)\theta/2$. Згідно з теоремою 4 для довільного числа $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\mathcal{N}_\varepsilon$ виконується оцінка (20) зі сталою $\eta_2 = \theta/2$. Отже, для квадрата норми розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)$ виконується нерівність

$$\|u\|^2_{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)} \le \frac{C_5}{\varepsilon\delta^{m(mn-1)}}\sum_{j=0}^{n-1}\|\varphi_j\|^2_{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_{q-j+\psi}(\mathcal{S}^p)},$$

де $C_5 > 0$ — величина, яка залежить від m, n, p та коефіцієнтів системи (1). Тоді з теореми 2 випливає як існування розв'язку задачі (1), (2) з простору $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)$, так і його неперервна залежність від функцій $\varphi_0 \in \overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_{q+\psi}(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in \overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_{q-1+\psi}(\mathcal{S}^p)$, …, $\varphi_{n-1} \in \overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}_{q-n+1+\psi}(\mathcal{S}^p)$.

Оскільки до множини $\mathrm{V}\mathcal{N}_\varepsilon$ належать всі розв'язки рівняння (14), то з умови $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\mathcal{N}_\varepsilon$ і теореми 1 випливає єдиність розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)$. Тому для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\mathcal{N}_\varepsilon$ з існування розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)$ випливає його єдиність на множині $\mathcal{O}_M \setminus \mathrm{V}\mathcal{N}_\varepsilon$. Теорему доведено. ■

Висновки

У праці досліджено умови розв'язності нелокальної крайової задачі для системи диференціально-операторних рівнянь з оператором диференціювання $B = (B_1, \ldots, B_p)$, де $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, p$, який діє на функції комплексних змінних $z_1, \ldots, z_p$. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі у шкалі просторів $\{\overline{\mathbf{H}\mathcal{N}}^n_q(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ функцій, що є рядами Діріхле-Тейлора зі заданим спектром $\mathcal{N}$ та заданою асимптотикою і коефіцієнтами із $\mathbf{C}^n[0,T]$. Значення на проміжку $[0,T]$ функцій з цієї шкали та їх похідних до порядку n включно належать до просторів із гільбертової (типу Соболєва) шкали. Для вирішення проблеми малих знаменників, що виникли під час побудови розв'язку задачі, використано метричний підхід, який дав змогу отримати оцінки знизу для майже всіх векторів, складених з коефіцієнтів рівняння та параметра крайових умов.

Література

[1] *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

[2] *Пташник Б. Й.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наукова думка, 1984. – 264 с.

[3] *Борок В. М., Фардигола Л. В.* Нелокальные корректные краевые задачи в слое // Матем. заметки. – 1990. – 48:1. – С. 20–25.

[4] *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич І. В.* Задача з нелокальною двоточковою умовою за часом для однорідного рівняння із частинними похідними нескінченного порядку за просторовими змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4 – С. 17–26.

[5] *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.

[6] *Ільків В. С., Страп Н. І.* Нелокальна крайова задача для рівняння з частинними похідними у багатовимірній комплексній області // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Математика і інформатика. – 2013. – **24**, № 1. – С. 60–72.

[7] *Ільків В. С., Страп Н. І.* Умови розв'язності нелокальних задач для диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами у просторах рядів Діріхле-Тейлора // Буковинський математичний журнал. – 2013. – **1**, № 3–4. – С. 56–68.

[8] *Прасолов В. В.* Многочлены. – М.: МЦНМО, 2001. – 336 с.

[9] *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1624—1650.

[10] *Илькив В. С.* Компактное обращение обобщенной матрицы Вандермонда. – Деп. в НИИЭИР. Сб. реф. деп. рук. ВИМИ, 1991. – **5**, № 3-8836. – 10 с.

[11] *Магеровська Т. В.* Дослідження гладкості розв'язку задачі Коші для систем рівнянь із частинними похідними за допомогою метричного підходу // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2011. – **1**, № 1–2. – С. 84–93.

[12] *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Апроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ-ТЕЙЛОРА

Илькив В. С., Страп Н. И.

Национальный университет “Львивська политэхника”
ул. С. Бандеры 12, 79013, Львов, Украина

Исследована нелокальная краевая задача для системы дифференциально-операторных уравнений с оператором дифференцирования $B = (B_1, \ldots, B_p)$, где $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, p$, в пространствах функций многих комплексных переменных, которые являются рядами Дирихле-Тейлора с фиксированным спектром. Задача является некорректной по Адамару, а ее разрешимость связана с проблемой малых знаменателей, которые возникают при построении решения. Доказаны метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, которые зависят от асимптотики спектра рядов Дирихле-Тейлора, а также установлены условия существования и единственности решения этой нелокальной задачи в шкале пространств функций многих комплексных переменных.

Ключевые слова: уравнения с частными производными, нелокальная задача, малые знаменатели, метрическая оценка, ряд Дирихле-Тейлора

2000 MSC: 35E20

УДК: 517.946+511.37

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATIONS IN THE SPACES OF DIRICHLET-TAYLOR SERIES

Il’kiv V. S., Strap N. I.

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

The paper is devoted to investigation of nonlocal boundary value problem for a system of partial differential-operator equations with differentiation operator $B = (B_1, \ldots, B_p)$, where $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, p$, in the spaces of several complex variables functions, which are Dirichlet-Taylor series with fixed spectrum. This problem is incorrect in the Hadamard sense and its solvability related to the small denominators, which arising in the construction of the solution. By using of metric approach, theorems about lower estimations of small denominators, that depends on the asymptotic of Dirichlet-Taylor series spectrum, was proved. Also existence and uniqueness conditions of the solution of this nonlocal problem in the scale of spaces of several complex variables functions are establish.

Key words: partial differential equation, nonlocal problem, small denominators, metric estimation, Dirichlet-Taylor series.

2000 MSC: 35E20

UDK: 517.946+511.37