ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№804, 2014, с. 49–56

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№804, 2014, p. 49–56

ОЦІНКИ МІР ВИНЯТКОВИХ МНОЖИН ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ

Пташник Б. Й., Симотюк М. М.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
79060, вул. Наукова, 3-б, Львів, Україна

(Отримано 3 листопада 2014 р.)

Встановлено оцінки зверху мір Лебега виняткових множин гладких функцій, результат дії, на які диференціального виразу другого порядку не дорівнює нулю. Розглянуто часткові випадки, коли вираз допускає факторизацію за Маммана. Наведено застосування отриманих результатів для доведення метричних оцінок знизу малих знаменників, які виникають під час дослідження двоточкових задач для навантажених рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами.

Ключові слова: диференціальні рівняння, малі знаменники, міра Лебега, факторизація за Маммана, функція Ґріна, виняткові множини.

2000 MSC: 35K35, 35B15, 35B30

УДК: 517.95+511.2

Вступ

Нехай $\operatorname{mes} A$ — міра Лебега вимірної множини A, $A \subset \mathbb{R}$, $C^m(I)(m \in \mathbb{N})$ — простір дійснозначних функцій, m раз неперервно диференційовних на проміжку I. Для функції $f : I \to \mathbb{R}$, заданої на проміжку $I \subset \mathbb{R}$, через $E(f, \varepsilon, I)$, $\varepsilon > 0$, будемо позначати множину $\{t \in I : |f(t)| < \varepsilon\}$. Множину $E(f, \varepsilon, I)$ називатимемо „ε-винятковою" для функції f на проміжку I. Мірі Лебега цієї множини можна дати таку фізичну інтерпретацію: якщо $f(t)$ — відхилення матеріальної точки від нульового положення рівноваги у момент часу t, то $\operatorname{mes} E(f, \varepsilon, (a, b))$ — це сумарний час між моментами a та b, впродовж якого матеріальна точка перебуває в ε-околі цього положення рівноваги.

У роботі [15] встановлено такий результат про оцінку згори мір „ε-виняткових" множин.

Теорема A. *Нехай функції $f \in C^{n+1}[a, b]$, $a_j \in C[a, b]$, $j = 1, \ldots, n$, є такими, що для всіх $t \in [a, b]$ виконується нерівність*

$$\left| L_n\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) \right| \equiv \Big| f^{(n)}(t) + a_1(t) f^{(n-1)}(t) + \\ + \ldots + a_n(t) f(t) \Big| \geq \delta > 0. \tag{1}$$

Тоді для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0/2)$ виконується оцінка

$$\operatorname{mes} E(f, \varepsilon, (a, b)) \leq C_1 \max\left\{1, \frac{M}{\delta} G_1^n\right\} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}}, \tag{2}$$

де $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(n+1)G_1^n}$, $G_1 = 1 + \max\limits_{1 \leq j \leq n} \max\limits_{t \in [a,b]} \sqrt[j]{|a_j(t)|}$, $M = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \max\limits_{t \in [a,b]} |f^{(j)}(t)|$, C_1 — додатна стала, яка залежить тільки від n і $(b - a)$.

Теорему A застосовано у праці [15] для оцінок знизу малих знаменників [9], які виникають під час дослідження багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними. Хоча в умові (1) присутні похідні функції f лише до порядку n включно, припущення про її диференційовність до порядку $(n + 1)$ є істотним (див. [15]) для доведення оцінки (2).

Проте для оцінок знизу малих знаменників, які виникають у задачах із багатоточковими умовами для навантажених рівнянь із частинними похідними, виникає потреба встановити оцінки згори міри „ε-виняткової" множини для функції f, порядок гладкості якої на відрізку $[a, b]$ співпадає з порядком n диференціального виразу $L_n\left(\frac{d}{dt}\right)$ в умові (1). Для часткових випадків, коли

$$L_n\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n$$

(тобто $a_j(t) \equiv 0$, $j = 1, \ldots, n$), або коли вираз $L_n\left(\frac{d}{dt}\right)$ допускає факторизацію

$$L_n\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt} - b_1(t)\right) \ldots \left(\frac{d}{dt} - b_n(t)\right),$$

де $b_j \in C^{j-1}[a, b]$, $j = 1, \ldots, n$, а дія диференціальних множників береться справа наліво, такі оцінки доведено у роботах [2, 4, 5, 14, 18, 19, 22].

Зокрема, якщо $f \in C^n[a, b]$ і $|f^{(n)}(t)| > \delta$ для всіх $t \in [a, b]$ у працях [4, 5, 14] доведено, що для довільного $\varepsilon > 0$ виконується оцінка

$$\operatorname{mes} E(f, \varepsilon, (a, b)) \leq C_2(n) \sqrt[n]{\varepsilon/\delta},$$

де $C_2(n)$ — додатна стала, яка залежить тільки від n. Якщо $f \in C^n[a, b]$ і в кожній точці $t \in [a, b]$

$$\left| \left(\frac{d}{dt} - b_1(t)\right) \ldots \left(\frac{d}{dt} - b_n(t)\right) f(t) \right| > \delta,$$

то у статті [14] встановлено, що для довільного $\varepsilon > 0$ справджується оцінка

$$\operatorname{mes} E(f, \varepsilon, (a, b)) \leq C_3(n) \sqrt[n]{\varepsilon\, e^{\nu(b-a)}/\delta},$$

де $C_3(n) = n2^{(n+1)/2}$, $\nu = \sum\limits_{j=1}^{n} \max\limits_{t\in[a,b]} |b_j(t)|$.

Оцінки згори для $\operatorname{mes} E(f,\varepsilon,(a,b))$ отримано у праці [10] у випадку, коли $f \in C^n[a,b]$, коефіцієнти диференціального виразу в умові (1) є сталими і відомі оцінки згори для кількостей нулів (які потрапляють на $[a,b]$) функцій $f^{(j)}(t) \pm f^{(q)}(t)$, $0 \le j < < q \le n$. Якщо функція f є нетривіальним розв'язком звичайного диференціального рівняння зі сталими або змінними коефіцієнтами, оцінки зверху для $\operatorname{mes} E(f,\varepsilon,(a,b))$ встановлено у працях [8, 16].

Для довільної функції $f \in C^n[a,b]$ та довільних змінних коефіцієнтів $a_j(t)$, $j = 1,\dots,n$, в умові (1) питання про оцінку згори для $\operatorname{mes} E(f,\varepsilon,(a,b))$ залишається відкритим. Ця робота заповнює вказану прогалину для випадку, коли $n = 2$.

Зауважимо, що теореми про оцінки мір „ε-виняткових" множин гладких функцій систематично використовуються у метричній теорії діофантових наближень, а також під час дослідження проблем малих знаменників, які виникають у задачах з багатоточковими та нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними (див. наприклад, праці [1, 9, 20, 22] та бібліографію там).

Отримані результати анонсовано в [11].

I. Формулювання основного результату

Основним результатом цієї роботи є таке твердження.

Теорема B. *Нехай функції $f \in C^2(A,B)$, $a_1, a_2 \in C(A,B)$ є такими, що для всіх $t \in (A,B)$ виконується нерівність*

$$\left| L_2\left(\frac{d}{dt}\right) f \right| \equiv |f''(t) + a_1(t)f'(t) + a_2(t)f(t)| > \delta, \quad (3)$$

де $\delta > 0$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ і довільного $[a,b] \subset (A,B)$ справджується оцінка

$$\operatorname{mes} E(f,\varepsilon,(a,b)) \le C_4 H e^{2(\alpha+\alpha_1)(b-a)} (\varepsilon/\delta)^{1/2}, \quad (4)$$

де $C_4 = C_4(a,b) > 0$ — стала, яка залежить тільки від a,b, $H = 1 + \max\left\{\alpha_1, \alpha_2^{1/2}\right\}$, $\alpha = \sqrt{1+\alpha_1^2+\alpha_2^2}$, $\alpha_j = \max\limits_{t\in[a,b]} |a_j(t)|$, $j = 1,2$.

Доведення теореми B ґрунтується на допоміжних теоремах 1–3. Зокрема, у теоремі 1 з розділу 2 цієї роботи встановлено оцінку міри „ε-виняткової" множини $E(f,\varepsilon,(a,b))$, якщо диференціальний вираз $L_2\left(\frac{d}{dt}\right)$ на всьому відрізку $[a,b]$ допускає факторизацію за Маммана [7, 17], тобто існують функції $q_j \in C^{2-j}[a,b]$, $j = 0,1,2$, такі, що для довільної функції $f \in C^2[a,b]$ правильною є рівність

$$L_2\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) = q_2(t)\frac{d}{dt}\left(q_1(t)\frac{d}{dt}\left(q_0(t)f(t)\right)\right). \quad (5)$$

Факторизацію за Маммана (5) на всьому проміжку $[a,b]$ допускають ті і тільки ті диференціальні вирази $L_2\left(\frac{d}{dt}\right)$, які мають таку властивість: кожен нетривіальний розв'язок рівняння $L_2\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) = 0$ має на $[a,b]$ не більше одного нуля [3, 7, 9].

У розділі 3 роботи запроваджено поняття розбиття відрізка, підпорядкованого системі двох функцій, заданих на ньому, а також виведено деякі властивості таких розбиттів. Так, у теоремі 2 показано, що на кожному з проміжків розбиття відрізка $[a,b]$, яке є підпорядкованим фундаментальній системі розв'язків $f_1(t), f_2(t)$, $t \in [a,b]$, звичайного диференціального рівняння $L_2\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) = 0$, диференціальний вираз $L_2\left(\frac{d}{dt}\right)$ допускає факторизацію вигляду (5), при цьому вказано формули для коефіцієнтів цієї факторизації. Розбиття відрізка $[a,b] = \bigcup\limits_{j=1}^{N} I_j$, підпорядковане фундаментальній системі розв'язків f_1, f_2, побудовано у теоремі 3, тут же наведено оцінки для кількості N проміжків цього розбиття. Отже, оцінка (4) випливає з нерівності

$$\operatorname{mes} E(f,\varepsilon,(a,b)) \le \sum_{j=1}^{N} \operatorname{mes} E(f,\varepsilon,I_j) \le$$
$$\le N \max_{1\le j\le N} \operatorname{mes} E(f,\varepsilon,I_j)$$

та результатів, доведених у теоремах 1, 3.

У розділі 5 теорему B застосовано для доведення теореми 4 про метричні оцінки знизу малих знаменників, які виникають у двоточкових задачах для навантажених рівнянь із частинними похідними.

II. Випадок факторизованого диференціального виразу

Розглянемо питання про оцінку згори міри "ε-виняткової" множини $E(f,\varepsilon,(a,b))$ у випадку, коли вираз $L_2\left(\frac{d}{dt}\right)$ допускає факторизацію (5). Для цього нам знадобиться наступне твердження.

Лема 1. *Нехай функції $f, q_0 \in C^1(A,B)$, $q_1 \in C(A,B)$ є такими, що для всіх $t \in (A,B)$ виконується нерівність*

$$\left| q_1(t)\frac{d}{dt}\left(q_0(t)f(t)\right) \right| > \delta, \quad \delta > 0. \quad (6)$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ і для довільного $(a,b) \subset \subset (A,B)$ справджується оцінка

$$\operatorname{mes} E(f,\varepsilon,(a,b)) \le 2\varepsilon Q_0 Q_1/\delta, \quad (7)$$

де $Q_j = \max\limits_{t\in[a,b]} |q_j(t)|$[1]*, $j = 0,1$.*

□ *Доведення.* Оскільки

$$E(f,\varepsilon,(a,b)) \subset E(q_0 f, \varepsilon Q_0, (a,b)), \quad \varepsilon > 0,$$

то $\operatorname{mes} E(f,\varepsilon,(a,b)) \le \operatorname{mes} E(q_0 f, \varepsilon Q_0, (a,b))$. Для доведення леми досить показати, що

$$\operatorname{mes} E(q_0 f, \varepsilon Q_0, (a,b)) \le 2\varepsilon Q_0 Q_1/\delta.$$

[1] зауважимо, що з умови (6) випливає, що $Q_0 \ne 0$ і $Q_1 \ne 0$.

З оцінки (6) отримуємо, що в кожній точці $t \in (A, B)$ виконується нерівність $|(q_0(t)f(t))'| > \delta/Q_1$. Якщо $E(q_0 f, \varepsilon Q_0, (a,b)) = \emptyset$, то оцінка (7) є очевидною. Якщо ж $E(q_0 f, \varepsilon Q_0, (a,b)) \neq \emptyset$, то з неперервності та строгої монотонності функції $q_0 f$ на проміжку (A, B) випливає, що множина $E(q_0 f, \varepsilon Q_0, (a,b))$ є відкритим інтервалом (α, β), $a \le \alpha < \beta \le b$. У цьому випадку, за теоремою Лагранжа, знайдеться така точка $\xi \in (\alpha, \beta)$, що

$$q_0(\beta)f(\beta) - q_0(\alpha)f(\alpha) = (q_0 f)'(\xi)(\beta - \alpha).$$

Оскільки $|q_0(\alpha)f(\alpha)| \le \varepsilon Q_0$, $|q_0(\beta)f(\beta)| \le \varepsilon Q_0$, то

$$|\beta - \alpha| = |q_0(\beta)f(\beta) - q_0(\alpha)f(\alpha)|/|(q_0 f)'(\xi)| \le 2\varepsilon Q_0 Q_1/\delta.$$

Звідси отримаємо, що

$$\operatorname{mes} E(q_0 f, \varepsilon Q_0, (a,b)) \le 2\varepsilon Q_0 Q_1/\delta.$$

Лему доведено. ■

Теорема 1. *Нехай функції $f, q_0 \in C^2(A,B)$, $q_1 \in C^1(A,B)$, $q_2 \in C(A,B)$ є такими, що для всіх $t \in (A,B)$ виконується нерівність*

$$\left| q_2(t) \frac{d}{dt}\left(q_1(t) \frac{d}{dt}\left(q_0(t)f(t)\right)\right)\right| > \delta, \quad \delta > 0. \qquad (8)$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ і для довільного $(a,b) \subset \subset (A,B)$ справджується оцінка

$$\operatorname{mes} E(f, \varepsilon, (a,b)) \le 4\left(2\varepsilon Q_0 Q_1 Q_2/\delta\right)^{1/2}, \qquad (9)$$

де $Q_j = \max\limits_{t\in[a,b]} |q_j(t)|$, $j = 0, 1, 2$.

□ *Доведення.* Нехай $h(t) \equiv q_1(t) \frac{d}{dt}\left(q_0(t)f(t)\right)$. Множину $E(f, \varepsilon, (a,b))$ покриємо двома множинами $M_1(\eta)$, $M_2(\varepsilon, \eta)$, $\eta > 0$:

$$E(f, \varepsilon, (a,b)) \subset M_1(\eta) \cup M_2(\varepsilon, \eta),$$

де

$$M_1(\eta) = \{t \in (a,b) : |h(t)| \le \eta\}, \quad \eta > 0,$$

$$M_2(\varepsilon, \eta) = \{t \in (a,b) : |f(t)| < \varepsilon, |h(t)| > \eta\}, \quad \eta > 0.$$

Множина $M_1(\eta)$ з точністю до множини

$$\{t \in (a,b) : |h(t)| = \eta\},$$

яка може складатися не більше ніж з двох точок, співпадає з „η-винятковою“ множиною функції h на проміжку (a,b). Оскільки для всіх $t \in (A,B)$ виконується оцінка $|q_2(t)h'(t)| > \delta$, то за лемою 1 для довільного $\eta > 0$

$$\operatorname{mes} M_1(\eta) = \operatorname{mes} E(h, \eta, (a,b)) \le 2\eta Q_2/\delta.$$

Зі строгої монотонності функції h на (A,B) випливає, що множина $\{t \in (a,b) : |h(t)| > \eta\}$ може складатися щонайбільше з двох неперетинних проміжків. Застосовуючи на кожному з цих проміжків лему 1, дістанемо, що

$$\operatorname{mes} M_2(\varepsilon, \eta) \le 4\varepsilon Q_0 Q_1/\eta, \quad \eta > 0.$$

У такий спосіб, для довільного $\eta > 0$

$$\operatorname{mes} E(f, \varepsilon, (a,b)) \le 2\frac{\eta Q_2}{\delta} + 4\frac{\varepsilon Q_0 Q_1}{\eta}.$$

Мінімум правої частини отриманої нерівності як функції від η, $\eta > 0$, досягається при $\eta = \eta^*$, $\eta^* = (2\varepsilon\delta Q_0 Q_1/Q_2)^{1/2}$. Отже,

$$\operatorname{mes} E(f, \varepsilon, (a,b)) \le 2\frac{\eta^* Q_2}{\delta} + 4\frac{\varepsilon Q_0 Q_1}{\eta^*} =$$

$$= 4\left(2\varepsilon Q_0 Q_1 Q_2/\delta\right)^{1/2}.$$

Теорему доведено. ■

Із теореми 1 випливають такі твердження про оцінку міри “ε-виняткової” множини функції f на проміжку (a,b), якщо результат дії на неї диференціального виразу зі сталими коефіцієнтами не перетворюється в нуль на цьому проміжку.

Наслідок 1. Якщо $f \in C^2(A,B)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ і для всіх $t \in (A,B)$ виконується нерівність

$$|f''(t) - (\lambda_1 + \lambda_2)f'(t) + \lambda_1\lambda_2 f(t)| > \delta, \quad \delta > 0,$$

то для довільного $\varepsilon > 0$ і для довільного $(a,b) \subset \subset (A,B)$

$$\operatorname{mes} E(f, \varepsilon, (a,b)) \le 4\left(2\varepsilon e^{\nu_0+\nu_1+\nu_2}/\delta\right)^{1/2}, \qquad (10)$$

де $\nu_0 = \max\{-\lambda_1 a, -\lambda_1 b\}$, $\nu_1 = \max\{(\lambda_1 - \lambda_2)a, (\lambda_1 - \lambda_2)b\}$, $\nu_2 = \max\{\lambda_2 a, \lambda_2 b\}$.

□ *Доведення.* Легко перевірити, що

$$f''(t) - (\lambda_1 + \lambda_2)f'(t) + \lambda_1\lambda_2 f(t) =$$

$$= e^{\lambda_2 t}\frac{d}{dt}\left(e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda_1 t}f(t)\right)\right).$$

Оскільки $e^{\nu_0} = \max\limits_{t\in[a,b]} e^{-\lambda_1 t}$, $e^{\nu_1} = \max\limits_{t\in[a,b]} e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}$, $e^{\nu_2} = \max\limits_{t\in[a,b]} e^{\lambda_2 t}$, то оцінка (10) є негайним наслідком з оцінки (9). ■

Наслідок 2. Нехай $f \in C^2(A,B)$, $|A|, |B| < \frac{\pi}{2\mu}$, $\mu > 0$. Якщо для всіх $t \in (A,B)$ виконується нерівність

$$\left|f''(t) + \mu^2 f(t)\right| > \delta, \quad \delta > 0,$$

то для довільного $\varepsilon > 0$ і для довільного $(a,b) \subset \subset (A,B)$

$$\operatorname{mes} E(f, \varepsilon, (a,b)) \le 4\left(2\varepsilon Q/\delta\right)^{1/2}, \qquad (11)$$

де $Q = \max\left\{\frac{1}{|\cos(\mu A)|}, \frac{1}{|\cos(\mu B)|}\right\}$.

□ *Доведення.* Із формули

$$f''(t) + \mu^2 f(t) = \frac{1}{\cos(\mu t)}\frac{d}{dt}\left(\cos^2(\mu t)\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{\cos(\mu t)}\right)\right)$$

і того, що $\max\limits_{t\in[a,b]}\left|\frac{1}{\cos(\mu t)}\right| \le \max\left\{\frac{1}{|\cos(\mu A)|}, \frac{1}{|\cos(\mu B)|}\right\}$, з оцінки (9) отримуємо оцінку (11). ■

III. Розбиття відрізка, підпорядковане системам функцій

Запровадимо поняття розбиття відрізка, яке підпорядковане системам двох функцій, заданих на ньому, а також встановимо деякі властивості такого розбиття, а також побудуємо його.

Означення. *Розбиття відрізка* $[a,b] = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ *назвемо підпорядкованим системі функцій*

$$f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f_2 : [a,b] \to \mathbb{R},$$

якщо на кожному відрізку I_j, $j = 1,\ldots,N$, *цього розбиття виконується нерівність*

$$|f_1(t)| \geq |f_2(t)|, \quad t \in I_j,$$

або нерівність

$$|f_2(t)| \geq |f_1(t)|, \quad t \in I_j.$$

Наведемо приклади розбиттів, підпорядкованих системам функцій.

Приклад 1. Розбиття $[0,T]{=}[0,1] \cup [1,T]$ (де $T{>}1$) — підпорядковане системі функцій $f_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $f_2(t) = te^{\lambda_1 t}$. Дійсно, для всіх $t \in [0,1]$ виконується нерівність $e^{\lambda_1 t} \geq te^{\lambda_1 t}$, а для всіх $t \in [1,T]$ виконується нерівність $te^{\lambda_1 t} \geq e^{\lambda_1 t}$.

Приклад 2. Розбиття $[0,\pi]{=}[0,\pi/4]{\cup}[\pi/4,3\pi/4]$ ${\cup}[3\pi/4,\pi]$ — підпорядковане системі функцій $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$. Справді, для всіх $t \in [0,\pi/4]\cup$ $\cup[3\pi/4,\pi]$ виконується нерівність $|\cos t| \geq |\sin t|$, а для всіх $t \in [\pi/4,3\pi/4]$ виконується нерівність $|\sin t| \geq |\cos t|$.

Встановимо властивості розбиття, яке підпорядковане системі функцій, що утворюють фундаментальну систему розв'язків звичайного диференціального рівняння. Через $W(g_1,g_2)(t)$ будемо позначати вронскіан функцій $g_1(t), g_2(t)$, тобто

$$W(g_1,g_2)(t) = g_1(t)g_2'(t) - g_2(t)g_1'(t).$$

Теорема 1. *Нехай* $f_1(t), f_2(t)$, $t \in [a,b]$, — *фундаментальна система розв'язків рівняння*

$$f''(t) + a_1(t)f'(t) + a_2(t)f(t) = 0, \tag{12}$$

де $a_j \in C[a,b]$, $j = 1,2$. *Якщо розбиття* $[a,b] = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ *є підпорядкованим системі* f_1, f_2, *то на кожному з проміжків* I_j, $j = 1,\ldots,N$, *вираз*

$$L_2\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^2}{dt^2} + a_1(t)\frac{d}{dt} + a_2(t)$$

допускає факторизацію за Маммана, тобто для довільної функції $f \in C^2[a,b]$

$$L_2\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) = \frac{W(f_1,f_2)(t)}{f_{q(I_j)}(t)} \times$$

$$\times \frac{d}{dt}\left(\frac{f^2_{q(I_j)}(t)}{W(f_1,f_2)(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{f_{q(I_j)}(t)}\right)\right), \tag{13}$$

де $q(I_j) \in \{1,2\}$ — *такий індекс, що для всіх* $t \in I_j$ *виконуються нерівності*

$$|f_{q(I_j)}(t)| \geq |f_1(t)|, \quad |f_{q(I_j)}(t)| \geq |f_2(t)|.$$

У кожній точці відрізка розбиття I_j, $j = 1,\ldots,N$, *виконується нерівність*

$$|f_{q(I_j)}(t)| \geq \frac{|W(f_1,f_2)(a)| \exp\left(-\int_a^t a_1(\tau)d\tau\right)}{2F(t)}, \tag{14}$$

де $F(t) = \max\{|f_1'(t)|, |f_2'(t)|\}$.

□ *Доведення.* Зауважимо, що на відрізку I_j функція $f_{q(I_j)}$ не перетворюється в нуль. Справді, якщо $t_0 \in I_j$ і $f_{q(I_j)}(t_0) = 0$, то з того, що розбиття $[a,b] = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ є підпорядкованим системі функцій f_1, f_2, випливає, що $f_1(t_0) = 0$, $f_2(t_0) = 0$, а отже, вронскіан $W(f_1,f_2)(t)$ дорівнює нулю в точці t_0. Це суперечить тому, що $f_1(t), f_2(t)$ — фундаментальна система розв'язків рівняння (12). Отже, знаменники у формулі (13) не перетворюються в нуль.

Істинність рівності (13) випливає з таких співвідношень:

$$\frac{f^2_{q(I_j)}(t)}{W(f_1,f_2)(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{f_{q(I_j)}(t)}\right) = \frac{W(f_{q(I_j)},f)(t)}{W(f_1,f_2)(t)},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{W(f_{q(I_j)},f)(t)}{W(f_1,f_2)(t)}\right) =$$

$$= \frac{W(W(f_{q(I_j)},f),W(f_1,f_2))(t)}{W^2(f_1,f_2)(t)} =$$

$$= \frac{-W'(f,f_{q(I_j)})(t) - a_1(t)W(f,f_{q(I_j)})(t)}{W(f_1,f_2)(t)},$$

$$\frac{W(f_1,f_2)(t)}{f_{q(I_j)}(t)} \times$$

$$\times \frac{-W'(f,f_{q(I_j)})(t) - a_1(t)W(f,f_{q(I_j)})(t)}{W(f_1,f_2)(t)} =$$

$$= \frac{-W'(f,f_{q(I_j)})(t) - a_1(t)W(f,f_{q(I_j)})(t)}{f_{q(I_j)}(t)} =$$

$$= \frac{-f(t)(f''_{q(I_j)}(t) + a_1(t)f'_{q(I_j)}(t))}{f_{q(I_j)}(t)} +$$

$$+ \frac{f_{q(I_j)}(t)(f''(t) + a_1(t)f(t))}{f_{q(I_j)}(t)} =$$

$$= \frac{a_2(t)f(t)f_{q(I_j)}(t) + f_{q(I_j)}(t)(f''(t) + a_1(t)f(t))}{f_{q(I_j)}(t)} =$$

$$= f''(t) + a_1(t)f'(t) + a_2(t)f(t).$$

Під час виведення вказаних співвідношень використано відому властивість вронскіана фундаментальної системи розв'язків рівняння (12)

$$W'(f_1,f_2)(t) = -a_1(t)W(f_1,f_2)(t)$$

і те, що $f''_{q(I_j)}(t)+a_1(t)f'_{q(I_j)}(t) = -a_2(t)f_{q(I_j)}(t)$, $t \in I_j$.

Враховуючи формулу Ліувілля для вронскіана

$$W(f_1, f_2)(t) = W(f_1, f_2)(a) \exp\left(-\int_a^t a_1(\tau)d\tau\right) \quad (15)$$

і очевидну нерівність

$$|W(f_1, f_2)(t)| \leq 2F(t) \max\{|f_1(t)|, |f_2(t)|\},$$

отримуємо, що

$$2F(t)|f_{q(j)}(t)| \geq |W(f_1, f_2)(a)| \exp\left(-\int_a^t a_1(\tau)d\tau\right).$$

Теорему доведено. ■

Для доведення наступної теореми використаємо таке допоміжне твердження, яке випливає з теореми Валле–Пуссена [13, 23].

Лема 1. *Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ є ненульовим розв'язком рівняння* (12)*, коефіцієнти $a_j(t)$, $j = 1, 2$, якого є неперервними функціями на $[a, b]$. Тоді кількість нулів функції f на відрізку $[a, b]$ не перевищує C_5H, де $C_5 = 1 + 2(b - a)$, а стала H — така ж, як і в теоремі B.*

Теорема 2. *Нехай $f_1(t), f_2(t)$ — фундаментальна система розв'язків рівняння* (12) *і нехай*

$$\Sigma_{f_1,f_2}[a, b] = \{t \in [a, b] : f_1(t) = f_2(t) \vee f_1(t) = -f_2(t)\},$$

а $\mathcal{R}_{f_1,f_2}[a, b]$ — розбиття відрізка $[a, b]$, утворене точками a, b і точками множини[2] *$\Sigma_{f_1,f_2}[a, b]$. Тоді $\mathcal{R}_{f_1,f_2}[a, b]$ є підпорядкованим фундаментальній системі f_1, f_2. Кількість точок множини $\Sigma_{f_1,f_2}[a, b]$ не перевищує $(2+4(b-a))H$, де стала H — така ж, як і в теоремі B.*

□ *Доведення.* Нехай $g_1(t) = f_1(t) - f_2(t)$, $g_2(t) = f_1(t)+f_2(t)$, $M_1[a, b], M_2[a, b]$ — множини нулів функцій g_1, g_2 відповідно, які потрапляють на відрізок $[a, b]$. Оскільки функції g_1, g_2 є нетривіальними розв'язками рівняння (12), то за лемою 2 кількість точок кожної з множин $M_1[a, b], M_2[a, b]$ не перевищує C_5H, тому, з огляду на рівність

$$\Sigma_{f_1,f_2}[a, b] = M_1[a, b] \cup M_2[a, b],$$

кількість точок множини $\Sigma_{f_1,f_2}[a, b]$ не перевищує $2C_5H = (2 + 4(b - a))H$.

Припустимо, що розбиття $\mathcal{R}_{f_1,f_2}[a, b]$ не є підпорядкованим фундаментальній системі $f_1(t), f_2(t)$. Це означає, що існує такий відрізок $I = [\alpha, \beta]$ цього розбиття (кінцями відрізка I є дві послідовні точки множини $\{a\} \cup \Sigma_{f_1,f_2}[a, b] \cup \{b\}$), на якому знайдуться такі дві внутрішні точки $\xi, \eta \in (\alpha, \beta)$, що

$$|f_1(\xi)| > |f_2(\xi)|, \quad |f_1(\eta)| < |f_2(\eta)|.$$

Із неперервності функцій f_1, f_2 та теореми про проміжне значення випливає, що існує така внутрішня точка $t_0 \in (\alpha, \beta)$, що $|f_1(t_0)| = |f_2(t_0)|$, тобто або $f_1(t_0) = f_2(t_0)$, або $f_1(t_0) = -f_2(t_0)$. Це суперечить тому, що між точками α, β не міститься жодної з точок множини $\Sigma_{f_1,f_2}[a, b]$.

Теорему доведено. ■

IV. Доведення основного результату

Використовуватимемо таке твердження про оцінки розв'язків задачі Коші для звичайного диференціального рівняння (див. [6, с. 29]).

Лема 1. *Нехай функції f_1, f_2 на відрізку $[a, b]$ є розв'язками рівняння* (12)*, коефіцієнти $a_j(t)$, $j = 1, 2$, якого є неперервними функціями на $[a, b]$. Якщо справджуються умови*

$$f_1(a) = f_2'(a) = 1, \quad f_2(a) = f_1'(a) = 0, \quad (16)$$

то для довільних $t \in [a, b]$ виконуються оцінки

$$\left|f_q^{(j-1)}(t)\right| \leq C_6 \exp(\alpha(t - a)), \quad j = 1, 2, \quad (17)$$

де $C_6 > 0$, стала α — така ж, як і в теоремі B.

Перейдемо до доведення теореми B. Нехай $f_1(t), f_2(t)$ — така фундаментальна система розв'язків рівняння (12) на відрізку $[a, b]$, для якої виконуються умови (16). Нехай $\mathcal{R}_{f_1,f_2}[a, b]$ — розбиття відрізка $[a, b]$, побудоване у теоремі 3 для цієї системи: $[a, b] = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$, $N \leq (2+4(b-a))H$. Оскільки $\mathcal{R}_{f_1,f_2}[a, b]$ є підпорядкованим системі f_1, f_2, то за теоремою 2 на кожному з проміжків I_j, $j = 1, \ldots, N$, цього розбиття диференціальний вираз

$$L_2\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^2}{dt^2} + a_1(t)\frac{d}{dt} + a_2(t)$$

допускає факторизацію за Маммана (13). На підставі оцінок (17) леми 3 з оцінки (14) та формули (15) дістаємо, що на кожному з проміжків I_j, $j = 1, \ldots, N$, для коефіцієнтів факторизації (13) виконуються такі нерівності:

$$\left|\frac{W(f_1, f_2)(t)}{f_{q(I_j)}(t)}\right| \leq C_7 e^{(\alpha+2\alpha_1)(b-a)}, \quad t \in I_j, \quad (18)$$

$$\left|\frac{f^2_{q(I_j)}(t)}{W(f_1, f_2)(t)}\right| \leq C_8 e^{(2\alpha+\alpha_1)(b-a)}, \quad t \in I_j, \quad (19)$$

$$\left|\frac{1}{f_{q(I_j)}(t)}\right| \leq C_9 e^{(\alpha+\alpha_1)(b-a)}, \quad t \in I_j, \quad (20)$$

де C_7, C_8, C_9 — додатні сталі, які залежать тільки від a, b. Застосуємо теорему 1 для оцінок зверху мір множин $E(f, \varepsilon, I_j)$, $j = 1, \ldots, N$. Враховуючи нерівності (18)–(20), дістаємо, що для довільного $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{mes} E(f, \varepsilon, I_j) \leq C_{10} e^{2(\alpha+\alpha_1)(b-a)} (\varepsilon/\delta)^{1/2}, \quad (21)$$

[2] множина $\Sigma_{f_1,f_2}[a, b]$ може бути й порожньою, наприклад, $\Sigma_{\cos t, \sin t}[0, \pi/6] = \emptyset$; графіки функцій $|f_1|$ і $|f_2|$ не перетинаються на відрізку $[a, b]$.

де $j = 1, \ldots, N$, $C_{10} > 0$. Оскільки $N \leq (2+4(b-a))H$, то з оцінок (21) отримуємо

$$\operatorname{mes} E(f, \varepsilon, (a,b)) \leq N \max_{1 \leq j \leq N} \operatorname{mes} E(f, \varepsilon, I_j) \leq$$

$$\leq C_{11} H e^{2(\alpha+\alpha_1)(b-a)} \left(\varepsilon/\delta\right)^{1/2},$$

де C_{11} — додатна стала, яка залежить тільки від a, b.

Теорему B доведено.

V. Метричні оцінки знизу малих знаменників

Наведемо деякі застосування отриманих результатів. Позначимо: $x = (x_1, \ldots, x_p)$, Ω^p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $Q_T^p = \{(t,x) : t \in (0,T), x \in \Omega^p\}$, $D_x = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_p)$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$.

Під час дослідження розв'язності в області Q_T^p задачі з двоточковими крайовими умовами для навантаженого рівняння із частинними похідними

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_1(t, D_x) u = f(t,x) + A_0(t, D_x) u(\xi, x),$$

$$u(0,x) = 0, \quad u(T,x) = 0, \qquad x \in \Omega^p,$$

де $\xi \in (0,T)$,

$$A_j(t, D_x) = \sum_{|s| \leq M} A_j^s(t) (-i\partial/\partial x_1)^{s_1} \ldots (-i\partial/\partial x_p)^{s_p},$$

$M \in \mathbb{N}$, $A_j^s(t) \in C[0,T]$, $j = 0, 1$, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, виникає потреба оцінити знизу модулі виразів

$$\Gamma_k(\xi) \equiv \int_0^T G_k(\xi, \tau) A_0(\tau, k) d\tau - 1, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Тут $G_k(t, \tau)$ — функція Ґріна диференціального оператора, породженого диференціальним виразом

$$l_k\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) \equiv y''(t) + A_1(t,k) y(t), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \qquad (22)$$

та крайовими умовами

$$y(0) = 0, \quad y(T) = 0. \qquad (23)$$

Зазначимо, що критерієм існування функції Ґріна $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є відмінність від нуля величини $f_2(T,k)$, де $f_2(t,k)$ — такий двічі неперервно диференційовний на $[0,T]$ розв'язок звичайного диференціального рівняння $l_k\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) = 0$, що

$$f_2(0,k) = 0, \quad f_2'(0,k) = 1.$$

Теорема 1. *Нехай $f_2(T,k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$, і нехай*

$$\min_{t \in [0,T]} |A_1(t,k) - A_0(t,k)| \geq C_{12} (1 + |k|)^{\gamma}, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\xi \in [0,T]$ нерівність

$$|\Gamma_k(\xi)| \geq (1+|k|)^{-\omega} \exp(-\delta |k|^M)$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при

$$\omega > 2p + M - \gamma, \quad \delta \geq 4AT,$$

де $A = \sup_{k \in \mathbb{Z}^p} \max_{t \in [0,T]} |A_1(t,k)|/(1+|k|)^M$.

$\square$ *Доведення.* Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ запровадимо такі множини:

$$E_{\omega,\delta}(k) = \{\xi \in [0,T] : |\Gamma_k(\xi)| <$$

$$< (1+|k|)^{-\omega} \exp(-\delta |k|^M)\}, \quad \omega, \delta \in \mathbb{R}.$$

З огляду на лему Бореля-Кантеллі [9] для доведення теореми 4 досить перевірити, що при $\omega > 2p + M - \gamma$, $\delta \geq 4AT$ ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{mes} E_{\omega,\delta}(k) \qquad (24)$$

збігається. Функція $\Gamma_k(\xi)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — двічі неперервно диференційовна за $\xi \in [0,T]$. З властивостей функції Ґріна $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, задачі (22), (23), випливає, що

$$l_k\left(\frac{d}{d\xi}\right) \Gamma_k(\xi) = A_1(\xi,k) - A_0(\xi,k), \quad \xi \in [0,T].$$

Тоді з умови теореми 4 отримуємо, що для всіх $\xi \in [0,T]$ виконується нерівність

$$\left| l_k\left(\frac{d}{d\xi}\right) \Gamma_k(\xi) \right| \geq C_{12} (1+|k|)^{\gamma}, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Із теореми B для міри множини $E_{\omega,\delta}(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, при $\omega > 2p + M - \gamma$, $\delta \geq 4AT$ дістаємо оцінку

$$\operatorname{mes} E_{\omega,\delta}(k) \leq \frac{C_{13}}{(1+|k|)^{(\omega+\gamma-M)/2}} = \frac{C_{13}}{(1+|k|)^{p+\varepsilon}},$$

де $\varepsilon = (\omega + \gamma - M)/2 - p > 0$, C_{13} — додатна стала, що не залежить від k. З отриманої оцінки випливає збіжність ряду (24).

Теорему доведено. $\blacksquare$

Висновки

Встановлено оцінки згори для міри множини $\{t \in (a,b) : |f(t)| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, якщо двічі неперервно диференційовна функція f справджує умову $\left|L_2\left(\frac{d}{dt}\right) f(t)\right| > \delta$, $\delta > 0$, де $L_2\left(\frac{d}{dt}\right)$ — лінійний диференціальний вираз із неперервними коефіцієнтами. Отримані результати застосовано для доведення метричних теорем про оцінки знизу малих знаменників, які виникають під час дослідження задач з двоточковими умовами для навантажених рівнянь із частинними похідними.

Результати можна поширити на випадок функцій комплексного та p-адичного аргументів.

Робота підтримана ДФФД України (проект №41.1/004).

Література

[1] *Берник В. И., Мельничук Ю. В.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.

[2] *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.

[3] *Бобик О. І., Боднарчук П. І., Пташник Б. Й., Скоробогатько В. Я.* Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. – К.: Наук. думка, 1972. – 175 с.

[4] *Ільків В. С.* Аналоги леми Пяртлі із абсолютними константами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. Т. 42, № 4. – С. 68–74.

[5] *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Про константу в лемі Пяртлі // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки. – 2007, № 601. – С. 12–17.

[6] *Карташев А. П., Рождественский Б. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1980. – 288 с.

[7] *Левин А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = 0$ // Успехи матем. наук, 1969, **24**, Вып. 2. – С. 43–96.

[8] *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь із частинними похідними // Мат. студії. – 2007. – Т. 28, № 2. – С. 115–140.

[9] *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[10] *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241–254.

[11] *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Оцінки мір виняткових множин гладких функцій // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942-2007) (Кам'янець-Подільський, 28 травня–3 червня 2012 р.): Тези доповідей. – К.: Інститут математики НАН України, 2012. – С. 87–88.

[12] *Пяртли А. С.* Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства // Функцион. анализ и его приложения. – 1969. – **3**, вып. 4. – С. 59–62.

[13] *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: в 2-х т. – М.: Изд–во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.

[14] *Симотюк М. М.* Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999.– **42**, № 4.– С. 90–95.

[15] *Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 2. – С. 26–41.

[16] *Симотюк М. М.* Багатоточкові задачі для лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними: дис. ... канд. фіз.-мат. наук.: 01.01.02 "Диференціальні рівняння" / Симотюк Михайло Михайлович. – Львів, 2005. – 193 с.

[17] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

[18] *Beresnevich V. V.* A Groshev type theorem for convergence on manifolds // Acta Mathematica Hungarica. – 2002. – **94**, № 1–2. – P. 99–130.

[19] *Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kleinbock D. Y., Margulis G. A.* Metric Diophantine approximation: The Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds // Moscow Math. Journal. – 2002. – **2**, № 2. – P. 203–225.

[20] *Bernik V. I., Dodson M. M.* Metric Diophantine approximation on manifolds. Cambridge Tracts in Mathematics, 137. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[21] *Bernik V., Kleinbock D., Margulis G.* Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case and multiplicative versions // Intern. Math. Research Notes. – 2001. – № 9. – P. 453–486.

[22] *Kleinbock D., Margulis G.* Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. Math. – 1998. – **148**. – P. 339–360.

[23] *Vallée–Poussin de la Ch. J.* Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n. – Journ. de Math. pure et appl., 1929, **9**, № 8. – P. 125–144.

ОЦЕНКИ МЕР ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Пташник Б. И., Симотюк М. М.

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины
ул. Научная 3-б, 79060, Львов, Украина

Установлены оценки сверху для мер Лебега исключительных множеств гладких функций, результат действия на которые дифференциального выражения второго порядка отличен от нуля. Рассмотрены частные случаи, когда выражение допускает факторизацию по Маммана. Полученные результаты применены для доказательства метрических оценок снизу малых знаменателей, которые возникают при исследовании двухточечных задач для нагруженных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, малые знаменатели, мера Лебега, факторизация за Маммана, функция Грина, исключительные множества.

2000 MSC: 35K35, 35B15, 35B30

УДК: 517.95+511.2

ESTIMATES OF MEASURES OF EXCLUDING SETS OF SMOOTH FUNCTIONS

Ptashnyk B. Yo., Symotyuk M. M.

Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics of NAS of Ukraine
79060, 3-b Naukova Str., Lviv, Ukraine

The upper estimates for the Lebesgue measures of exceptional sets of smooth functions are established (the result of applying of second order differential expression for this functions is different from zero). The special case when the differential expression has a factorization by Mammana is considered. The results are applied to prove the metric lower estimates of small denominators that arise in the study of two-point problem for the loaded partial differential equations with variable coefficients.

Key words: differential equations, small denominators, Lebesgue measure, Mammana factorization, Green functions, exceptional sets.

2000 MSC: 35K35, 35B15, 35B30

UDK: 517.95+511.2