ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 898, 2018, с. 34–40

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 898, 2018, p. 34–40

СИСТЕМА ФУНКЦІЙ, БІОРТОГОНАЛЬНА З МНОГОЧЛЕНАМИ ЧЕБИШОВА ДРУГОГО РОДУ НА ЗАМКНЕНИХ КРИВИХ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ

В. В. Достойна, О. В. Веселовська, М. А. Сухорольський

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 15 грудня 2017 р.)

Побудовано систему функцій, які біортогональні з многочленами Чебишова другого роду на замкнених кривих у комплексній площині. Досліджено властивості цих функцій та умови розвинення аналітичних функцій у ряди за многочленами Чебишова другого роду в комплексних областях. Наведено приклади таких розвинень. Крім того, отримано комбінаторні тотожності, які мають самостійний інтерес.

Ключові слова: многочлени Чебишова, аналітична функція, біортогональні системи функцій, асоційована функція.

2000 MSC: 33E20

УДК: 517.538.3

Вступ

Многочлени Чебишова – основа теоретичних та практичних досліджень теорії наближення функцій, ефективно використовуються в задачах обчислювальної математики, для розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь, для числового диференціювання та інтегрування.

Властивості многочленів Чебишова достатньо ґрунтовно викладено в роботах [1, 2]. Значно менше досліджень стосуються властивостей цих систем у комплексних областях. У роботі [2] наведено деякі властивості многочленів Чебишова у комплексній площині, а також розвинення аналітичних функцій за многочленами Чебишова першого роду у комплексних областях.

Узагальненням методу розвинення функцій у степеневі ряди в комплексних областях є їхнє розвинення за системою многочленів, біортогональних з деякою іншою системою (асоційованих) функцій. За певних умов для будь-якої незалежної та повної системи функцій можна побудувати відповідну систему асоційованих функцій і конструювати ряди за нею.

У цій роботі побудовано систему функцій, біортогональних з многочленами Чебишова другого роду на замкнених кривих у комплексній площині, встановлено умови, за яких аналітичні функції можна розкласти у ряди за цими многочленами. Наведено приклади таких розкладів. Крім того, отримано комбінаторні тотожності, які становлять самостійний інтерес.

Позначимо через $U_n(z)$ многочлени Чебишова другого роду комплексної змінної. Для них справедливі явні формули [3, с. 186]:

$$U_n(z)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k 2^{n-2k}C_{n-k}^k z^{n-2k},\ n=0,1,\ldots. \quad (1)$$

Зі співвідношень (1) отримаємо вирази многочленів $U_n(z)$ для парних та непарних значень n:

$$U_{2n}(z)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{2(n-k)}C_{2n-k}^k z^{2(n-k)}=$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}2^{2i}C_{n+i}^{2i}z^{2i}, \quad (2)$$

$$U_{2n+1}(z)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}2^{2i+1}C_{n+i+1}^{2i+1}z^{2i+1}. \quad (3)$$

I. Властивості многочленів $U_n(z)$

Теорема 1. *Для многочленів $U_n(z)$ справедливе інтегральне зображення*

$$U_n(z)=\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1}\left(z+t\sqrt{z^2-1}\right)^n dt. \quad (4)$$

□ *Доведення.* Використавши формулу бінома Ньютона та змінивши порядок підсумовування, із (4) знаходимо

$$U_n(z)=\frac{n+1}{2}\sum_{m=0}^{n}C_n^m z^{n-m}\left(z^2-1\right)^{\frac{m}{2}}\int_{-1}^{1}t^m dt=$$
$$=(n+1)\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{C_n^{2i}}{2i+1}z^{n-2i}\left(z^2-1\right)^i=$$
$$=(n+1)\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{C_n^{2i}}{2i+1}z^{n-2i}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k z^{2i-2k}=$$
$$=(n+1)\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k z^{n-2k}\sum_{i=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{C_n^{2i}C_i^k}{2i+1}.$$

Врахувавши комбінаторну тотожність

$$\sum_{i=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{C_n^{2i} C_i^k}{2i+1} = \frac{2^{n-2k} C_{n-k}^k}{n+1}, \tag{5}$$

приходимо до співвідношення (1). ■

Позначимо через Γ_R еліпс, заданий рівнянням

$$z = \frac{1}{2}\left(R\, e^{i\varphi} + R^{-1}\, e^{-i\varphi}\right),\ R > 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{6}$$

Нехай D_R – область, границею якої є еліпс Γ_R.

Теорема 2. *Для многочленів $U_n(z)$ справедливі оцінки*

$$|U_n(x)| \le (n+1),\ x \in \mathbb{R}, |x| \le 1,$$
$$|U_n(z)| \le (n+1)R^n, z \in \overline{D_R}. \tag{7}$$

□ *Доведення.* Враховуючи нерівність $x^2 - x^2t^2 + t^2 \le 1$, яка справедлива для всіх x і t, таких, що $|x| \le 1$, $|t| \le 1$, зі співвідношення (4) одержимо

$$|U_n(x)| \le \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{1} \left| x + it\sqrt{1-x^2} \right|^n dt =$$

$$= \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{1} \left(x^2 + t^2\left(1 - x^2\right)\right)^{\frac{n}{2}} dt \le \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{1} dt \le n+1.$$

Многочлен $\dfrac{1}{n+1} U_n(z)$ задовольняє умови теореми [4, с. 166]: *якщо для многочлена $W_n(z)$ n-го степеня на дійсному відрізку $[-1;1]$ виконується нерівність $|W_n(z)| \le M$, де $M = const$, то для будь-якого z ззовні цього відрізка справедлива оцінка*

$$|W_n(z)| \le M(a+b)^n,$$

де a і b – півосі еліпса з фокусами в точках $z = \pm 1$, який проходить через точку z. Звідси, оскільки півосі еліпса Γ_r, $1 < r \le R$, з рівнянням (6) відповідно дорівнюють $\dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)$, $\dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)$, випливає оцінка (7). ■

Теорема 3. *Справедливе інтегральне зображення*

$$U_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(z + t\sqrt{z^2-1}\right)^n \varphi_n(t) dt, \tag{8}$$

де C – додатно орієнтоване коло $|t| \le R_1$, $1 < R_1 < \infty$, $\varphi_n(t) = \dfrac{n+1}{2} \ln \dfrac{t+1}{t-1}$.

□ *Доведення.* Розклавши вираз $\left(z + t\sqrt{z^2-1}\right)^n$ за формулою бінома Ньютона та врахувавши розвинення $\varphi_n(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{2j+1} \dfrac{1}{t^{2j+1}}$, згідно з (8), отримаємо

$$U_n(z) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} \left(z^2-1\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dt}{t^{2j-k+1}}.$$

На підставі відомого результату [5, с. 81–82]

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \ne 1, \end{cases} \tag{9}$$

де L – довільний замкнений контур, що охоплює точку a і однократно проходиться в додатному напрямі, знаходимо

$$U_n(z) = (n+1) \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{C_n^{2j}}{2j+1} z^{n-2j} \left(z^2-1\right)^j.$$

Розклавши вираз $\left(z^2-1\right)^j$ за формулою бінома Ньютона та змінивши порядок підсумовування, одержимо

$$U_n(z) = (n+1) \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{C_n^{2j}}{2j+1} z^{n-2j} \sum_{k=0}^{j} (-1)^k C_j^k z^{2j-2k} =$$

$$= (n+1) \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k z^{n-2k} \sum_{j=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{C_n^{2j} C_j^k}{2j+1}.$$

Звідси, врахувавши комбінаторну тотожність (5), приходимо до формул (1).

Відомо [2, с. 28], що степені z^n однозначно виражаються через многочлени Чебишова $U_n(z)$, тобто справедливі співвідношення:

$$z^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n-2k+1)C_n^k}{n-k+1} U_{n-2k}(z),\ n \ge 0. \tag{10}$$

Із співвідношень (10) отримаємо вирази z^n для парних та непарних значень n:

$$z^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-2k+1)C_{2n}^k}{2n-k+1} U_{2(n-k)}(z) =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=0}^{n} \frac{(2i+1)C_{2n}^{n-i}}{n+i+1} U_{2i}(z), \tag{11}$$

$$z^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{i=0}^{n} \frac{(2i+2)C_{2n+1}^{n-i}}{n+i+2} U_{2i+1}(z). \tag{12}$$

■

Нехай

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \ne n, \\ 1, & m = n \end{cases}$$

– символ Кронекера.

Твердження 1. Справедливі комбінаторні тотожності

$$(2j+1) \sum_{i=j}^{n} (-1)^{n-i} \frac{C_{n+i}^{2i} C_{2i}^{i-j}}{i+j+1} = \delta_{nj}, \tag{13}$$

$$(2j+2) \sum_{i=j}^{n} (-1)^{n-i} \frac{C_{n+i=1}^{2i+1} C_{2i+1}^{i-j}}{i+j+2} = \delta_{nj}. \tag{14}$$

□ *Доведення.* Підставивши вирази (11) для степенів z^{2n} в (2) та змінивши порядок підсумовування, знаходимо:

$$U_{2n}(z)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}2^{2i}C_{n+i}^{2i}\frac{1}{2^{2i}}\sum_{j=0}^{i}\frac{(2j+1)C_{2i}^{i-j}}{j+i+1}U_{2j}(z)=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}(2j+1)U_{2j}(z)\sum_{i=j}^{n}(-1)^{n-i}\frac{C_{n+i}^{2i}C_{2i}^{i-j}}{i+j+1}.$$

Звідси, враховуючи незалежність многочленів $U_n(z)$, отримуємо тотожність (13).

Аналогічно, підставивши вирази (12) для степенів z^{2n+1} в (3), приходимо до тотожності (14). ■

Позначимо через E_R простір однозначних аналітичних у крузі $|z|<R, 0<R\le\infty$, функцій комплексної змінної.

Теорема 4. *Система многочленів $\{U_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ лінійно незалежна і повна у просторі E_R.*

□ *Доведення.* Оскільки коефіцієнт

$$2^n(-1)^0C_n^0=2^n\neq 0$$

при найстаршому степені многочлена $U_n(z)$ відмінний від нуля, то система $\{U_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ лінійно незалежна [6, с. 137]. Крім того, вона повна [6, с. 137], бо кожний степінь z^n однозначно виражається у вигляді лінійної комбінації многочленів $U_n(z)$. ■

II. Функції, асоційовані з многочленами $U_n(z)$

Розглянемо однозначну аналітичну в крузі $|z|<R$, $1<R\le\infty$, функцію $f(z)$ комплексної змінної. Тоді її можна зобразити рядом Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n. \tag{15}$$

Знайдемо її формальне розвинення за системою многочленів $\{U_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$. Для цього підставимо вирази (11) та (12) у рівність (15). Тоді

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}\frac{1}{2^{2n}}\sum_{i=0}^{n}\frac{(2i+1)C_{2n}^{n-i}}{n+i+1}U_{2i}(z)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}\frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{i=0}^{n}\frac{(2i+2)C_{2n+1}^{n-i}}{n+i+2}U_{2i+1}(z).$$

Змінивши порядок підсумовування, отримаємо

$$f(z)=\sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)U_{2i}(z)\sum_{n=i}^{\infty}\frac{C_{2n}^{n-i}}{2^{2n}(n+i+1)}\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}+$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}(2i+2)U_{2i+1}(z)\sum_{n=i}^{\infty}\frac{C_{2n+1}^{n-i}}{2^{2n}(n+i+2)}\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)U_{2i}(z)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C_{2(j+i)}^{j}}{2^{2j+2i}(j+2i+1)}\frac{f^{(2j+2i)}(0)}{(2j+2i)!}+$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}(2i+2)U_{2i+1}(z)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C_{2(j+i)+1}^{j}}{2^{2j+2i+1}(j+2i+2)}\frac{f^{(2j+2i+1)}(0)}{(2j+2i+1)!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)U_n(z)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C_{2j+n}^{j}}{2^{2j+n}(j+n+1)}\frac{f^{(2j+n)}(0)}{(2j+n)!}. \tag{16}$$

Позначимо

$$L_n(f)=(n+1)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C_{2j+n}^{j}}{2^{2j+n}(j+n+1)}\frac{f^{(2j+n)}(0)}{(2j+n)!}. \tag{17}$$

Урахувавши співвідношення (16), одержимо розвинення функції $f(z)$ за системою многочленів $\{U_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(f)U_n(z).$$

Введемо функції, асоційовані з многочленами $U_n(z)$ [6, с. 120]

$$\omega_m(z)=(m+1)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C_{2j+m}^{j}}{2^{2j+m}(j+m+1)}\frac{1}{z^{2j+m+1}}. \tag{18}$$

На підставі співвідношення (18) запишемо вирази асоційованих функцій $\omega_m(z)$ для парних та непарних значень індексів m:

$$\omega_{2m}(z)=(2m+1)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C_{2j+2m}^{j}}{2^{2j+2m}(j+2m+1)}\frac{1}{z^{2j+2m+1}}=$$

$$=(2m+1)\sum_{l=m}^{\infty}\frac{C_{2l}^{l-m}}{2^{2l}(l+m+1)}\frac{1}{z^{2l+1}}, \tag{19}$$

$$\omega_{2m+1}(z)=(2m+2)\sum_{l=m}^{\infty}\frac{C_{2l+1}^{l-m}}{2^{2l+1}(l+m+2)}\frac{1}{z^{2l+2}}. \tag{20}$$

Твердження 2. Функції $\omega_m(z)$ аналітичні в області $|z|>1$. Коефіцієнти $L_m(f)$ зображають у вигляді контурних інтегралів

$$L_m(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\omega_m(z)dz,$$

де C – додатно орієнтоване коло $|z|=q$, $1<q<R$.

□ *Доведення.* Використовуючи асимптотичну формулу $n!\sim\dfrac{n^n}{e^n}$, $n\to\infty$, знайдемо оцінку для коефіцієнтів ряду (18)

$$\frac{C_{2j+m}^{j}}{2^{2j+m}(j+m+1)}=\frac{(2j+m)!}{2^{2j+m}(j+m+1)j!(j+m)!}\sim$$

$$\sim\frac{(2j+m)^{2j+m}}{2^{2j+m}(j+m+1)j^j(j+m)^{j+m}}=$$

$$=\frac{(2j)^{2j+m}\left(1+\dfrac{m}{2j}\right)^{2j+m}}{2^{2j+m}(j+m+1)j^{2j+m}\left(1+\dfrac{m}{j}\right)^{j+m}}=$$

$$= \frac{\left(1+\frac{m}{2j}\right)^{2j+m}}{(j+m+1)\left(1+\frac{m}{j}\right)^{j+m}} \sim \frac{1}{j+m+1}. \quad (21)$$

Звідси одержуємо

$$\lim_{j\to\infty}\sqrt[j]{\frac{(m+1)C_{2j+m}^{j}}{2^{2j+m}(j+m+1)}} = \lim_{j\to\infty}\sqrt[j]{\frac{m+1}{j+m+1}} = 1$$

і твердження 2 доведено. ■

Означення 1. Система асоційованих функцій $\{\omega_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ називається біортогональною із системою многочленів $V_n(z)$, якщо справджуються умови

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} V_n(z)\omega_k(z)dz = \delta_{nk},$$

де L – додатно орієнтований замкнений контур, що охоплює особливі точки функції $\omega_k(z)$.

Теорема 5. *Система асоційованих функцій $\{\omega_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ біортогональна з многочленами $U_n(z)$ вздовж замкненого контура γ, що охоплює круг $|z| \le 1$, тобто виконуються рівності*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} U_n(z)\omega_m(z)dz = \delta_{nm}, \quad (22)$$

де $\omega_m(z)$ визначені співвідношенням (18).

□ *Доведення.* Розглянемо спочатку випадок парних значень індексів m та n. Підставимо вирази (2) і (19) у ліву частину рівності (22). Матимемо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} U_{2n}(z)\omega_{2m}(z)dz = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}2^{2i}C_{n+i}^{2i}(2m+1)\times$$
$$\times\sum_{l=m}^{\infty}\frac{C_{2l}^{l-m}}{2^{2l}(l+m+1)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^{2(l-i)+1}}.$$

Звідси, згідно з (9), одержимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} U_{2n}(z)\omega_{2m}(z)dz = (2m+1)\sum_{i=m}^{n}(-1)^{n-i}\frac{C_{n+i}^{2i}C_{2i}^{i-m}}{i+m+1}.$$

Аналогічно знаходимо для непарних значень індексів m та n:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} U_{2n+1}(z)\omega_{2m+1}(z)dz =$$
$$= (2m+2)\sum_{i=m}^{n}(-1)^{n-i}\frac{C_{n+i+1}^{2i+1}C_{2i+1}^{i-m}}{i+m+2}.$$

Використавши комбінаторні тотожності (13) та (14), одержимо рівності (22). ■

Теорема 6. *Асоційовані функції $\omega_n(z)$ мають інтегральне зображення*

$$\omega_n(z) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{z-x}U_n(x)dx. \quad (23)$$

□ *Доведення.* Запишемо для многочлена $U_n(x)$ інтегральну формулу Коші

$$U_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{U_n(z)}{z-x}dz, \quad (24)$$

де γ – контур, який є границею області, що містить відрізок $[-1;1]$. Співвідношення ортогональності [2, с. 52] для многочленів $U_n(x)$ має вигляд:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \delta_{nm}. \quad (25)$$

Підставивши співвідношення (24) в (25), одержимо

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{U_n(z)}{z-x}dz\right)U_m(z)\sqrt{1-x^2}dx = \delta_{nm}.$$

Змінюючи у лівій частині останньої рівності порядок інтегрування, знаходимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}U_n(z)\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{U_m\sqrt{1-x^2}}{z-x}dx\right)dz = \delta_{nm}.$$

Звідси на підставі співвідношень (22) приходимо до зображення (23). ■

Теорема 7. *Справедливе розвинення*

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty}U_n(z)\omega_n(t), \quad (26)$$

яке рівномірно збігається для $t \in \bar{D}_{\rho}^{\infty}$, $z \in \bar{D}_{r}^{0}$, де ρ, r – будь-які числа, що задовольняють умови $0 < r < \infty$, $\rho > \max\{1, r\}$, $\bar{D}_{\rho}^{\infty}$ – замкнена область, що містить нескінченно віддалену точку, границею якої є еліпс Γ_ρ, $\bar{D}_{r}^{0}$ – замкнена область, що містить нульову точку, границею якої є еліпс Γ_r.

□ *Доведення.* Підставивши у праву частину рівності (26) вирази (19) та (20) для асоційованих функцій $\omega_n(t)$, отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty}U_n(z)\omega_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)U_{2n}(z)\sum_{l=n}^{\infty}\frac{C_{2l}^{l-n}}{2^{2l}(l+n+1)}\frac{1}{t^{2l+1}} +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)U_{2n+1}(z)\sum_{l=n}^{\infty}\frac{C_{2l+1}^{l-n}}{2^{2l+1}(l+n+2)}\frac{1}{t^{2l+2}}.$$

Змінивши в двох останніх сумах порядок підсумовування та врахувавши співвідношення (11) та (12), матимемо

$$\sum_{n=0}^{\infty}U_n(z)\omega_n(t) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{t^{2l+1}}\frac{1}{2^{2l}}\sum_{n=0}^{l}\frac{(2n+1)C_{2l}^{l-n}}{n+l+1}U_{2n}(z)+$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{t^{2l+2}}\frac{1}{2^{2l+1}}\sum_{n=0}^{l}\frac{(2n+2)C_{2l+1}^{l-n}}{n+l+2}U_{2n+1}(z)=$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^{2l}}{t^{2l+1}}+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^{2l+1}}{t^{2l+2}}=\frac{1}{t}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^m=\frac{1}{t}\frac{1}{1-\frac{z}{t}}=\frac{1}{t-z}.$$

Покажемо, що ряд у (26) рівномірно збіжний для $t\in\bar{D}_{\rho}^{\infty}$, $z\in\bar{D}_{r}^{0}$, де ρ, r – будь-які числа, що задовольняють умови $0<r<\infty$, $\rho>\max\{1,r\}$.

Врахувавши оцінку (7) для многочленів $U_n(z)$ та вираз (18) для асоційованих функцій $\omega_n(t)$, отримаємо

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}U_n(z)\omega_n(t)\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}|U_n(z)|\,|\omega_n(t)|\le$$
$$\le\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2r^n\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C_{2j+n}^{j}}{2^{2j+n}(j+n+1)}\frac{1}{|t|^{2j+n+1}}. \quad (27)$$

На підставі асимптотичних рівностей (21) ряд у правій частині співвідношення (27) еквівалентний ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2r^n\sum_{j=j_0}^{\infty}\frac{1}{(j+n+1)|t|^{2j+n+1}}.$$

Останній ряд оцінюється таким рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{r}{|t|}\right)^n\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{|t|^{2j+1}}=$$
$$=\frac{|t|}{|t|^2-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{r}{|t|}\right)^n<\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{r}{|t|}\right)^n,$$

який збігається, якщо $\rho>r$. Звідси випливає, що ряд у співвідношенні (26) рівномірно збігається у зазначених областях. ■

III. Розвинення аналітичних функцій за системою многочленів $\{U_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$

Теорема 8. *Нехай $f(z)$ – функція комплексної змінної, однозначна та аналітична у відкритій області D_R, границею якої є еліпс Γ_R, $1<R\le\infty$, з рівнянням* (6). *Тоді ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_n(f)U_n(z) \quad (28)$$

рівномірно збігається в замкненій області $\overline{D}_{\rho}$, обмеженій еліпсом Γ_{ρ}, де $1\le\rho<R$.

□ *Доведення.* Оскільки степеневий ряд (15) рівномірно збігається в крузі $\{z\colon |z|\le r\}$, $r<R$, то

$$\frac{\left|f^{(2j+m)}(0)\right|}{(2j+m)!}\le\frac{K}{r^{2j+m}},\ K=const. \quad (29)$$

Врахувавши співвідношення (17) та нерівності (7), (29), отримаємо

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}L_n(f)U_n(z)\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}|L_n(f)|\,|U_n(z)|\le$$
$$\le K\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\left(\frac{R}{r}\right)^n\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C_{2j+n}^{j}}{2^{2j+n}(j+n+1)}\frac{1}{r^{2j}}.$$

Одержаний ряд на підставі асимптотичних рівностей (21) еквівалентний ряду

$$K\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\left(\frac{R}{r}\right)^n\sum_{j=j_0}^{\infty}\frac{1}{j+n+1}\frac{1}{r^{2j}}.$$

Мажорантним рядом для останнього є збіжний за $R<r$ ряд

$$K\frac{r^2}{r^2-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^n.$$

Звідси випливає рівномірна збіжність ряду (28) у зазначеній області. ■

Приклад 1. Розкласти функцію $f(z)=\dfrac{1}{a-z}$ у ряд за многочленами $U_n(z)$.

Оскільки $f^{(s)}(0)=\dfrac{s!}{a^{s+1}}$, то зі співвідношення (17) одержимо

$$L_n(f)=(n+1)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C_{2j+n}^{j}}{2^{2j+n}(j+n+1)}\frac{1}{a^{2j+n+1}}=\omega_n(a).$$

Підставивши вираз для $L_n(f)$ в (28), маємо

$$\frac{1}{a-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n(a)U_n(z)\ \ (|a|>|z|)\,.$$

Приклад 2. Розкласти функцію $f(z)=\dfrac{a}{a^2-z^2}$ у ряд за многочленами $U_n(z)$.

Оскільки для многочленів $U_n(z)$ виконується співвідношення [2, с. 13]

$$U_n(-z)=(-1)^nU_n(z) \quad (30)$$

і справедлива рівність

$$\frac{1}{a^2-z^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-z}+\frac{1}{a+z}\right),$$

то, використовуючи приклад 1, знаходимо

$$\frac{a}{a^2-z^2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n(a)U_n(z)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\omega_n(a)U_n(z)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)\omega_n(a)U_n(z).$$

В останній сумі залишаться доданки, якщо $n=2k$, тому

$$\frac{a}{a^2-z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\omega_{2k}(a)U_{2k}(z)\ (|a|>|z|)\,.$$

Приклад 3. Розкласти функцію $\dfrac{z}{a^2-z^2}$ у ряд за многочленами $U_n(z)$.

Використовуючи рівність

$$\frac{z}{a^2-z^2}=\frac{a+z-a}{a^2-z^2}=\frac{1}{a-z}-\frac{a}{a^2-z^2},$$

приклади 1 та 2, матимемо

$$\frac{z}{a^2-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n(a)U_n(z)-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)\,\omega_n(a)U_n(z)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1-(-1)^n)\,\omega_n(a)U_n(z).$$

В останній сумі залишаться доданки при $n=2k+1$, тому

$$\frac{a}{a^2-z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\omega_{2k+1}(a)U_{2k+1}(z)\,(|a|>|z|)\,.$$

Приклад 4. Розкласти функцію $f(z)=e^{az}$ у ряд за многочленами $U_n(z)$.

Оскільки $f^{(s)}(0)=a^s$, то зі співвідношення (17) знаходимо

$$L_n(f)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(n+1)C_{2j+n}^{j}}{2^{2j+n}(j+n+1)}\frac{a^{2j+n}}{(2j+n)!}=$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{j!(j+n+1)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2j+n}=$$
$$=\frac{2}{a}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{j!(j+n+1)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2j+n+1}=\frac{2(n+1)}{a}I_{n+1}(a),$$

де $I_\nu(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{1}{j!\Gamma(j+\nu+1)}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{2j+\nu}$ – модифіковані функції Бесселя першого роду [3, с. 13]. Тому

$$e^{az}=\frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)I_{n+1}(a)U_n(z). \tag{31}$$

Із (31) можна отримати розвинення за многочленами $U_n(z)$ тригонометричних функцій, а також гіперболічних функцій.

Приклад 5. Розкласти функцію $f(z)=\sin az$ у ряд за многочленами $U_n(z)$.

Оскільки $\sin az=\dfrac{1}{2i}\left(e^{iaz}-e^{-iaz}\right)$, то, враховуючи співвідношення (30), маємо

$$\sin az=-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(1-(-1)^n)\,(n+1)I_{n+1}(ia)U_n(z)=$$
$$=-\frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)I_{2k+2}(ia)U_{2k+1}(z).$$

Враховуючи, що

$$I_n(ia)=i^nJ_n(a), \tag{32}$$

де $J_\nu(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+\nu+1)}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{2j+\nu}$ – функції Бесселя першого роду [3, с. 12], знаходимо

$$\sin az=-\frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)i^{2k+2}J_{2k+2}(ia)U_{2k+1}(z)=$$
$$=\frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+2)J_{2k+2}(a)U_{2k+1}(z).$$

Приклад 6. Розкласти функцію $f(z)=\cos az$ у ряд за многочленами $U_n(z)$.

Маємо

$$\cos az=\frac{1}{2}\left(e^{iaz}+e^{-iaz}\right)=$$
$$=\frac{1}{ia}\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)\,(n+1)I_{n+1}(ia)U_n(z)=$$
$$=\frac{2}{ia}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)I_{2k+1}(ia)U_{2k}(z).$$

Враховуючи співвідношення (32), одержимо

$$\cos az=\frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)J_{2k+1}(a)U_{2k}(z).$$

Приклад 7. Розкласти функцію $f(z)=\operatorname{sh}az$ у ряд за многочленами $U_n(z)$.

Оскільки $\operatorname{sh}az=\dfrac{1}{2}\left(e^{az}-e^{-az}\right)$, то

$$\operatorname{sh}az=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(1-(-1)^n)\,(n+1)I_{n+1}(a)U_n(z)=$$
$$=\frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)I_{2k+2}(a)U_{2k+1}(z).$$

Приклад 8. Розкласти функцію $f(z)=\operatorname{ch}az$ у ряд за многочленами $U_n(z)$.

Маємо

$$\operatorname{ch}az=\frac{1}{2}\left(e^{az}+e^{-az}\right)=$$
$$=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)\,(n+1)I_{n+1}(a)U_n(z)=$$
$$=\frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)I_{2k+1}(a)U_{2k}(z).$$

Висновки

Методи розвинення функцій у ряди за системами функцій дійсної чи комплексної змінної ефективно використовуються для побудови розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь із частинними похідними. Поширеними є методи розв'язання диференціальних рівнянь, що ґрунтуються на розвиненнях функцій в степеневі ряди, а також у ряди за системами ортогональних многочленів та інших ортогональних функцій однієї та декількох змінних. Значно ширший клас систем функцій становлять біортогональні системи функцій. Актуальне завдання – розвиток математичного апарату побудови та дослідження біортогональних систем функцій стосовно розвинення у ряди за цими системами.

У цій роботі побудовано асоційовані функції, біортогональні на замкнених кривих комплексної площини з многочленами Чебишова другого роду. Встановлено умови, за яких аналітичні функції можна розкласти у ряди за цією системою многочленів. Наведено приклади розкладів функцій у ряди за розглядуваною системою многочленів у комплексній області. Крім того, отримано комбінаторні тотожності, що становлять самостійний інтерес.

Література

[1] Сегё Г. Ортогональные многочлены. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 500 с.

[2] Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

[3] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

[4] Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1. – М.: Наука, 1978. – 392 с.

[5] Жевержеев В. Ф., Кальницкий Л. А., Сапогов Н. А. Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: Высшая школа, 1970. – 416 с.

[6] Маркушевич А. И. Избранные главы теории аналитических функций. – М.: Наука, 1976. – 192 с.

A SYSTEM OF FUNCTIONS BIORTHOGONAL WITH CHEBYSHOV POLYNOMIALS OF THE SECOND KIND ON CLOSED CURVES IN THE COMPLEX PLANE

V. V. Dostoina, O. V. Veselovska, M. A. Sukhorolsky

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine

A system of functions biorthogonal with Chebyshov polynomials of the second genus on the closed curves in the complex plane is constructed. The properties of these functions and the conditions of expansion of analytical functions into series by Chebyshov polynomials of the second genus in complex domains are investigated. The examples of such expansions are given. In addition, we obtain combinatorial identities of a independent interest.

Key words: Chebyshov polynomials, analytical function, biorthogonal systems of functions, assosiated functions.

2000 MSC: 33E20

UDK: 517.538.3