ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
№ 898, 2018, с. 41–45

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
“Physical and mathematical sciences”
№ 898, 2018, p. 41–45

ПРО СТІЙКІСТЬ РОЗВ’ЯЗКІВ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В. С. Ільків, Б. Б. Пахолок, Я. М. Пелех

Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 22 грудня 2017 р.)

Отримано достатні умови експоненційної стійкості та стійкості за умови постійного збурення розв’язків квазідиференціальних рівнянь у просторі узагальнених функцій типу міри.

Ключові слова: квазідиференціальні рівняння, квазіпохідна, узагальнені функції, стійкість розв’язків диференціальних рівнянь.

2000 MSC: 34A30, 34A36, 34A37

УДК: 517.926

Вступ

З другої половини двадцятого століття почали активно вивчати так звані квазідиференціальні рівняння спочатку із підсумовними за Лебегом коефіцієнтами, а потім із коефіцієнтами – узагальненими функціями. Це зумовлено новими практичними задачами, які виникали в механіці, електротехніці, теорії автоматичного керування тощо. Для ілюстрації актуальності квазідиференціального підходу в прикладних задачах розглянемо рівняння [5] вільних коливань балки

$$(a_0(t)x'')'' - (a_1(t)x')' + a_2(t)x = 0, \quad t \in [0, l]. \tag{1}$$

Якщо на $[0, l]$ функція $a_0(t) \neq 0$ і має неперервну другу похідну, $a_1(t)$ – неперервну першу похідну, а функція $a_2(t)$ є неперервною, то рівняння (1) є звичайним диференціальним рівнянням четвертого порядку з неперервними коефіцієнтами. Розв’язок $x(t)$ цього рівняння є неперервною функцією разом із похідними до четвертого порядку включно і рівняння (1) справджується у кожній точці $t \in [0, l]$. Проте такі умови на функції $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ і на розв’язок $x(t)$ надто жорсткі для деяких моделей механічних коливань.

Перепишемо рівняння (1) у такому вигляді:

$$a_2(t)x - \big(a_1(t)x' - (a_0(t)x'')'\big)' = 0.$$

Введемо позначення:

$$x^{[0]} = x, \quad x^{[1]} = \frac{dx^{[0]}}{dt}, \quad x^{[2]} = a_0(t)\frac{dx^{[1]}}{dt},$$

$$x^{[3]} = -\frac{dx^{[2]}}{dt} + a_1(t)x^{[1]}, \quad x^{[4]} = -\frac{dx^{[3]}}{dt} + a_2(t)x. \tag{2}$$

Тоді рівняння (1) запишеться компактно: $x^{[4]} = 0$.

Вирази $x^{[0]}, x^{[1]}, \ldots, x^{[4]}$ називають квазіпохідними функції $x(t)$, які відповідають рівнянню (1). За допомогою квазіпохідних (2) рівняння (1) зводиться до диференціальної системи першого порядку:

$$X' = A(t)X, \tag{3}$$

де $X = \begin{pmatrix} x^{[0]} \\ x^{[1]} \\ x^{[2]} \\ x^{[3]} \end{pmatrix}$ – вектор квазіпохідних,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(t) & 0 \\ 0 & a_1(t) & 0 & -1 \\ a_2(t) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квазіпохідні (2) мають такий фізичний зміст: $x^{[0]}$ – згин балки, $x^{[1]}$ – кут повороту, $x^{[2]}$ – згинальний момент, $x^{[3]}$ – перерізальна сила. Концепція квазіпохідних дає змогу звести до мінімуму вимоги на гладкість коефіцієнтів диференціального рівняння. Зокрема, у цьому випадку достатньо вимагати для функцій $a_i(t)$ виконання таких умов: $a_0^{-1}(t)$ – вимірна й обмежена, $a_1(t)$, $a_2(t)$ – узагальнені функції нульового порядку. При цьому, як відомо [8], функції $x^{[0]}(t)$ і $x^{[1]}(t)$ є абсолютно неперервними, а $x^{[2]}(t)$ і $x^{[3]}(t)$ є функціями обмеженої варіації. З механічного погляду це означає, що балка, крім неперервно розподіленої маси, містить також зосереджені маси у деяких точках $t_i \in (0, l)$, переходячи через які, згин і кут повороту змінюються неперервно, а згинальний момент і перерізальна сила змінюються стрибкоподібно. Рівнянь такого типу багато [1–5].

Квазідиференціальні рівняння з узагальненими функціями у коефіцієнтах і правих частинах рівнянь вивчено у різних напрямах, наприклад, у роботах Р. М. Тація, М. Ф. Стасюк, В. В. Кісілевича, В. В. Мазуренко, О. В. Махнея. Детальну інформацію про отримані результати подано у роботі [6]. Проте питання стійкості розв’язків квазідиференціальних рівнянь ці та інші автори не розглядали.

Метою цієї роботи є дослідження стійкості розв’язків квазідиференціальних рівнянь, які мають негладкі коефіцієнти, що є узагальненими функціями типу міри.

I. Позначення

Нехай $\mathbf{C}^k(I)$ – банахів простір k разів неперервно диференційовних на I функцій $\varphi(t)$ з нормою $\left\|\varphi(t);\mathbf{C}^k(I)\right\| = \sum\limits_{i=0}^{k}\sup\limits_{t\in I}\left|\varphi^{(i)}(t)\right|$, де $I=[t_0,\infty)$, $t_0\in\mathbb{R}$. Вважаємо, що $\mathbf{C}^k(I)$=$C(I)$ для k=0 – простір неперервних на I функцій, а $\mathbf{BV}^+(I)$ – банахів простір неперервних справа функцій обмеженої на I варіації з нормою $\left\|f(t);\mathbf{BV}^+(I)\right\| = |f(t_0)|+V[f(t);I]$, де через $V[f(t);I]$ позначено повну варіацію функції $f(t)$ на I. Повна варіація функції $f(t)$ на нескінченному інтервалі I визначається формулою $V[f(t);I]$=$\overset{\infty}{\underset{t_0}{V}} f(t)$=$\sup\limits_{T\geq t_0}\overset{T}{\underset{t_0}{V}} f(t)$, де $\overset{T}{\underset{t_0}{V}} f(t)$ – повна варіація функції $f(t)$ на скінченному проміжку $[t_0,T]$. Якщо функція $f(t)\in\mathbf{BV}^+(I)$, то стрибок $\Delta f(t)$ цієї функції в точці $t\in I$ визначається формулою $\Delta f(t)=f(t)-f(t-0)$. Оскільки $\mathbf{AC}(I)\subset\mathbf{BV}^+(I)$, де $\mathbf{AC}(I)$ – простір абсолютно неперервних на I функцій, то $\mathbf{AC}(I)$ є також банаховим простором із нормою простору $\mathbf{BV}^+(I)$. Використовуємо позначення: $\mathbf{L}_2(I)$ – банахів простір підсумовних із квадратом на I функцій з нормою $\|\varphi(t);\mathbf{L}_2(I)\| = \left(\int\limits_I \varphi^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$; $\mathbf{D}(I)$ – простір основних функцій із компактним на I носієм; $\mathbf{D}'(I)$ – спряжений до $\mathbf{D}(I)$ простір узагальнених функцій (простір розподілів); $\mathbb{R}^{p\times q}$ – простір розміру $p\times q$ матриць A з дійсними елементами a_{ij} з нормою $\|A\| = \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{q}|a_{ij}|$.

II. Квазідиференціальні рівняння з узагальненими функціями

Розглянемо рівняння

$$K_{nm}[x(t)]\equiv$$

$$\equiv\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}(a_{ij}(t)x^{(n-i)}(t))^{(m-j)} = f(t), \quad (4)$$

де $n\geq 1$, $m\geq 1$, а функції $a_{ij}(t)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ та $f(t)$ задовольняють умови:

(i) $a_{00}^{-1}(t)$ – вимірна й обмежена на I;

(ii) $a_{i0}(t), a_{0j}(t)\in\mathbf{L}_2(I)$;

(iii) $a_{ij}(t)$, $f(t)$ – узагальнені функції нульового порядку (міри)

Визначимо квазіпохідні $x^{[k]}(t)$, які відповідають квазідиференціальному виразу $K_{nm}[x(t)]$, формулами:

$$x^{[k]}(t)=x^{(k)}(t),\quad k=\overline{0,n-1};\quad x^{[n]}(t)=\sum_{i=0}^{n}a_{i0}(t)x^{(n-i)}(t);$$

$$x^{[n+k]}(t)=-\frac{d}{dt}x^{[n+k-1]}(t)+\sum_{i=0}^{n}a_{ik}(t)x^{(n-i)}(t)\quad k=\overline{1,m}. \quad (5)$$

За допомогою квазіпохідних (5) рівняння (4) зводиться до лінійної системи

$$X'(t)=A(t)X(t)+F(t), \quad (6)$$

де вектори $X(t) = \left(x^{[0]}(t),x^{[1]}(t),...,x^{[n+m-1]}(t)\right)^{\mathrm{T}}$, $F(t)=(0,0,...,f(t))^{\mathrm{T}}$, $^{\mathrm{T}}$ – знак транспонування, а матриця $A(t)$ є матрицею блочної структури:

$$A(t)=\begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t)\\ A_{21}(t) & A_{22}(t)\end{pmatrix}.$$

Матриці-блоки $A_{11}(t)$, $A_{12}(t)$, $A_{21}(t)$, $A_{22}(t)$ є розмірності $n\times n$, $n\times m$, $m\times n$, $m\times m$ відповідно і мають такий вигляд (незалежну змінну t для зручності запису пропустимо):

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 1\\ -a_{00}^{-1}a_{n0} & -a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & ... & -a_{00}^{-1}a_{10}\end{pmatrix}, A_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 0\\ a_{00}^{-1} & 0 & ... & 0\end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{n1}-a_{01}a_{00}^{-1}a_{n0} & a_{n-1,1}-a_{01}a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & ... & a_{11}-a_{01}a_{00}^{-1}a_{10}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{n,m-1}-a_{0,m-1}a_{00}^{-1}a_{n0} & a_{n-1,m-1}-a_{0,m-1}a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & ... & a_{1,m-1}-a_{0,m-1}a_{00}^{-1}a_{10}\\ a_{nm}-a_{0m}a_{00}^{-1}a_{n0} & a_{n-1,m}-a_{0m}a_{00}^{-1}a_{n-1,0} & ... & a_{1m}-a_{0m}a_{00}^{-1}a_{10}\end{pmatrix},$$

$$A_{22}=\begin{pmatrix} a_{01}a_{00}^{-1} & -1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{0,m-1}a_{00}^{-1} & 0 & ... & -1\\ a_{0m}a_{00}^{-1} & 0 & ... & 0\end{pmatrix}.$$

За умов (i)–(iii) існують [6] такі функції $b_{ij}(t)$ та $g(t)$, що $g'(t) = f(t)$, $b'_{ij}(t) = a_{ij}(t)$, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,m}$. При цьому $b_{00}^{-1}(t), b_{i0}(t), b_{0j}(t), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$ є абсолютно неперервними на I функціями, а $g(t) \in \mathbf{BV}^+(I)$, $b_{ij}(t) \in \mathbf{BV}^+(I)$ для $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Отже, існує матриця $B(t) \in \mathbf{BV}^+(I)$ такої, як і матриця $A(t)$, блочної структури

$$B(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix}$$

і така, що $B'(t) = A(t)$, де похідну і рівність розуміють у сенсі простору $\mathbf{D}'(I)$. Аналогічно існує вектор $G(t) = [0, 0, ..., g(t)]^{\mathrm{T}}$ такий, що $G(t) \in \mathbf{BV}^+(I)$ і $G'(t) = F(t)$ у сенсі простору $\mathbf{D}'(I)$. Оскільки елементи матриць A_{11}, A_{12}, A_{22} належать до простору $\mathbf{AC}(I)$, то матриці стрибків $\Delta B(t) = B(t) - B(t-0)$ і $\Delta G(t) = G(t) - G(t-0)$ мають вигляд

$$\Delta B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta B_{21} & 0 \end{pmatrix}, \Delta G(t) = [0, 0, ..., 0, \Delta g(t)]^{\mathrm{T}}, \quad (7)$$

де

$$\Delta B_{21}(t) = \begin{pmatrix} \Delta b_{n1}(t) & \Delta b_{n-1,1}(t) & ... & \Delta b_{11}(t) \\ \Delta b_{n2}(t) & \Delta b_{n-1,2}(t) & ... & \Delta b_{12}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ \Delta b_{nm}(t) & \Delta b_{n-1,m}(t) & ... & \Delta b_{1,m}(t) \end{pmatrix}.$$

Задача Коші для рівняння (4) формулюється у термінах початкових умов для квазіпохідних (5):

знайти такий розв'язок $x(t)$ рівняння (4)*, який задовольняє початкові умови*

$$x^{[k]}(t_0) = x_0^k, \quad k = \overline{0, n+m-1}. \quad (8)$$

Теорема 1. *За умов (i)–(iii) існує єдиний розв'язок $x(t)$ задачі* (4), (8) *такий, що*

$$x^{[k]}(t) \in AC(I), \quad k = \overline{0, n-1};$$

$$x^{[n+k]}(t) \in BV^+(I), \quad k = \overline{0, m-1}.$$

У точках $t_s \in I$ розривів функцій $b_{ij}(t)$, $g(t)$ квазіпохідні мають стрибки, які для $k = \overline{0, m-2}$ визначаються формулами:

$$\Delta x^{[n+k]}(t_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta b_{n-i,k+1}(t_s) x^{[i]}(t_s - 0),$$

$$\Delta x^{[n+m-1]}(t_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta b_{n-i,m}(t_s) x^{[i]}(t_s - 0) + \Delta g(t_s).$$

III. Узагальнення лінійних диференціальних систем

Розглянемо в просторі $\mathbf{D}'(I)$ задачу

$$X'(t) = B'(t)X(t) + G'(t), \quad (9)$$

$$X(t_0) = X_0, \quad (10)$$

де похідні в (9) є узагальненими похідними. Розмірності величин в (9), (10) є такими: $X(t), G(t) \in \mathbb{R}^{p\times 1}$; $B(t) \in \mathbb{R}^{p\times p}$, вектор-константа $X_0 \in \mathbb{R}^{p\times 1}$. Матриця $B(t) \in \mathbf{BV}^+(I)$ і вектор $G(t) \in \mathbf{BV}^+(I)$, це означає, що всі їх елементи належать простору $\mathbf{BV}^+(I)$.

Відомо ([7], с. 161), що функція $f(t)$ є функцією обмеженої варіації, якщо і тільки якщо її узагальнена похідна $f'(t)$ є узагальненою функцією нульового порядку, тобто мірою.

Розглянемо також таке інтегральне рівняння

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} dB(\tau)X(\tau) + G(t) - G(t_0). \quad (11)$$

Якщо додатково виконуються умови

$$(\Delta B(t))^2 = 0, \quad \Delta B(t)\Delta G(t) = 0 \quad \forall t \in I, \quad (12)$$

де $\Delta B(t) = B(t) - B(t-0)$, $\Delta G(t) = G(t) - G(t-0)$, то [6, с. 70] інтеграл у (11) є інтегралом Рімана–Стільтьєса, добуток $B'(t)X(t)$ у рівнянні (9) коректно визначений у просторі узагальнених функцій і рівняння (11) має єдиний розв'язок $X(t) \in \mathbf{BV}^+(I)$. Оскільки рівняння (4) зводиться до системи (6), де $A(t) = B'(t)$, $F(t) = G'(t)$, матриці стрибків $\Delta B(t)$, $\Delta G(t)$ мають вигляд (7), то легко помітити, що умови коректності для рівняння (6) виконуються. Надалі умови (12) називатимемо умовами коректності рівняння (9) і рівняння (11).

Під розв'язком задачі (9), (10) розуміємо розв'язок інтегрального рівняння (11).

Зазначимо, що рівняння (9) є узагальненням класичного диференціального рівняння, якщо $B(t), G(t) \in \mathbf{C}^1(I)$, й узагальненням рівняння Каратеодорі, якщо $B(t), G(t) \in \mathbf{AC}(I)$.

IV. Про стійкість розв'язків квазідиференціальних рівнянь

Вивчатимемо стійкість розв'язків квазідиференціального рівняння (4) за допомогою відповідної йому коректної лінійної диференціальної системи (6), до якої зводиться це рівняння за допомогою квазіпохідних. Причому, як добре відомо, досить розглядати лише однорідну систему. Вважаємо, що коли однорідна система має властивість стійкості розв'язків, то таку ж властивість стійкості має і відповідне їй квазідиференціальне рівняння.

Для лінійних рівнянь поняття обмеженості та стійкості розв'язків за Ляпуновим еквівалентні. Оскільки за умов (i)–(iii) розв'язки рівняння (4) належать до класу $\mathbf{BV}^+(I)$, то вони обмежені, а отже, і стійкі. Тому питання стійкості розв'язку за Ляпуновим для лінійних систем вирішується автоматично у межах означення розв'язку рівняння (4). Інші види стійкості є актуальними для дослідження.

Надалі вважаємо, що $A(t) = B'(t)$, де $A(t)$ – матриця в рівнянні (6), а матриця $B(t) \in \mathbf{BV}^+(I)$. Розглянемо однорідну систему

$$X'(t) = B'(t)X(t), \quad (13)$$

до якої зводиться однорідне ($f(t)=0$) квазідиференціальне рівняння (4), та відповідну збурену систему

$$Y'(t) = (B'(t) + Q'(t))Y(t) + \gamma\Phi(t, Y(t)), \qquad (14)$$

де $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}^{(n+m)\times 1}$, $B(t)$, $Q(t) \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$, $\Phi(t, Y(t)) \in \mathbb{R}^{(n+m)\times 1}$, $Q(t) \in \mathbf{BV}^{+}(I)$, $\|\Phi(t, Y(t)\| \leq \|Y(t)\|$ в області

$$D_h = I \times \left\{Y(t) \in \mathbf{BV}^{+}(I) \colon \|Y(t)\| \leq h\right\}.$$

Означення 1. Тривіальний розв'язок рівняння (13) називають експоненційно стійким, якщо існують такі додатні числа α та β, що довільний розв'язок $X(t)$ цього рівняння задовольняє нерівність

$$\|X(t)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-t_0)} \|X(t_0)\| \text{ для всіх } t \geq t_0.$$

У вивченні поведінки (зростання) розв'язків квазідиференціальних рівнянь важливу роль відіграє таке узагальнення леми Ґронуолла–Беллмана [9].

Лема 1. *Нехай $g(t) \in \mathbf{BV}^{+}(I)$, а функція $f(t)$ невід'ємна і неперервна на I. Якщо для всіх $t \geq t_0$ справджується нерівність*

$$f(t) \leq c_1 + c_2 \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,|dg(\tau)|\,,$$

де c_1, c_2 – додатні сталі, то

$$f(t) \leq c_1 \exp\left(c_2 \overset{t}{\underset{t_0}{V}} g(\tau)\right). \qquad (15)$$

Теорема 2. *Нехай нульовий розв'язок рівняння* (13) *експоненційно стійкий і виконується умова $\beta\gamma < \alpha$. Тоді нульовий розв'язок рівняння* (14) *також експоненційно стійкий.*

☐ *Доведення.* Нехай $W(t, t_0)$ – нормальна у точці $t = t_0$ фундаментальна матриця [8] однорідного рівняння (13). З умов теореми та означення 1 випливає оцінка $\|W(t, t_0)\| \leq \beta \exp(-\alpha(t - t_0))$ для всіх $t \geq t_0$. Довільний розв'язок рівняння (14) задовольняє інтегральне рівняння

$$Y(t) = W(t, t_0)Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t, \tau)dQ(\tau)Y(\tau) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} W(t, \tau)\Phi(\tau, Y(\tau))d\tau. \qquad (16)$$

Перейшовши до норм у формулі (16), отримаємо нерівність

$$\|Y(t)\| \leq \|W(t, t_0)\| \|Y(t_0)\| +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|W(t, \tau)\| \|dQ(\tau)\| \|Y(\tau)\| +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|W(t, \tau)\| \|\Phi(\tau, Y(\tau)\| d\tau.$$

Врахувавши оцінки для $W(t, t_0)$ і $\Phi(t, Y(t))$, одержимо:

$$\|Y(t)\| \leq \beta \|Y(t_0)\| e^{-\alpha t} e^{\alpha t_0} +$$

$$+ \beta e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau} \|dQ(\tau)\| \|Y(\tau)\| +$$

$$+ \beta\gamma e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau} \|Y(\tau)\| d\tau.$$

Позначимо $v(t) = \overset{t}{\underset{t_0}{V}} Q(\tau)$ та помножимо останню нерівність на $e^{\alpha t}$. Отримаємо нерівність

$$\|Y(t)\| e^{\alpha t} \leq \beta \|Y(t_0)\| e^{\alpha t_0} +$$

$$\beta \int_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau} \|Y(\tau)\| d(v(\tau) + \gamma\tau)).$$

Використовуючи лему, можемо записати таку оцінку:

$$\|Y(t)\| e^{\alpha t} \leq \beta \|Y(t_0)\| e^{\alpha t_0} e^{\beta(v(t) + \gamma(t - t_0))}.$$

За умовою теореми $\overset{\infty}{\underset{t_0}{V}} Q(t) = M < \infty$. Помножимо останню нерівність на $e^{-\alpha t}$. Одержимо нерівність

$$\|Y(t)\| \leq$$

$$\leq \beta \|Y(t_0)\| e^{\alpha t_0} e^{\beta M} e^{-(\alpha-\beta\gamma)(t-t_0)} = \lambda e^{-(\alpha-\beta\gamma)(t-t_0)},$$

де $\lambda = \beta \|Y(t_0)\| e^{\alpha t_0 + \beta M}$. Отже, якщо $\alpha - \beta\gamma > 0$, то нульовий розв'язок рівняння (14) є експоненційно стійким. Теорему доведено. ■

Означення 2. Розв'язок $X(t) \equiv 0$ рівняння (13) називається стійким за умови постійних збурень, якщо для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільного розв'язку $Y(t)$ рівняння

$$Y'(t) = B'(t)Y(t) + P'(t) \qquad (17)$$

такого, що $\|Y(t_0)\| < \delta$, справджується нерівність $\|Y(t)\| < \varepsilon$ для $\forall t \geq t_0$, як тільки $\overset{\infty}{\underset{t_0}{V}} P(t) < \delta$.

Якщо виконується це означення, то систему (13) називатимемо стійкою до постійних збурень. Зауважимо, що збурення $P'(t)$ є, загалом, імпульсними, оскільки $P(t) \in \mathbf{BV}^{+}(I)$.

Теорема 3. *Система* (13) *стійка за умови постійних збурень.*

☐ *Доведення.* Розв'язок рівняння (17) записується у формі

$$Y(t) = Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} dB(\tau)Y(\tau) + P(t) - P(t_0).$$

Переходячи в цій рівності до норм та враховуючи нерівність $\|P(t) - P(t_0)\| \leq \overset{t}{\underset{t_0}{V}} P(\tau)$, отримаємо:

$$\|Y(t)\| \leq \|Y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|dB(\tau)\| \|Y(\tau)\| +$$

$$+ \|P(t) - P(t_0)\| \leq \|Y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|dB(\tau)\| \|Y(\tau)\| +$$

$$+ \overset{t}{\underset{t_0}{V}} P(\tau) \leq 2\delta + \int_{t_0}^{t} \|dB(\tau)\| \|Y(\tau)\|.$$

Звідси, після використання леми, одержимо оцінку

$$\|Y(t)\| \le 2\delta \exp\big(\mathop{V}_{t_0}^{t} B(\tau)\big).$$

Якщо тепер взяти число $\delta < \frac{\varepsilon}{2\exp\big(\mathop{V}\limits_{t_0}^{\infty} B(t)\big)}$, то отримаємо, що $\|Y(t)\| < \varepsilon$. Теорему доведено. ■

Висновки

Отримані результати стосовно стійкості розв'язків квазідиференціальних рівнянь можна використати, зокрема, для дослідження стійкості коливань валів із кусково сталими і кусково змінними поперечними перерізами, які навантажені в окремих своїх точках масивними шківами та зазнають під час коливання дії зовнішніх імпульсних сил.

Література

[1] *Albeverio S., Gestesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. – placeCityProvidence. RI: AMS Chelsea Publishing. 2005. – 488 p.

[2] *Лазарян В. Я., Конашенко С. И.* Обобщенные функции в задачах механики. – К.: Наук. думка, 1974. – 195 с.

[3] *Образцов И. Ф., Онанов Г. Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем. – М.: Машиностроение, 1973. – 659 с.

[4] *Гащук П. М., Зорій Л.-М. М.* Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с.

[5] *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. – М.: Наука, 1968. – 503 с.

[6] *Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В., Власій О. О.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння. – Дрогобич: Коло, 2011. – 301 с.

[7] *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 312 с.

[8] *Таций Р. М., Пахолок Б. Б.* О структуре фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 25–28.

[9] *Пахолок Б. Б.* Об одном неравенстве Гронуолла–Беллмана // Дифференциальные уравнения и их приложения: Вестник Львов. политехн. ин-та. – 1989. – № 232. – С. 109–110.

ON THE STABILITY OF SOLUTIONS OF QUASIDIFFERENTIAL EQUATIONS

V. S. Il'kiv, B. B. Pakholok, Ya. M. Pelekh

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine

Sufficient conditions is obtained for exponential stability and stability under conditions of continuous perturbation of solutions of quasidifferential equations in the space of generalized functions of measure type.

Key words: quasidifferential equations, quasiderivative, generalized functions, stability of solutions of differential equations.

2000 MSC: 34A30, 34A36, 34A37

UDK: 517.926