УДК 519.218

С.А. Лупенко, Н.С. Луцик, А.М. Лупенко, Н.Б. Стадник
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЛІНІЙНИЙ ЦИКЛІЧНИЙ ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕСТОВИХ КОЛИВНИХ СИГНАЛІВ У ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ ДІАГНОСТИКИ, АУТЕНТИФІКАЦІЇ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ

Означено лінійний циклічний випадковий процес, який поєднує властивості лінійного процесу та циклічного випадкових процесів. Це розширило можливості опису циклічних сигналів у межах теорії лінійних випадкових процесів та узагальнило їх відому математичну модель у вигляді лінійного періодичного випадкового процесу. Лінійний циклічний випадковий процес характеризується широкими можливостями щодо його застосування як математичної моделі тестових коливних сигналів у задачах навчання та тестування інформаційних систем підтримки прийняття кардіодіагностичних рішень, інформаційних систем біометричної аутентифікації особи, інформаційних економетричних систем підтримки прийняття управлінських рішень на основі прогнозних даних.

Ключові слова: інформаційні системи, тестові циклічні сигнали, лінійний циклічний випадковий процес, математична модель, функція ритму, факторизоване ядро.

In this study the cyclic linear random process, which combines the properties of linear random process and cyclic random process, is defined. This expands the possibility of describing cyclic signals and processes within the framework of linear random processes theory and generalizes their known mathematical model as a linear periodic random process. The linear cyclic random process is characterized by the wide possibilities of its applications as a mathematical model of testing oscillatory signals in the problems of learning and testing of information cardiodiagnostic decision-making support systems, of a person's biometric authentication, of econometric decision-making support systems on the basis of predicted data.

Key words: information systems, cyclic test, linear cyclic stochastic process, mathematical model, the function of rhythm, factorized core.

Вступ та постановка проблеми

У багатьох науково-технічних областях під час розроблення та тестування інформаційних систем різної природи та призначення (інфокомунікаційні, інформаційно-вимірювальні, діагностичні інформаційні системи) постає задача імітаційного моделювання на ЕОМ чи спеціалізованому програмно-апаратному генераторі циклічних сигналів, які мають місце у таких системах. Зокрема така потреба виникає в задачах навчання та тестування інформаційних систем підтримки прийняття кардіодіагностичних рішень, інформаційних систем біометричної аутентифікації особи, інформаційних економетричних систем підтримки прийняття управлінських рішень на основі прогнозних даних.

Існуючі методи та програмно-апаратні засоби імітації циклічних сигналів, серед яких можна назвати генератори сигналів таких виробників, як Agent, Hewlett Packard, Tektronix, Protek, Tabor Electronics, Rohde & Schwarz, Agilent Technologies, Aeroflex/IFR/Marconi, Instek, дають змогу відтворити циклічні сигнали лише відносно простої часової структури, а саме гармонічні, прямокутні, трапецієподібні, пилкоподібні, трикутні періодичні детерміновані сигнали та модульовані (за амплітудою та кутом) гармонічні, прямокутні та шумоподібні сигнали, а також ряд стохастично періодичних випадкових процесів, які описуються математичними моделями у вигляді адитивного та мультиплікативного поєднання стаціонарного білого шуму та періодичної детермінованої функції [1–4]. Однак, такі сигнали не завжди адекватні реальним вхідним сигналам сучасних інформаційних діагностичних, аутентифікаційних та прогностичних систем, що не дає змоги використовувати їх як тестові для тестування підсистем інформаційної системи.

Метою роботи є розроблення математичної моделі широкого класу циклічних сигналів, яка б враховувала більш тонкі закономірності просторово-часової структури імітованих сигналів, мала б загальний, універсальний характер та внаслідок наявності засобів параметричної ідентифікації алгоритму генерування забезпечувала б можливість управління морфологічними характеристиками та характеристиками ритму імітованих циклічних сигналів. Всі переваги математичної моделі тестових коливних сигналів має лінійний випадковий процес (ЛВП), що знайшов значного поширення серед теоретичних та прикладних досліджень, зокрема, у задачах моделювання та розроблення систем інфокомунікацій, систем технічної та медичної діагностики, в гідроакустиці, геофізиці [5–10].

Характерною властивістю лінійного випадкового процесу є його конструктивність, а саме, ЛВП задається у вигляді певної конструкції – стохастичного інтегралу Стілтьєса від процесу із незалежними (чи не корельованими) приростами. Крім того, на основі ЛВП можна описувати та аналізувати сигнали в межах багатовимірних функцій розподілу та здійснювати його імітаційне моделювання засобами обчислювальної техніки. Певною складністю у застосуванні ЛВП до моделювання реальних сигналів та процесів є складність ідентифікації елементів його конструкції за відомими (заданими) ймовірнісними характеристиками досліджуваних сигналів та процесів.

У наукових роботах теоретичного та прикладного спрямування виділяють два важливі підкласи лінійних випадкових процесів, а саме стаціонарні лінійні випадкові процеси [11] та лінійні періодичні випадкові процеси [12–14]. Стаціонарні лінійні випадкові процеси використовуються як адекватні моделі стохастичних сигналів із інваріантними у часі ймовірнісними характеристиками, а лінійні періодичні випадкові процеси дають змогу враховувати випадковість та повторюваність досліджуваних випадкових сигналів, що забезпечується періодичністю ймовірнісних характеристик процесу.

У багатьох випадках, коли ритм (темп) циклічного сигналу є змінним, то гіпотеза про періодичність його ймовірнісних характеристик є неадекватною структурі реального сигналу, тому лінійний періодичний випадковий процес у цій ситуації застосовувати не цілком коректно. У цій ситуації слушно застосовувати введений у праці [15] клас циклічних випадкових процесів, який як свій підклас містить клас періодичних випадкових процесів та уможливлює врахування мінливості ритму циклічних сигналів.

Зважаючи на те, що клас циклічних випадкових процесів є ширшим класом процесів, ніж клас періодичних випадкових процесів, доцільно ввести клас випадкових процесів, що є перетином класів циклічних випадкових процесів та лінійних випадкових процесів, а саме означити клас лінійних циклічних випадкових процесів (ЛЦВП), який би поєднував у собі властивості ЛВП та циклічних випадкових процесів, що дасть змогу розширити можливості застосування конструктивного підходу до опису циклічних сигналів у рамках теорії лінійних випадкових сигналів та процесів, а також удосконалити програмно-апаратні засоби тестування інформаційних систем діагностики, аутентифікації та прогнозування.

Означення та основні властивості лінійного випадкового процесу

Коротко наведемо необхідні для подальшого викладу основні відомості про ЛВП та циклічний випадковий процес. ЛВП може бути поданий у вигляді стохастичного інтегралу Рімана:

$$x(w,t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t,t)\,z(w,t)\,dt,\ w\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{R} \qquad (1)$$

або у вигляді інтегралу за стохастичною мірою Стілтьєса:

$$x(w,t)=\int_{-\infty}^{\infty} j(t,t)\,dh(w,t),\ w\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{R}, \qquad (2)$$

де $f(t,t)$ – інтегровна з квадратом за змінною t детермінована функція, яку названо ядром ЛВП $x(w,t)$; випадковий процес $h(w,t), w\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{R}$ є процесом із незалежними (некорельованими) приростами, який названо породжувальним процесом, узагальнена похідна від якого є білим шумом

$z\,(w,t), w\in \mathbf{\Omega}, t\in \mathbf{R}$ у вузькому (широкому) розумінні ($\mathbf{\Omega}$ – множина елементарних подій). Із прикладного погляду, ЛВП – це процес на виході лінійної системи з імпульсною реакцією $f(t,t)$, якщо на її вхід діє процес білого шуму $z\,(w,t), w\in \mathbf{\Omega}, t\in \mathbf{R}$ (рис. 1).

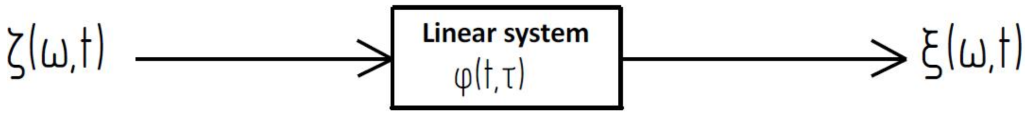


Рис. 1 Схема породження ЛВП

Випадковий процес $h\,(w,t), w\in \mathbf{\Omega}, t\in \mathbf{R}$ називається процесом із незалежними (некорельованими) приростами, якщо при деякому фіксованому t_0 для всіх $t_{-m} < t_{-m+1} < \ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ ($m,n\in \mathbf{Z}$) із $\mathbf{R}$ випадкові величини:

$$\begin{gathered} h\,(w,t_{-m})-h\,(w,t_{-m+1}),\ldots,h\,(w,t_0)-h\,(w,t_{-1}),\;\; h\,(w,t_0), \\ h\,(w,t_1)-h\,(w,t_0),\ldots,h\,(w,t_n)-h\,(w,t_{n-1}) \end{gathered} \tag{3}$$

незалежні (некорельовані).

Для ЛВП можна записати логарифм його багатовимірної характеристичної функції у формі Леві:

$$\ln f_{k_x}\,(u_1,\ldots,u_k;t_1,\ldots,t_k) =$$

$$= i\sum_{j=1}^{k} u_j \int_{-\infty}^{\infty} j\,(t,t_j)\,dm(t) - \sum_{i,j=1}^{k} u_i u_j \int_{-\infty}^{\infty} j\,(t,t_i)\,j\,(t,t_j)\,ds\,(t) +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{ix\sum u_j j\,(t,t_j)} - 1 - \frac{ix}{1+x^2}\sum_{k=1}^{n} u_j j\,(t,t_j)\right] d_x d_t\, L(x,t)\,, \tag{4}$$

де $L(x,t)$ – неозначена в нулі функція, що називається пуассонівським спектром стрибків у формі Леві. Ця функція означується так:

$$L(x,t) = \begin{cases} M(x,t), & x<0, \\ N(x,t), & x>0, \end{cases} \tag{5}$$

де $M(x,t)$ та $N(x,t)$ ($M(-\infty,t) = N(\infty,t)$ =0) – неспадні функції, що відповідно задають від'ємні та додатні стрибки (прирости) породжувального процесу.

Функції $m(t)$ та $s\,(t)$ означуються так:

$$dm(t) = d\,c_1(t) - dt\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x d_x L(x,t)\,, \tag{6}$$

$$ds\,(t) = d\,c_2(t) - dt\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2) d_x L(x,t)\,, \tag{7}$$

де $c_1(t)$ та $c_2(t)$ – перша та друга кумулянтні функції породжувального процесу $h(w,t)$.

Означення та основні властивості циклічного випадкового процесу

Згідно із роботою [15], для циклічного випадкового процесу неперервного аргументу характерно те, що сімейство його узгоджених функцій розподілу задовольняє такі рівності:

$$F_{k_x}\,(x_1,\ldots,x_k,t_1,\ldots,t_k) =$$

$$= F_{k_x}\,(x_1,\ldots,x_k,t_1+T(t_1,n),\ldots,t_k+T(t_k,n)), x_1,\ldots,x_k, t_1,\ldots,t_k\in \mathbf{R}, n\in \mathbf{Z}, k\in \mathbf{N}\,. \tag{8}$$

Функція $T(t,n)$ названа функцією ритму і має такі властивості:

1. a) $T(t,n)>0$, якщо $n>0$ ($T(t,1)<\infty$);

   b) $T(t,n)=0$, якщо $n=0$;

   c) $T(t,n)<0$, якщо $n<0$, $t\in \mathbf{R}$. (9)

2. Для будь-яких $t_1 \in \mathbf{R}$ та $t_2 \in \mathbf{R}$, для яких $t_1 < t_2$, для функції $T(t,n)$ виконується строга нерівність:

$$T(t_1,n) + t_1 < T(t_2,n) + t_2, \forall n \in \mathbf{Z}. \qquad (10)$$

3. Функція $T(t,n)$ є найменшою за модулем ($|T(t,n)| \le |T_g(t,n)|$) серед усіх таких функцій $\{T_g(t,n), g \in \mathbf{\Gamma}\}$, які задовольняють умови (9) та (10).

Інакше кажучи, циклічний випадковий процес – це такий випадковий процес, функції розподілу якого за сукупністю часових аргументів є інваріантними до зліченної циклічної розривної групи перетворень $\mathbf{\Gamma} = \{T_n(t) = t + T(t,n), n \in \mathbf{Z}\}$, які задовольняють умови функції ритму.

Зазначимо, що сімейство характеристичних функцій та моментних функцій (якщо вони існують) циклічного випадкового процесу також задовольняють умову інваріантності, що є аналогічною до умови (8), тобто вони є інваріантними до зліченної циклічної розривної групи перетворень $\mathbf{\Gamma} = \{T_n(t) = t + T(t,n), n \in \mathbf{Z}\}$, які задовольняють умовами функції ритму.

Зокрема, згідно із роботи [15], дамо означення процесу із незалежними циклічними приростами.

Стохастично неперервний із незалежними приростами процес $h(w,t)$ будемо називати процесом із незалежними циклічними приростами, якщо існує така функція $T(t,n)$, яка задовольняє умовами функції ритму, що при фіксованому $h > 0$ розподіли приростів (диференціалів) $\Delta_h h(w,t)$ ($dh(w,t)$) і $\Delta_h h(w,t+T(t,n))$ ($dh(w,t+T(t,n))$) однакові для довільного $n \in \mathbf{Z}$ та для будь-якого $t \in \mathbf{R}$.

Лінійний циклічний випадковий процес

Для врахування циклічності у ймовірнісних характеристиках ЛВП накладемо умови на його ядро $j(t,t)$ та ймовірнісні характеристики породжувального процесу $h(w,t), w \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{R}$, а саме лінійний випадковий процес $x(w,t)$ буде циклічним у таких випадках:

1. Коли лінійна система є стаціонарною (часоінваріантною) із незмінними параметрами, тобто $j(t,t) = j(t-t)$, а породжувальний випадковий процес $h(w,t), w \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{R}$ є процесом із незалежними (некорельованими) циклічним приростами [15] із функцією ритму $T(t,n)$;

2. Коли лінійна система описується циклічним лінійним оператором, тобто $j(t,t) = j(t+T(t,n),t)$, а породжувальний процес є однорідним випадковим процесом із незалежними (некорельованими) приростами;

3. Коли лінійна система описується циклічним лінійним оператором, тобто $j(t,t) = j(t+T(t,n),t)$, а породжувальний випадковий процес $h(w,t), w \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{R}$ є процесом із незалежними (некорельованими) циклічним приростами із функцією ритму $T(t,n)$.

Зазначимо, що за умови виконання вимоги некорельованості приростів породжувального процесу $h(w,t), w \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{R}$ матимемо лінійний циклічний випадковий процес у широкому розумінні, тобто циклічними будуть його математичне сподівання та кореляційна функція за сукупністю її двох аргументів. Якщо ж вимагати незалежність приростів породжувального процесу, то отримаємо лінійний циклічний випадковий процес у вузькому розумінні, тобто циклічною за сукупністю всіх часових аргументів будуть його багатовимірні функції розподілу та характеристичні функції.

Покажемо справедливість сформульованих умов циклічності лінійного випадкового процесу лише для другого випадку, коли породжувальний процес є однорідним, а саме коли $L(x,t) = L(x)$,

$m(t)=m$, $s(t)=s$, а ядро лінійного процесу є циклічною функцією за аргументом t , тоді для характеристичної функції (4) можна записати:

$$\ln f_k\left(u_1,...,u_k;t_1,...,t_k\right)=$$

$$=im\sum_{j=1}^{k}u_j\int_{-\infty}^{\infty}j\left(t,t_j\right)dt-s^2\sum_{i,j=1}^{k}u_iu_j\int_{-\infty}^{\infty}j\left(t,t_i\right)j\left(t,t_j\right)dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{ix\sum u_jj\left(t,t_j\right)}-1-\frac{ix}{1+x^2}\sum_{k=1}^{n}u_jj\left(t,t_j\right)\right]dL(x)dt=$$

$$=im\sum_{j=1}^{k}u_j\int_{-\infty}^{\infty}j\left(t,t_j+T\left(t_j,n\right)\right)dt-s^2\sum_{i,j=1}^{k}u_iu_j\int_{-\infty}^{\infty}j\left(t,t_i+T\left(t_i,n\right)\right)j\left(t,t_j+T\left(t_j,n\right)\right)dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{ix\sum u_jj\left(t,t_j+T\left(t_j,n\right)\right)}-1-\frac{ix}{1+x^2}\sum_{k=1}^{n}u_jj\left(t,t_j+T\left(t_j,n\right)\right)\right]dL(x)dt=$$

$$=\ln f_k\left(u_1,...,u_k;t_1+T\left(t_1,n\right),...,t_k+T\left(t_k,n\right)\right). \qquad (11)$$

Тобто лінійний випадковий процес $x\left(w,t\right)$ є циклічним випадковим процесом із функцією ритму $T\left(t,n\right)$. Зрозуміло, що моментні функції такого лінійного випадкового процесу також будуть циклічними. Розглянемо це лише для його перших двох моментних функцій – математичного сподівання та кореляційної функції. Ці моментні функції повністю вичерпують опис ЛВП у широкому розумінні, коли вимагається лише некорельованість приростів породжувального процесу, а не їх незалежність. У такому випадку для математичного сподівання ЛЦВП можна записати:

$$m_x\left(t\right)=\mathbf{M}\left\{x\left(w,t\right)\right\}=m\cdot\int_{-\infty}^{\infty}j\left(t,t\right)dt=$$
$$=m\cdot\int_{-\infty}^{\infty}j\left(t+T\left(t,n\right),t\right)dt=\mathbf{M}\left\{x\left(w,t+T\left(t,n\right)\right)\right\},t\in\mathbf{R},n\in\mathbf{Z}, \qquad (12)$$

де m – математичне сподівання приростів однорідного процесу $h\left(w,t\right),w\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{R}$ з некорельованими приростами.

Для кореляційної функції ЛЦВП матимемо:

$$\mathbf{R}_x\left(t_1,t_2\right)=\mathbf{M}\left\{\overset{\circ}{x}\left(w,t_1\right)\cdot\overset{\circ}{x}\left(w,t_2\right)\right\}=s^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}j\left(t_1,t\right)j\left(t_2,t\right)dt=$$
$$=s^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}j\left(t_1+T\left(t_1,n\right),t\right)j\left(t_2+T\left(t_2,n\right),t\right)dt= \qquad (13)$$
$$=\mathbf{R}_x\left(t_1+T\left(t_1,n\right),t_2+T\left(t_2,n\right)\right),t_1,t_2\in\mathbf{R},n\in\mathbf{Z},$$

де s – середньоквадратичне відхилення приростів однорідного процесу $h\left(w,t\right),w\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{R}$ з некорельованими приростами.

Тобто математичне сподівання ЛЦВП є циклічною детермінованою функцією із функцією ритму $T\left(t,n\right)$, а його кореляційна функція є циклічною із функцією ритму $T\left(t,n\right)$ за сукупністю її двох аргументів.

Частинний випадок лінійного циклічного випадкового процесу із факторизованим ядром

У частинному випадку, коли ядро $f\left(t,t\right)$ ЛВП може бути факторизоване, а саме, може бути подане у вигляді добутку двох функцій:

$$f\left(t,t\right)=f_1\left(t\right)\cdot f_2\left(t\right),\ t,t\in\mathbf{R}, \qquad (14)$$

то ЛВП матиме такий вигляд:

$$x\left(w,t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1\left(t\right)\cdot f_2\left(t\right)dh\left(w,t\right)=f_1\left(t\right)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f_2\left(t\right)dh\left(w,t\right),w\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{R}, \qquad (15)$$

що еквівалентно зображенню випадкового процесу у вигляді добутку детермінованої функції $f_1(t)$ та випадкової величини $A(w)$, а саме:

$$x(w,t) = f_1(t)\cdot A(w), w\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{R}, \tag{16}$$

де $A(w) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\,dh(w,t)$ – випадковий функціонал.

Якщо у цьому випадку функція $f_1(t) = f_1(t + T(t,n))$ є циклічною числовою функцією, то формули (12) та (13) набудуть такого вигляду:

$$\begin{gathered} m_x(t) = \mathbf{M}\{x(w,t)\} = \\ = m\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} j(t,t)\,dt = m\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} j_1(t)\cdot j_2(t)\,dt = m\cdot j_1(t)\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} j_2(t)\,dt, t\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{Z}, \end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{R}_x(t_1,t_2) = s^2\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t_1,t)f(t_2,t)\,dt = s^2\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t_1)\cdot f_1(t_2)\cdot f_2(t)\cdot f_2(t)\,dt = \\ = s^2\cdot f_1(t_1)\cdot f_1(t_2)\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f_2(t))^2\,dt, t_1,t_2\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{Z}. \end{gathered} \tag{18}$$

У цьому разі циклічність ймовірнісних характеристик лінійного випадкового процесу зумовлюється циклічністю числової функції $f_1(t)$.

Наведемо приклад ЛЦВП та його ймовірнісних характеристик у випадку факторизовності ядра ЛЦВП. Нехай ядро ЛЦВП має вигляд:

$$j(t,t) = \sin\left(2t^2\right)\cdot e^{-0.3\cdot t}\cdot\cos(t),\ t\in(0,\infty), t\in\mathbf{R}, \tag{19}$$

а породжувальний випадковий процес $h(w,t), w\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{R}$ є однорідним процесом із незалежними приростами із математичним сподіванням m та середньоквадратичним відхиленням s його приростів, тоді лінійний циклічний випадковий процес матиме вигляд:

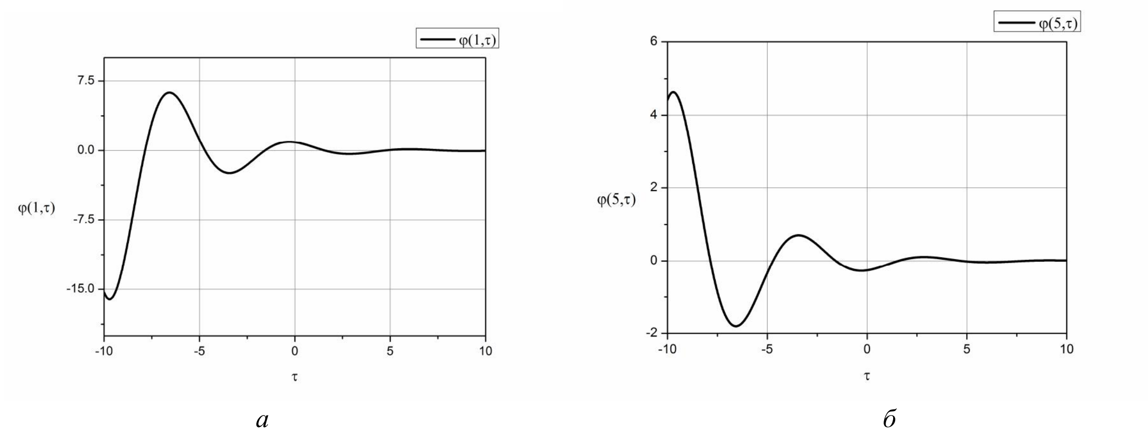
$$x(w,t) = \sin\left(2t^2\right)\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-0.3\cdot t}\cdot\cos(t)\,dh(w,t), w\in\mathbf{\Omega}, t\in(0,\infty), \tag{20}$$

а його математичне сподівання та кореляційна функція дорівнюватимуть:

$$m_x(t) = m\cdot\sin\left(2t^2\right)\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-0.3\cdot t}\cdot\cos(t)\,dt, t\in(0,\infty), t\in(0,\infty), n\in\mathbf{Z}, \tag{21}$$

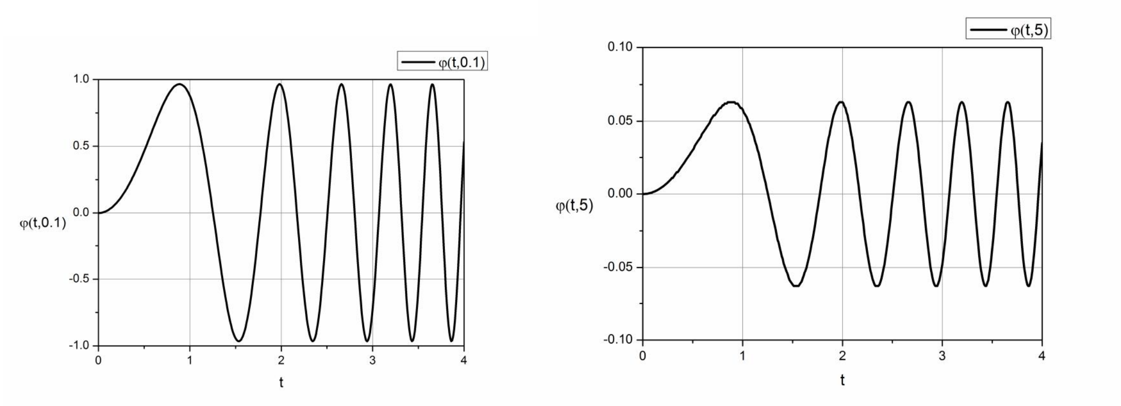
$$R_x(t_1,t_2) = s^2\cdot\sin\left(2t_1^{\,2}\right)\cdot\sin\left(2t_2^{\,2}\right)\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-0.3\cdot t}\cdot\cos(t)\right)^2 dt, t_1,t_2\in(0,\infty), n\in\mathbf{Z}. \tag{22}$$

На рис. 2 та 3 подано графіки перерізів ядра $j(t,t)$ (19) за фіксованих значень t і t.



а *б*

Рис. 2. Графіки перерізів ядра $j(t,t)$ за фіксованих значень t: а – $j(1,t)$, б – $j(5,t)$



а *б*

Рис. 3. Графіки перерізів ядра $j\left(t,t\right)$ *за фіксованих значень* t *: а –* $j\left(t,0.1\right)$*, б –* $j\left(t,5\right)$

На рис. 4 подано графік математичного сподівання, а на рис. 5 – графіки перерізів кореляційної функції ЛЦВП (19).

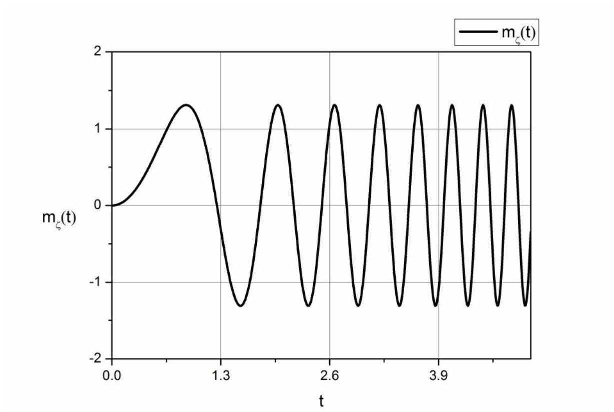
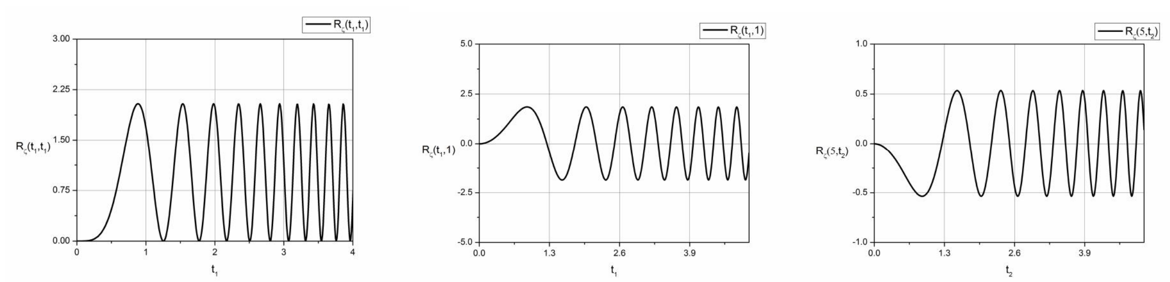


Рис. 4. Графік математичного сподівання лінійного циклічного випадкового процесу



а *б* *в*

Рис. 5. Графіки перерізів кореляційної функції $R_x\left(t_1,t_2\right)$ *лінійного циклічного випадкового процесу:*

а – $R_x\left(t_1,t_1\right)$*; б –* $R_x\left(t_1,1\right)$*; в –* $R_x\left(5,t_2\right)$

Як видно із рис. 4 та 5, відповідні ймовірнісні характеристики ЛВП (19) є циклічними.

Деякі переваги лінійного циклічного випадкового процесу

Наведений у цій роботі ЛЦВП процес порівняно із відомими математичними моделями стохастичних циклічних сигналів та процесів, таких як періодично корельований випадковий процес (циклостаціонарний випадковий процес) [16, 17], періодично розподілений випадковий процес, лінійний періодичний випадковий процес, має ту перевагу, що дає змогу враховувати мінливість ритму досліджуваних та імітованих сигналів.

Порівняно із відомим циклічним випадковим процесом, ЛЦВП має такі переваги щодо моделювання циклічних сигналів та процесів.

1. Вся ймовірнісна структура ЛЦВП повністю визначається детермінованим ядром $j(t,t)$ та характеристиками $L(x,t)$, $m(t)$, $s(t)$ його породжувального процесу $h(w,t), w \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{R}$, які у багатьох прикладних задачах можуть бути параметризовані, що уможливлює компактний, економний опис досліджуваних стохастичних сигналів циклічної структури.

2. На основі ЛЦВП як математичної моделі циклічних стохастичних сигналів та процесів є можливість їх досліджувати у широкому спектрі ймовірнісних характеристик, а саме у межах спектрально-кореляційної теорії випадкових процесів, моментних функцій розподілу вищих порядків, багатовимірних функцій розподілу та характеристичних функцій.

3. ЛЦВП після перетворення лінійною динамічною системою залишається ЛЦВП, у якого характеристики породжувального процесу не змінюються, а змінюється лише ядро. Така властивість дає змогу легко досліджувати перетворення циклічних стохастичних сигналів у лінійних системах, що доволі часто існують у задачах розроблення інфокомунікаційних систем, інформаційно-діагностичних систем, систем біометричної аутентифікації та систем підтримки прийняття управлінських рішень.

4. Внаслідок конструктивності ЛЦВП є можливість відображення механізмів формування досліджуваних сигналів у конструкції ЛЦВП, що дає змогу досліджувати вплив різних параметрів механізму породження процесу на його ймовірнісні характеристики.

5. Конструкція ЛЦВП безпосередньо є придатною для генерування та імітації циклічних стохастичних сигналів та процесів програмно-апратними засобами сучасної техніки, що вказує на значні перспективи його застосування як математичної моделі тестових коливних сигналів у задачах навчання та тестування інформаційних систем підтримки прийняття кардіодіагностичних рішень, інформаційних систем біометричної аутентифікації особи, інформаційних економетричних систем підтримки прийняття управлінських рішень на основі прогнозних даних.

Висновки

1. Означено лінійний циклічний випадковий процес, який поєднує властивості лінійного випадкового процесу та циклічного випадкового процесу, що розширило межі застосування конструктивного підходу до опису циклічних сигналів у рамках теорії лінійних випадкових процесів та узагальнило їх математичну модель у вигляді лінійного періодичного випадкового процесу.

2. Подано умови, які має задовольняти ядро та ймовірнісні характеристики породжувального процесу лінійного випадкового процесу, щоб він був циклічним випадковим процесом.

3. Переваги ЛЦВП вказують на перспективність їх використання як математичних моделей циклічних стохастичних сигналів та процесів у різних галузях науки та техніки, зокрема як математичних моделей широкого класу циклічних сигналів серця, як моделей процесів передавання даних у каналах зв'язку, як моделей циклічних економічних процесів.

4. Лінійний циклічний випадковий процес є адекватним реальним вхідним коливним сигналам сучасних інформаційних діагностичних, аутентифікаційних та прогностичних систем, що дає змогу використовувати його для задач навчання та тестування підсистем таких інформаційних систем.

5. У подальших дослідженнях перспективним є розроблення дискретних аналогів лінійних циклічних випадкових процесів, зокрема означення та дослідження класів циклічних ковзних середніх (MA), авторегресій (AR), авторегресій та ковзних середніх (ARMA), що уможливить створення ефективних моделей та методів аналізу, імітації, прогнозування циклічних процесів із використанням засобів сучасної цифрової техніки.

1. Бойко І. Ф. Оцінювання ймовірнісних характеристик динамічно введеного підпису для завдань аутентифікації особи в інформаційних системах / І. Ф. Бойко, С. А. Лупенко, А. М. Луцків // Електроніка та системи управління / Національний авіаційний університет. – Київ, 2006. – № 4 (10). – С. 15–27. 2. Ефремова Е. В. Передача информации с помощью динамического хаоса.

Генерация и разделение сигналов : автореф. дис. ... к.ф.м.н. : 01.04.03 / Е. В. Ефремова. – М. : ОТКЗ ФТИ, 2006. – 21 с. 3. Овсянников В. А. Методы формирования и цифровой обработки сигналов: Учеб. пособие для студ. спец. "Многоканальные системы телекоммуникаций" и "Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения" всех форм обуч. Ч. 1: Z–преобразование, свертка и генерация дискретных сигналов. / В. А. Овсянников. – Мн. : БГУИР, 2005. – 91 с. 4. Формирование хаотических радиоимпульсов в генераторе с внешним периодическим воздействием / Н. В. Атанов, А. С. Дмитриев, Е. В. Ефремова, Н. А. Максимов // Письма в ЖТФ. – 2006. – Т. 32, вып. 15. – С. 1–6. 5. Blake I. F., Thomas J.B. The Linear Random Process// Proc. of IEEE, 56 (10) (1968). – P. 1696–1703. 6. Bartlett M. S. An introduction to stochastic processes with special reference to methods and applications// Cambridge University Press, 1955. 7. Medvegyev P. Stochastic Integration Theory// New York, Oxford University Press, 2007. 8. Bhansali R.J. Estimation of the impulse response coefficients of a linear process with infinite variance// Journal of Multivariate Analysis, 45 (1993). – P. 274-290. 9. Giraitis L. Central limit theorem for functionals of a linear process// Lithuanian Mathematical Journal, 25 (1985). – P. 25–35. 10. Olanrewaju M. J., Al-Arfaj M. A. Development and application of linear process model in estimation and control of reactive distillation// Computers and Chemical Engineering, 30 (2005) 147–157. 11. Bartlett M. S. Periodogram Analysis and Continuous Spectra// Biometrika, vol. 37 No. 1/2 (Jun., 1950). – P. 1–16. 12. Martchenko B. Concerning on a theorem for periodic in Slutskiy sense linear random processes// International Congress of Mathematicians. – Berlin, 1998. 13. Zvarich V. N., Marchenko B. G., Linear autoregressive processes with periodic structures as models of information signals// Radioelectronics and Communications Systems, 54 (7) (July 2011) 367–372. 14. Pagano M. On periodic and multiple autoregressions// The Annals of Statistics, 6 (1978). – P. 1310–1317. 15. Лупенко С. А. Детерминированные и случайные циклические функции как модели колебательных явлений и сигналов: определение и классификация / С. А. Лупенко // Электронное моделирование / Ин–т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. – Киев, 2006. – Т. 28, № 4. – С. 29–45. 16. Gardner W. A., Napolitano A., Paura L. Cyclostationarity: Half a century of research// Signal Processing, 86 (2006). – P. 639–697. 17. Hurd H. L., Miamee A. G. Periodically Correlated Random Sequences, Spectral Theory and Practice// Wiley. – New York, 2006.