УДК 681.3:519.15

В.В. Різник
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра автоматизованих систем управління

БАГАТОВИМІРНІ МОДЕЛІ СИСТЕМ КОДУВАННЯ НА СИМЕТРИЧНИХ ТА АСИМЕТРИЧНИХ ГРУПАХ

Стаття стосується системотехніки, має своєю метою поліпшення якісних показників інформаційних технологій і систем з багатовимірними характеристиками (наприклад, кодування векторних даних) за надійністю, швидкодією та іншими важливими робочими параметрами системи на основі теорії комбінаторних конфігурацій, а саме принципу оптимальних циклічних пропорцій (ОЦП). Розглянуто деякі проблеми комп’ютерної інженерії та інформаційних технологій, які стосуються використання математичних моделей і методів оптимізації систем на основі багатовимірних комбінаторних конфігурацій, таких як ідеальні кільцеві в’язанки (ІКВ). Властивості згаданих моделей добре узгоджуються з фундаментальними законами співвідношення симетрії та асиметрії. Обговорена комбінаторна модель взаємного доповнення відношень двовимірних однорідних полів та їх багатовимірних перетворень з можливістю відтворення максимального числа комбінаторних варіантів неоднорідних підполів цих полів як гіпотетично єдиного “універсального інформативного поля гармонії” [1]. З цих міркувань дослідження розпочато з унікальних геометричних властивостей обертової симетрії як доповнювання асиметричних комбінаторних структур та багатоманітних їхніх ансамблів. Показано можливість застосування нового класу просторових груп із застосуванням багатовимірних симетричних і несиметричних комбінаторних конфігурацій для кодування векторних даних з мінімальним числом вагових розрядів. Розглянуто взаємозв’язок симетричних і асиметричних груп з алгебричними структурами полів Ґалуа.

Ключові слова: інформаційна технологія, математична модель, система, комбінаторна конфігурація, оптимізація, структура, співвідношення симетрії та асиметрії, група, поле Ґалуа, кодування векторних даних.

This paper belongs to the field of systems engineering and is aimed at improving the qualitative indices of information technologies or systems with multidimensional characteristics (e.g. vector data coding design) with respect to reliability, precision and other significant operating characteristics of the systems based on the combinatorial configurations theory, namely the principle of optimal cyclic proportions (OCP). Some problems of computer engineering and information technologies which deal with profitable use of mathematical models and methods for optimization of systems based on the multidimensional combinatorial configurations such as Ideal Ring Bundles (IRB)s are regarded. Properties of the mentioned models correlate favorably with fundamental laws of symmetry and asymmetry interrelation. Special attention is paid to geometric interpretation of symmetric groups and its asymmetric subgroups interrelations. The combinatorial model of the complementary relations of 2D uniform fields and its multidimensional transformations with an ability to reproduce the maximum number of combinatorial varieties of complementary non-uniform subfields of the fields as the hypothetically unified “universal informative field of harmony”[1] is discussed. In view of this, the study was started from the remarkable properties of geometric circular symmetry as the complementary combinatorial asymmetrical structures and multivariable of its ensembles. The possibility for application of a new class of spatial groups using multidimensional symmetrical and non-symmetrical combinatorial configurations or vector data coding with minimal number of the weight digits is shown. Mutual connection of the symmetrical and asymmetrical groups with algebraic structures in Galois fields is regarded.

Key words: information technology, mathematical model, system, combinatorial configuration, optimization, structure, symmetry and asymmetry interrelation, group, Galois field, vector data coding.

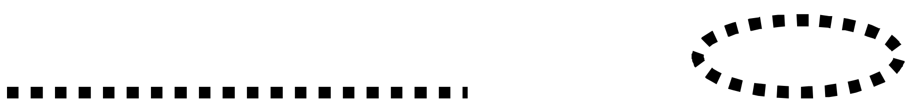
Вступ

Аналіз розвитку сучасної математики як науки про структури засвідчує, що основною проблемою сьогодні продовжує залишатися визначення стосунку математики до реального світу. Проблема полягає у відношенні науки про структури до науки про природу. Прихильники визначення математики як науки про математичні структури покликаються на концептуальну позицію Бурбакі [2]. Група авторів всесвітньо відомої математичної школи в нарисах про історію математики писали: “У своїй аксіоматичній формі математика представляється накопиченням абстрактних форм – математичних структур і виявляється (хоча й невідомо чому), що деякі аспекти експериментальної дійсності ніби то в результаті завчасного визначення вкладаються в деякі з цих форм” [3]. У цій фразі проглядається думка про самостійне існування математичних об’єктів, які начебто завчасу наділені власним інтелектуальним потенціялом, вищим від інтелекту тих, хто відкриває їхні “чарівні” властивості у реальних речах. Відомо, що елементарні частинки можна порівняти з з правильними об’ємними тілами як прообрази матерії. Наприклад, нуклеїнова кислота – ідея живої істоти, за кодованими первообразами якої визначаються всі події в природі як організатора централізованого порядку, коли навіть випадковість певним чином співвідноситься з цим порядком. З літературних джерел, присвячених дослідженню вищезгаданої проблеми, виникло твердження про те, що поділ структури мікрооб’єктів на дві взаємно виключні частини не є протилежностями, а знаходяться в стосунку взаємного доповнення, що було покладено в основу квантової теорії [4]. Йдеться про інформаційну природу законів гармонії, що поєднують математику з матеріальним світом.

Зв’язок обертової симетрії з асиметрією

Симетрія в широкому розумінні – це впорядкованість, довершеність, гармонія, ритмічність, що є протилежним хаосу. Сучасне означення симетрії передбачає незмінність певних характеристик об’єкта щодо будь-яких перетворень, які виконуються над ним у просторі-часі. Сьогодні – це одне з фундаментальних понять науки, покладене в основу дослідження найрізноманітніших явищ природи та законів світобудови, тому явище симетрії заслуговує на глибше розуміння її ролі в структуризації реального багатовимірного світу. Зручним засобом пізнання цих законів є дослідження явища симетрії за допомогою математичних співвідношень.

Розглянемо два різновиди симетричних фігур: з ланцюжковою (а) та кільцевою (б) структурами (рис.1), кожна з яких обіймає однакову кількість n рівновіддалених між собою частинок. Знайдемо кількість способів розбиття кожної з цих послідовностей на дві підмножини так, щоб усі частинки в кожній з підмножин залишалися зв’язаними. Назвемо ці дії “принципом збереження зв’язності”.



а б

Рис.1. Симетричні фігури з ланцюговою (а) та кільцевою (б) структурами

За умовою постановки задачі ланцюг з n частинок не дозволяється розривати більш, ніж в одному з n -1 наявних зв’язків, тому кількість способів $C_л$ розбиття вичерпується числом:

$$C_л = (n - 1). \qquad (1)$$

У кільцевій структурі з n частинками можна розривати будь-яку пару зв’язків між ними, не порушуючи умови задачі, тому кількість способів такого розбиття вичерпується числом невпорядкованих комбінацій “2 із n”:

$$C_к = n\,(n - 1)/2. \qquad (2)$$

Отже, система з кільцевою структурою, на відміну від ланцюгової, забезпечує можливість реалізації в $n/2$ раз більшої кількості способів декомпозиції її на підмножини без порушення зв'язків всередині обох підмножин, а отже, без додаткових дій та енергетичних втрат всередині системи, де число $C_к$ збігається з кількістю очікуваних симетричних відстаней між цими частинками, положення кожної з яких описується координатами в t-вимірному просторі.

Численні проблеми системотехніки, інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії вимагають застосування математичних моделей систем з використанням сучасних методів дослідження геометричних властивостей природних об'єктів, які відображають закони розвитку природи. Належної уваги заслуговує дослідження законів взаємозв'язку просторової симетрії та асиметрії.

Дослідження метричних властивостей простору як "лона" розвитку природи зручно розпочати з поняття поворотної симетрії як джерела інформації про геометричні та фізичні закони розбудови всесвіту, намагаючись не створювати додаткових труднощів під час висвітлення ідей і фактів, а доносити їх у такому вигляді, щоб не допускати різних тлумачень.

Для початку розглянемо симетричне розбиття двовимірного простору в площині рисунка променями A, B, C на три суміжні сектори відносно центральної точки O (рис. 2, *а,б*).

Якщо точка O є центром поворотної симетрії фігури третього (S=3) порядку, яка лежить у площині деякої одновимірної сфери, що збігається з центром її симетрії, тоді схематичне "розрізання" цієї сфери на три однакові частини (сектори) за циклічним співвідношенням, що визначається розмірами центральних кутів (секторів як частин) стосовно загальної їх суми (усієї сфери як цілого). Здійснюючи відлік кутів за годинниковою стрілкою, в даному випадку $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$, легко побачити, що розбиття двовимірного простору відповідає циклічному співвідношенню чисел 1:1:1, де 1 і 2 – це відображення множини чисел натурального ряду на множину кутів $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^o$, $\angle AOB + \angle BOC = \angle BOC + \angle COA = \angle COA + + \angle AOB = 240^o$ відповідно, де сума усіх чисел цього співвідношення визначає порядок S =3 поворотної симетрії.

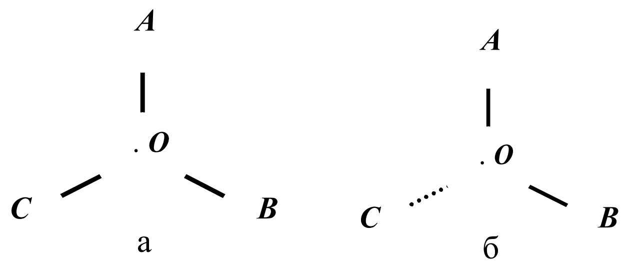


Рис.2. Симетричне розбиття двовимірного простору відносно центральної точки O зі стабільною (а) і нестабільною (б) поворотною симетрією третього (S=3) порядку.

Схеми (рис.2) складаються із закономірно розташованих однакових частин двовимірного простору, які можуть суміщатися одна з одною під час повороту на деякий кут навколо центральної точки O симетрії. На рис. 2, *а* подано варіант розбиття, який перетворюється на себе при поворотах на кути, кратні $2\frac{p}{S}$, де S =3, а на рис.2,в – на кути, кратні $2\frac{p}{S}$, де S=1. Схеми мають вигляд фігур з поворотною симетрією порядку S, де кожен напрям розрізання простору повертається на один і той самий кут $\alpha=2\frac{p}{S}$ в одному й тому самому напрямі (за годинниковою стрілкою або проти). Оскільки композиція поворотів суміжних променів є також поворот навколо тієї самої точки симетрії на кут, рівний сумі кутів, кратних $2\frac{p}{S}$, і для кожного повороту існує обернений до нього поворот, причому серед множини поворотів існує одиничний (нульовий) поворот, то множина усіх поворотів схеми розбиття простору навколо спільного центру *O* становить комутативну адитивну групу порядку *S*. За рис. 2 можна визначити поворотну симетричну групу у вигляді трьох (*S* =3) симетричних променів, яка обіймає дві комплементарні асиметричні підгрупи - відповідно з одного і двох обертових променів.

Розглянемо поворотну симетрію *S*-го порядку як деяку надмірну систему з кільцевою структурою, яка складається з *S* впорядкованих за кільцевою схемою елементів. З погляду системного аналізу надмірність системи – це перевищення обсягу сигналів або міри складності структур системи порівняно з їхніми мінімальними значеннями, необхідними для того, щоб виконати поставлене завдання. Проблема загального плану полягає в подоланні інформаційної, структурної та алгоритмічної надмірностей систем [5, 6].

Вищезгадану перевагу систем з кільцевою структурою доцільно розглядати як гармонійну єдність інтелектуально організованої системи сумірних частин, кратних числам натурального ряду.

На рис. 3 зображена схема розрізання двовимірного простору відносно точки *O* на дві різні частини (сектори), кутові розміри яких співвідносяться як числа натурального ряду згідно впорядкованій циклічній пропорції (1 : 2).

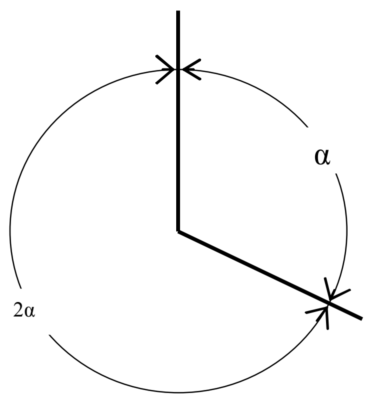


Рис.3. Схема розрізання двовимірного простору на два сектори відносно центральної точки O, величини яких співвідносяться як 1 до 2

Відлік кутових відстаней можна продовжувати далі, здійснюючи більше одного повного оберту навколо точки *O*, обираючи початок і напрям відліку від однієї зі сторін центрального кута. Так, протягом першого повного оберту за годинниковою стрілкою схема відтворює кути α, 2α, 3α=α+2α; а далі: 4α=α+2α+α, 5α=2α+α+2α, 6α=2α+α+2α+α …і т.д. Схема (рис.3) ілюструє один зі способів гармонійного розбиття простору на сумірні частини, кратні числам натурального ряду, який можна нарощувати нескінченно довго простим збільшенням числа обертів відносно обраної точки відліку.

Властивості описаної схеми притаманні системним об'єктам, інформаційна надмірність яких зведена до теоретичного мінімуму, оскільки взаємне розміщення елементів цієї схеми (у даному випадку кутів різної величини) дає змогу реалізувати множину чисел натурального ряду {1,2}.

Таким чином за наявності безсумнівних переваг, притаманних природним чи технічним системам з центральносиметричною розбудовою, внесення асиметрії у її структуру може надавати системі додаткових корисних властивостей, пов'язаних зі зменшенням надмірності, таких як підвищення надійності, роздільної здатності, розширення функціональних можливостей.

Оптимальні структурні пропорції в симетричних полях

Оптимальні циклічні пропорції (ОЦП) – це замкнена послідовність цілих додатних чисел, яка розглядається як впорядковане співвідношення впорядкованих частин цілого. У найпростішому випадку така конфігурація утворюється на n- послідовності чисел (k_1, k_2,..., k_i,..., k_n), де число k_n знаходиться поруч k_1, утворюючи замкнену схему, причому усі ці числа та усі суми з двох, трьох і т.д. поруч розміщених чисел перелічують натуральний ряд від 1 до S – 1 рівно R раз, де S – сума усіх чисел цієї послідовності. Параметри ОЦП взаємопов'язані залежністю:

$$S = \frac{n^2 - n}{R} + 1. \tag{3}$$

Прикладом ОЦП з чотирма (n=4) елементами при R=1 є впорядкована послідовність цілих чисел (k_1=1, k_2=2, k_3=6, k_4=4). Така числова конструкція утворює ряд різноманітних варіантів впорядкованих пропорцій, починаючи від 1: (2+6+4), 2: (6+4+1), (1+2):(6+4), …і т.д. Дослідження властивостей ОЦП можна здійснити за допомогою аппарату теорії скінченних полів [7].

Для побудови ОЦП з параметрами $S_n= v$, $n=k$, $R= l$, де S_n – сума числових елементів, n- кількість елементів, R – число кільцевих сум з однаковими числовими сумами, необхідно знайти деякий незвідний над полем $GF(p^s)$ поліном, визначити первісний елемент x цього поля з максимально можливим періодом згаданого елемента та обчислити степені x^0, x^1,..., x^z, ($z=q^{\,s-2}$), які повинні набувати усі значення ненульових елементів $GF(p^s)$. Далі слід дослідити побудовану алгебричну структуру з метою визначення числових значень елементів ОЦП. Наприклад, первісні поліноми $f_1(x)=x^2-2$ і $f_2(x)=x^2+x+1$ відповідають одному з варіантів ОЦП із фіксованими параметрами, тоді як для решти варіантів доводиться добирати інші поліноми. Проблема ускладнюється наявністю неізоморфних варіантів, які не завжди вдається знайти методами алгебричних перетворень.

Графічне відображення ОЦП в симетричній структурі поля Ґалуа

Для дослідження комбінаторних властивостей розширених полів Ґалуа за допомогою ОЦП доцільно використати графічні зображення останніх .

Розглянемо зображення ОЦП з параметрами $n = 4, R = 1, S_n = 13$. У даному випадку первісний елемент x поля $GF(3^2)$ задовольняє рівняння $f(x) = x^3 - x - 1$, де $f(x)$ – незвідний поліном над полем $GF(3^2)$, $p = 3$, $s = 2$. Елементи цього поля зведено в табл.1.

Таблиця 1

Елементи поля $GF(3^2)$, утворені за незвідним поліномом $f(x) = x^3 - x - 1$

$x^1 = x$	$x^8 = 2x^2 + 2$
$x^2 = x^2$	$x^9 = x + 2$
$x^3 = x + 1$	$x^{10} = x^2 + 2x$
$x^4 = x^2 + x$	$x^{11} = 2x^2 + x + 1$
$x^5 = x^2 + x + 1$	$x^{12} = x^2 + 2$
$x^6 = x^2 + 2x + 1$	$x^{13} = 1$
$x^7 = 2x^2 + 2x + 1$	

На симетричному нуль-графі (рис.4) вершинам x^1, x^3, x^9, x^{13} відповідають однакові нульові коефіцієнти при степенях x^2, а вписаний в цей граф асиметричний чотирикутник відображає ІКВ з параметрами S=13, n=4, R=1 в полі $GF(3^2)$.

На рис. 4 можна бачити зображення ОЦП у вигляді чотирикутника (n = 4), сусідні вершини якого рознесено асиметрично на відстані, що утворюють послідовність (1,2,6,4) у симетричному полі графу з S_n =13 вершинами.

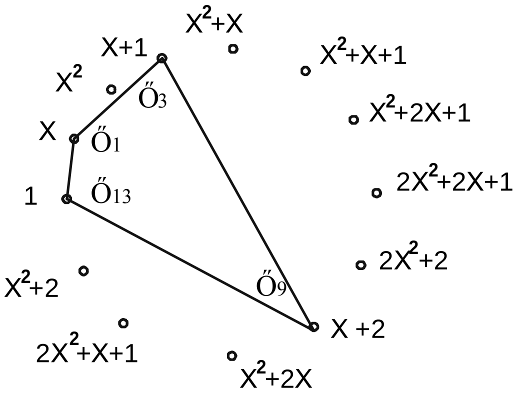


Рис. 4. Графічне відображення ОЦП з параметрами
S =13, n = 4, R =1, утворена поліномом $f(x)= x^3- x- 1$

Системи оптимального кодування векторних даних

Назвемо кільцевою вектор-сумою суму будь-якої кількості (від 1 до n-1) послідовно розміщених t- вимірних векторів кільцевої n-послідовності. Кільцева n-послідовність упорядкованих t- вимірних векторів, на якій множина кільцевих вектор-сум вичерпує множину значень усіх координат t- вимірної решітки фіксоване число разів, будемо називати t- вимірною ідеальною кільцевою в'язанкою (t- ІКВ). Результати теоретичних та експериментальних дослідження показують, що існує як завгодно багато t - вимірних ІКВ, й відповідно t- вимірних оптимальних циклічних пропорцій. Можна впевнено говорити про існування численних ансамблів таких співвідношень. Зростання кількості векторів у структурі ОЦП супроводжується збільшенням потужності множини ОЦП.

Побудову систем оптимального кодування векторних даних на основі використання комбінаторних властивостей t - вимірних оптимальних циклічних пропорцій слід розпочати з обрання параметрів векторного коду, які пов'язані з параметрами оптимальних циклічних пропорцій згідно із залежністю (3) та обчислення усіх твірних t- кортежів обраної системи кодування. Оптимальність такого кодування полягає в забезпеченні взаємно однозначної відповідності між множиною усіх дозволених кодових комбінацій та множиною усіх координат правильної t – вимірної матриці, що досягається добором відповідних числових значень твірних t- кортежів. Наприклад, для побудови оптимальної системи кодування множини векторів на 3-вимірному торі такої системи є послідовність 3-кортежів ((k_{11}, k_{21}, k_{31}), (k_{12}, k_{22} , k_{32}), ... , (k_{1i}, k_{2i}, k_{3i}), ... , (k_{1n}, k_{2n}, k_{3n})), де n – кількість твірних 3-кортежів.

Нехай (k_{11}, k_{21}, k_{31}) = (0,1,0), (k_{12}, k_{22}, k_{32}) = (0,2,3), (k_{13}, k_{23}, k_{33}) = (1,1,2), (k_{14}, k_{24}, k_{34}) = (0,2,2), (k_{15}, k_{25}, k_{35}) = (1,0,3), (k_{16}, k_{26}, k_{36}) = (1,1,1). Тоді модель системи оптимального 3D кодування векторних даних з розмірами решітки 2×3×5 елементами набуває такого вигляду: ((0,1,0), (0,2,3), (1,1,2), (0,2,2), (1,0,3), (1,1,1)).

Розглянемо один з варіантів системи кодування, яка грунтується на кільцевій послідовності векторів ((0,1,0), (0,2,3), (1,1,2), (0,2,2), (1,0,3), (1,1,1)), де одна з координат 3D- вектора набуває значень цілих чисел {0,1}, друга – {0,1,2}, третя – {0,1,2,3,4}. В обчисленнях слід враховувати значення модулів m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = 5.

Систему кодування 3D–векторів на базі ОЦП ((0,1,0): (0,2,3): (1,1,2): (0,2,2): (1,0,3): (1,1,1)) приведено в табл.2, з якої випливає, що кільцева послідовність ((0,1,0), (0,2,3), (1,1,2), (0,2,2), (1,0,3), (1,1,1)) утворює кодову матрицю з розмірами 2×3×5. У таблиці розміщено усі дозволені кодові комбінації системи оптимального кодування 3D- векторів, числові значення яких вичерпують значення координат 3-вимірного тору. Описана система кодування 3D- векторів є оптимальним монолітним кодом. Під монолітним слід розуміти код, дозволені комбінації якого утворюються на послідовностях з блоків одноймених інформаційних символів, де поява будь-якої кількості різнойменних символів серед одноймених є ознакою помилки, що дозволяє спростити здійснення перевірку правильності закодованих даних. Це забезпечує високу швидкодію щодо виявлення і виправлення помилок, збільшуючи інформаційну надійність систем кодування та пересилання векторних даних каналами зв'язку.

Таблиця 2

Система кодування 3D-векторів на базі ОЦП (0,1,0): (0,2,3): (1,1,2): (0,2,2): (1,0,3): (1,1,1)

Вектор	Кодова комбінація					
(0,0,0)	1	1	1	1	1	0
(0,0,1)	0	0	0	1	1	1
(0,0,2)	0	0	1	1	1	0
(0,0,3)	1	1	0	0	0	0
(0,0,4)	1	1	0	1	1	1
(0,1,0)	1	0	0	0	0	0
(0,1,1)	1	1	0	0	1	1
(0,1,2)	0	0	1	1	1	1
(0,1,3)	1	1	1	1	0	1
(0,1,4)	0	0	0	0	1	1
(0,2,0)	0	1	1	1	1	0
(0,2,1)	1	1	1	0	0	1
(0,2,2)	0	0	0	1	0	0
(0,2,3)	0	1	0	0	0	0
(0,2,4)	1	0	0	0	1	1

Вектор	Кодова комбінація					
(1,0,0)	0	1	1	0	0	0
(1,0,1)	0	1	1	1	1	1
(1,0,2)	1	1	1	1	0	0
(1,0,3)	0	0	0	0	1	0
(1,0,4)	0	0	1	1	0	0
(1,1,0)	1	1	1	0	0	0
(1,1,1)	0	0	0	0	0	1
(1,1,2)	0	0	1	0	0	0
(1,1,3)	0	0	1	1	1	1
(1,1,4)	1	1	0	0	0	1
(1,2,0)	0	0	0	1	1	0
(1,2,1)	1	0	0	0	0	1
(1,2,2)	0	1	1	1	0	0
(1,2,3)	1	0	1	1	1	1
(1,2,4)	1	1	1	0	1	1

Дослідження, пов'язані з проблемою існування, переліку та синтезу багатовимірних систем перетворення форми сигналів в оптимальний монолітний код, передбачають розроблення апаратно-програмних засобів та систем з розширеними функціональними можливостями, що базуються на векторних інформаційних технологіях, проектування ефективних систем перетворення форми інформації, створення спеціалізованих процесорів на векторній комп'ютерній арифметиці.

Отримані результати передбачають розширення сфери досліджень в тих галузях науки і техніки, де впроваджуються загальносистемні принципи оптимізації інформаційних технологій, що базуються на використанні теорії комбінаторних конфігурацій [7] і теорії циклічних груп [8].

Висновки

Принцип оптимальних циклічних пропорцій (ОЦП) поклдадено в основу побудови прикладних математичних моделей систем у вигляді векторних оптимальних циклічних пропорцій, які віддзеркалюють комбінаторні властивості гармонійного співвідношення симетрії та асиметрії. Ці властивості дозволяють використати взаємозв'язок обертової симетрії та асиметрії для здійснення фундаментальних та прикладних досліджень в інформаційних технологіях та інших галузях науки і техніки. Закодована в обертовій симетрії інформація про існування численних ансамблів ідеальних кільцевих в'язанок (ІКВ) й відповідних оптимальних циклічних пропорцій (ОЦП) відкриває новий перспективний напрям вдосконалення векторних систем кодування та інформаційних технологій, що дозволяє поліпшити якісні характеристики комунікаційних систем та мереж за такими показниками, як інформаційна надмірність, надійність та роздільна здатність. Актуальним завданням постає використання взаємозв'язку симетричних і асиметричних груп з алгебричними структурами полів Ґалуа для кодування векторних даних з мінімальним числом вагових розрядів за фіксованої довжини кодових комбінацій. Природним напрямком продовження досліджень є опрацювання багатовимірних (векторних) оптимальних систем перетворення форми інформації з використанням монолітно-блочного коду для створення високонадійних інформаційних технологій і комп'ютерних систем, призначених для роботи з багатовимірними масивами даних.

1. Вигнер Е. Этюды о симметрии / Е. Вигнер; [пер. с англ. Ю.А.Данилова]. – М.: Мир, 1971. – 320 с. – (Редакция литературы по физике). 2. Калужнін Л.А. Алгебричні структури / Л.А. Калужнін. – К.: Енциклопедія кібернетики. Том 1, 1973. – 584 с. – (Головна редакція УРЕ; т.1). 3. Гнеденко Б.В. Математика и научное познание / Б.В. Гнеденко. – М.: Знание, 1983. – 64 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Серия "Математика, кибернетика"; № 7). 4. Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое / Вернер Гейзенберг; [пер. с нем. А.В. Ахутин]. – М.: Наука., 1989. – 400 с. м (Жанр: Философия науки). 5. Железнов М.А. Надмірність системи / М.А. Железнов. – К.: Енциклопедія кібернетики. Т. 2, 1973. – 576 с. – (Головна редакція УРЕ; т.2). 6. Бандирська О.В. Досконалі системи мір як свідчення предвічної гармонії Всесвіту / О.В. Бандирська. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 284 с. – (Світоглядні читання до 200-річчя Ч. Дарвіна) (Зб.наук.праць та матеріалів Міжнародної науково-практичної конференції "Світоглядний вибір і майбутнє науки та освіти в XXI столітті"). 7. Холл М. Комбинаторика / М. Холл; [пер. с англ. С.А. Широкова]. – М.: Мир, 1970. – 424 с. – (Редакция литературы по математическим наукам). 8. Гроссман И. Группы и их графы / И. Гроссман, В. Магнус; пер. с англ. Г.М. Цукерман. – М.: Мир, 1971. – 248 с. – (Редакция литературы по математическим наукам).