УДК 004.9+621.313

С. М. Костючко[1], В. Й. Чабан[2]
Національний університет “Львівська політехніка”,
[1]кафедра електронних обчислювальних машин,
[2]кафедра теоретичної та загальної електротехніки

МЕТОД ДОПОМІЖНОЇ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ЧУТЛИВОСТІ ВИКОНАВЧИХ ОБ’ЄКТІВ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

© Костючко С. М., Чабан В. Й., 2014

Запропоновано спільний алгоритм розрахунку перехідної й усталеної параметричної чутливості виконавчого об’єкта комп’ютерної системи керування на прикладі виконавчого трифазного асинхронного мотора. Диференціальні рівняння об’єкта записано в нормальній формі Коші. Метод аналізу будується на підставі рівнянь першої варіації. Подаються результати симуляції.

Ключові слова: виконавчий асинхронний мотор, перехідна й усталена параметрична чутливості.

The common algorithm of calculation of transitional and steady-state parametric sensitivities of actuating object of computer control system on example of actuating induction motor is offered. The differential equations are presented in the normalized Cauchy’s form. The method of analysis is built on the basis of equations of the first variation. The results of computation are given.

Key words: actuating induction motor, transitional and steady-state parametric sensitivities.

Вступ

Розрахунок параметричної чутливості виконавчих об’єктів – завершальний етап задачі аналізу, який прокладає міст у задачу синтезу. Цьому етапу передують етапи розрахунку перехідних і усталених процесів. Інтерес до цієї задачі особливо великий [1–20] у зв’язку зі стрімким розвитком методів комп’ютерного проектування. Для розв’язання повної задачі аналізу пропонуємо спільний алгоритм, що спирається на загальну теорію нелінійних диференціальних рівнянь. Розв’язується двоточкова крайова задача для звичайних диференціальних рівнянь фізичного стану об’єкта.

Для розв’язання поставленої задачі необхідно спершу вирішити проблему побудови варіаційних рівнянь для обчислення матриці Якобі в ітераційній формулі Ньютона на етапі розв’язання двоточкової крайової задачі як у полі змінних, так і в полі їхніх параметричних чутливостей [21]. Це дало змогу побудувати матрицю монодромії, а на її підставі просимулювати перехідний і усталений процеси, а водночас й усталену параметричну чутливість.

Математична модель

Для прикладу скористаємося найуживанішим на практиці виконавчим об’єктом систем амплітудно-фазового керування асинхронним приводом. Рівняння електромаґнетного стану об’єкта запишемо у нормальній формі Коші [21]

$$\frac{di}{dt} = A(u - \Omega'\Psi - Ri), \tag{1}$$

де $i, u, \Psi(i)$ – колонки струмів, напруг і повних потокозчеплень; $A(i)$ – матриця диференціальних маґнетних опорів; Ω – матриця частоти обертання ротора; R – матриця резистивних опорів. Матриця $A(i)$ і колонка $\Psi(i)$ – достатньо складні функції аргументу, але алгоритми їх обчислення є відомі, наприклад [21].

Елементи колонки напруг мають вигляд

$$u_S = (U_m \sin(\omega_0 t), U_m \sin(\omega_0 t - 120^0))_t; \quad u_R = 0, \tag{2}$$

де U_m, ω_0 – амплітуда й кругова частота напруги мережі. У системі керування обидві ці величини зазвичай регулюються комп'ютерною програмою залежно від призначення системи.

Рівняння механічного стану має вигляд

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p_0}{J}(M_E - M(t)), \;\; M_E = \sqrt{3} p_0 (\Psi_{SA} i_{SB} - \Psi_{SB} i_{SA}), \tag{3}$$

де $M(t)$ – механічний момент; p_0 – кількість пар маґнетних полюсів; J – момент інерції ротора; M_E – електромаґнетний момент, причому $\Psi_{SA}, \Psi_{SB}, i_{SA}, i_{SB}$ – повні потокозчеплення і струми фаз A, B обмотки статора, як елементи колонок Ψ, i.

Система диференціальних рівнянь (1), (3) – математична модель виконавчого об'єкта системи, призначена для аналізу перехідних і усталених процесів. Для практичного користування нею необхідно знати такі вхідні дані: опори й обернені індуктивності дисипації обмоток статора й ротора; характеристику неробочого стану, кількість пар маґнетних полюсів і момент інерції ротора. Вхідними сигналами є: фазні напруги живлення (2) і механічний момент на валу $M(t)$.

Розв'язання задачі Коші

Систему звичайних диференціальних рівнянь (1), (3) запишемо в загальному вигляді

$$dx/dt = f_1(x, \lambda, t), \quad x = (i, \omega)_t, \tag{4}$$

де $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ – колонка постійних параметрів. Елементи колонки λ – будь-які постійні параметри, які, своєю чергою, можуть бути функціями інших конструкційних постійних параметрів.

Інтегрування диференціальних рівнянь (4) за заданих початкових умов $x(t)_{|t=+0} = x(0)$ становить задачу Коші для заданої системи диференціальних рівнянь, яка презентує задачу розрахунку перехідних електромеханічних процесів мотора. Щоб розв'язати двоточкову крайову задачу, необхідно знайти спершу матрицю монодромії.

Матриця монодромії

Скористаємося колонкою невідомих x (4), але для побудови допоміжної моделі чутливості утворимо колонку невідомих y

$$y = (\Psi, \omega)_t. \tag{5}$$

Відповідне (5) диференціальне рівняння (1) має вигляд

$$\frac{d\Psi}{dt} = u - \Omega' \Psi - Ri, \tag{6}$$

Матрицю монодромії запишемо у вигляді [21]

$$\Phi = (\mathrm{A}z, w)_t; \quad z = \frac{\partial \Psi}{\partial x(0)}; \quad w = \frac{\partial \omega}{\partial x(0)}. \tag{7}$$

Варіаційні рівняння для обчислення субматриць (7) одержуємо диференціюванням за $x(0)$ рівнянь електромеханічного стану (3), (6)

$$\begin{gathered} \frac{dz}{dt} = -(\Omega' + R\mathrm{A})z - \frac{\partial \Omega'}{\partial \omega} w \Psi; \\ \frac{dw}{dt} = \frac{p_0}{J}\left(\sqrt{3} p_0 \left(\frac{\partial \Psi_{SA}}{\partial x(0)} i_{SB} + \Psi_{SA} \frac{\partial i_{SB}}{\partial x(0)} - \frac{\partial \Psi_{SB}}{\partial x(0)} i_{SA} - \Psi_{SB} \frac{\partial i_{SA}}{\partial x(0)}\right) - \frac{\partial M(\omega)}{\partial \omega} w\right). \end{gathered} \tag{8}$$

Похідні $\partial \Psi_{SA}/\partial x(0), \partial \Psi_{SB}/\partial x(0), \partial i_{SA}/\partial x(0), \partial i_{SB}/\partial x(0)$ є елементами матриць z, Az, тому вони відомі.

Розв'язання двоточкової крайової задачі

Початкові умови $x(0)$, які виключають перехідну реакцію, розглядатимемо як аргумент рівняння періодичності з періодом T

$$f\left(x(0)\right)=x(0)-x\left(x(0),T\right)=0. \tag{9}$$

Рівняння (9) розв'яжемо ітераційним методом Ньютона

$$x(0)^{(s+1)}=x(0)^{(s)}-f'\left(x(0)^{(s)}\right)^{-1}f\left(x(0)^{(s)}\right). \tag{10}$$

Матрицю Якобі отримуємо диференціюванням за $x(0)$ цільової функції (9)

$$f'\left(x(0)\right)=1-\Phi(T);\quad \Phi(T)=\left.\frac{\partial x\left(x(0),t\right)}{\partial x(0)}\right|_{t=T}. \tag{11}$$

Матриця $\Phi(T)$ і є шуканою матрицею монодромії (7) у момент часу $t=T$. Її мультиплікатори дають повну відповідь про статичну стійкість знайденого періодичного стану.

На *s*-й ітерації формули (10) лінійні варіаційні рівняння (8) підлягають сумісному інтегруванню з нелінійними (1), (3) на часовому інтервалі $[0,T]$. Процес ітерації закінчується, коли досягається задана точність входження у періодичний розв'язок.

Матриця монодромії Φ (7) – матриця чутливостей до початкових умов. Кожний її рядок – градієнт певної змінної у просторі початкових умов, а кожен її стовпчик характеризує чутливість усієї множини змінних до тієї самої початкової умови.

Модель параметричної чутливості

Задачу розрахунку параметричної чутливості найпростіше розв'язувати варіаційними методами як простий додаток до алгоритму прискореного пошуку періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь на підставі ньютонівських ітерацій (10).

Обчислення параметричної чутливості за постійними параметрами колонки λ (4) здійснюється так само, але похідні за λ треба брати за правилами диференціювання складних функцій. Матриця параметричних чутливостей визначається як похідна

$$S=\frac{\partial x}{\partial \lambda}. \tag{12}$$

Диференціюючи (4) за λ, отримаємо лінійне параметричне рівняння

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial f_1(x,\lambda,t)}{\partial x}S+\frac{\partial f_1(x,\lambda,t)}{\partial \lambda}. \tag{13}$$

В усталеному стані $x(0)=x(T)$, тому рівняння (13) має теж $S(t)$ періодичний розв'язок.

Взяття частинних похідних по x і λ у правій частині (1), (13) – досить складна задача, а то й нездійсненна, тому вводимо *матрицю допоміжних параметричних чутливостей* χ щодо деякого іншого вектора y (5):

$$\chi=\frac{dy}{d\lambda}. \tag{14}$$

Рівняння стану досліджуваного об'єкта стосовно вектора y запишемо також у загальному вигляді:

$$dy/dt=f_2(y,\lambda,t), \tag{15}$$

f_2 – *T*-періодична по *t*.

Диференціюючи (15) по λ та враховуючи (13), (14), отримаємо

$$\frac{d\chi}{dt}=\frac{\partial f_2(y,\lambda,t)}{\partial y}\chi+\frac{\partial f_2(y,\lambda,t)}{\partial \lambda}. \tag{16}$$

Рівняння (14) теж має періодичний розв'язок $\chi(t)$. Функція $\chi(t)$, крім виконуваної допоміжної ролі, нерідко становить самостійний інтерес.

Матриця параметричних чутливостей S у нашому випадку повторює (7)

$$S=(\mathrm{A}\chi,\eta)_t;\quad S=\frac{\partial(i,\omega)_t}{\partial\lambda};\quad \chi=\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda};\quad \eta=\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}. \qquad (17)$$

Надамо рівнянню (6) вигляду (15)

$$\frac{d\Psi}{dt}=u-\Omega'\Psi-RL^{-1}\Psi, \qquad (18)$$

де L^{-1} – обернена матриця статичних індуктивностей [21] об'єкта.

Щоб одержати рівняння (16), достатньо згідно з (17) продиференціювати за λ (18)

$$\frac{d\chi}{dt}=-(\Omega+R\mathrm{A})\chi+F;\quad F=\frac{\partial U}{\partial\lambda}+RL^{-1}\frac{\partial L}{\partial\lambda}I-\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\Psi-\frac{\partial R}{\partial\lambda}I. \qquad (19)$$

де L – матриця статичних індуктивностей [21] об'єкта.

Диференціюючи за λ (3), одержуємо

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{p_0}{J}\left(\frac{\partial M_E}{\partial\lambda}-\frac{\partial M(\omega)}{\partial\omega}\eta\right)+p_0\left(M_E-M(\omega)\right)\frac{\partial(1/J)}{\partial\lambda}, \qquad (20)$$

де

$$\frac{\partial M_E}{\partial\lambda}=\sqrt{3}p_0(\chi_{SA}i_{SB}+\Psi_{SA}S_{SB}-\chi_{SB}i_{SA}-\Psi_{SB}S_{SA}) \qquad (21)$$

Матрицю параметричної чутливості (17) розділимо на стовпчики і запишемо як рядок

$$S=\left(S_1,S_2,\ldots,S_n\right);\quad S_i=d(i,\omega)_t/\partial\lambda_i,\ i=1,2,\ldots,n \qquad (22)$$

– вектори параметричних чутливостей елементів вектора x до окремих сталих параметрів.

Умову періодичності S запишемо аналогічно до (9)

$$F\left(S_i\left(0\right)\right)=S_i\left(0\right)-S_i\left(S_i\left(0\right),T\right)=0,\ i=1,2,\ldots,n. \qquad (23)$$

Рівняння (23) розв'язуємо також ітераційним методом Ньютона, але оскільки (19), (20) є лінійними рівняннями, то розв'язок отримуємо за одну ітерацію за нульового наближення

$$S_i\left(0\right)^{(1)}=F'\left(S_i\left(0\right)^{(0)}\right)^{-1}S_i\left(T\right)^{(0)},\ i=1,\ldots,n. \qquad (24)$$

Матриця Якобі виражається через відому матрицю $\Phi(T)$ (7), одержану з розрахунку періодичного розв'язку $x(t)=x(t+T)$:

$$F'\left(S_i\left(0\right)^{(0)}\right)=E-\Phi\left(T\right). \qquad (25)$$

На єдиній ітерації формули (24) сумісному інтегруванню на інтервалі $\left[0,T\right]$ підлягають диференціальні рівняння (1), (3) за початкових умов, що виключають перехідну реакцію, і (19), (20) за нульових початкових умов. Перейшовши завчасно згідно з (17) від $\chi_i\left(0\right),\eta_i\left(0\right)$ до $S_i\left(0\right)$, отримуємо періодичний розв'язок: $S\left(t\right)-S\left(t+T\right)=0$.

Періодичні розв'язки не завжди зручні в користуванні, тож можна перейти до їхніх середньоквадратичних значень

$$\mathbf{S}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T S(t)^2\,dt}. \qquad (26)$$

Нагадаємо, що інтеґрал матриці береться як матриця інтеґралів її окремих елементів.

Часова дискретизація заданих диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь їх чутливостей (до початкових умов і параметричних) здійснюється за явними або неявними методами. Особливо гармонійно поєднується їх сумісне розв'язання у випадку неявних методів, оскільки матриці Якобі основного рівняння і рівняння цілі збігаються.

Результати симуляції

На рис. 1–3 показано результати симуляції модельного виконавчого об’єкта.

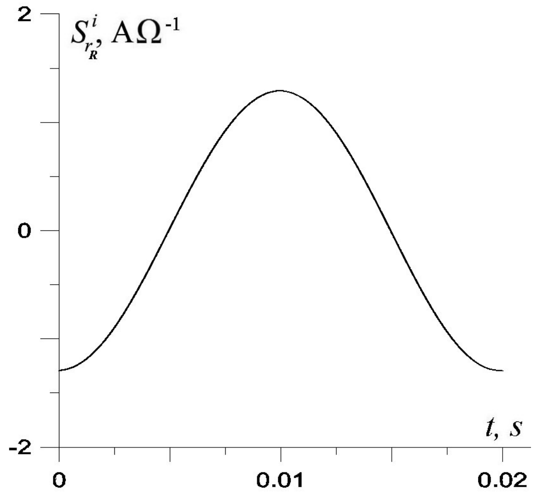

Рис. 1. Усталена параметрична чутливість статорного струму до опору роторної обмотки

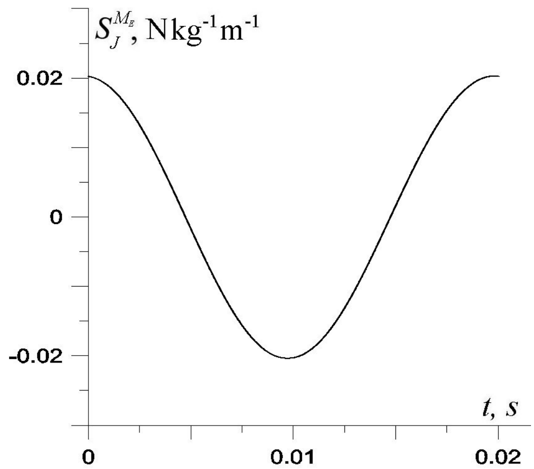

Рис. 2. Усталена параметрична чутливість електромагнетного моменту до моменту інерції ротора

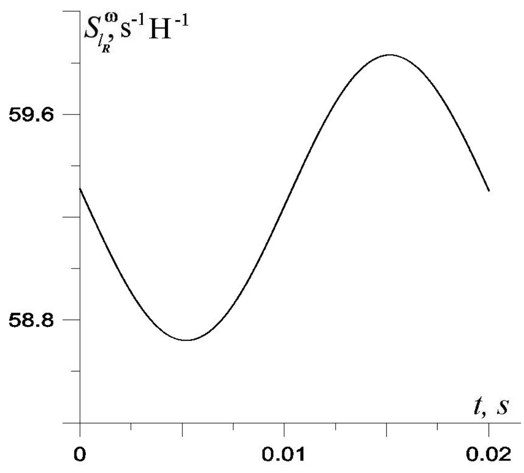

Рис. 3. Усталена параметрична чутливість кутової швидкості до індуктивності дисипації роторної обмотки

Нижче наведено таблицю повних середньоквадратичних чутливостей (26) статорного струму, кутової швидкості й електромаґнетного моменту до відповідних постійних параметрів

	r_S	r_R	U_m	J	l_R	l_S
i_{SA}	4.90	0.91	7.42E-03	1.40E-04	19.12	378.65
ω	1.26	2.29	1.22E-03	3.29E-04	59.27	46.96
M_E	37.30	1.95	5.18E-02	1.44E-02	2085.60	2117.50

Висновки і перспективи подальших наукових розвідок

Якщо розрахунок усталених процесів виконавчих об'єктів звести до двоточкової крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь їхнього електромеханічного стану, то побудовані на цій основі алгоритми дають змогу розраховувати як перехідні, так і усталені процеси, статичну стійкість і параметричну чутливість на спільній математичній підставі загальної теорії звичайних нелінійних диференціальних рівнянь.

1. Martinez J. A. Computational aspects of sensitivity analysis / J. A. Martinez // Power Engineering Society Winter Meeting. – 2001. – V. 2. – P. 799-800. 2. Tavares M. C. Transmission system parameters optimization–sensitivity analysis of secondary arc current and recovery voltage / M. C. Tavares, C. M. Portela // Power Delivery. – 2004. – V. 19, № 3. – P. 1464–1471. 3. Бойков А. Д. Методы теории чувствительности в оптимальном управлении технологическими процессами / Бойков А. Д., Ледяев С. Ф. – Саранск, 1978. – 67 с. 4. Бычков Ю. А. Алгоритм исследования параметрической чувствительности нелинейных неавтономных моделей динамических систем / Бычков Ю. А., Щербаков С. В. // Электронное моделирование. – 2003. – Т. 25, № 1. – С. 49–62. 5. Быховский М. Чувствительность динамических систем / Быховский М. // Теория и методы математического моделирования: Труды 4 Всесоюзной конференции. – 1966. – С. 56–58. 6. Вейц В.Л. Динамика управляемого электрического привода с асинхронными двигателями / В. Л. Вейц, П. Ф. Вербовой, А. Е. Кочура. – К., 1988. – 272 с. 7. Вершина А.И. Определение функций чувствительности в динамике / Вершина А. И., Маркин А. Г. // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2001. – № 1. – С. 4–8. 8. Вершина А. И. Алгоритм определения функций чувствительности в динамике по многим варьируемым параметрам / Вершина А. И., Кабак В. С., Маркин А. Г. // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2001. – № 2. – С. 7–11. 9. Вершина А. И. Общий случай определения функций чувствительности в динамике по многим варьируемым параметрам / Вершина А. И., Кабак В. С., Маркин А. Г. // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2002. – № 2. – С. 17–20. 10. Гарасымив И. И. Вычисление чувствительности нелинейных цепей в вынужденном периодическом режиме / Гарасымив И. И. // Радиоэлектроника. – 1983. – № 3. – С. 67. 11. Гаращенко Ф. Г. Вступ до аналізу чутливості параметричних систем / Гаращенко Ф. Г. – К., 2006. – С. 115. 12. Измаилов А. Ф. Чувствительность в оптимизации / Измаилов А. Ф. – М., 2006. – 248 с. 13. Козоріз В. В. Транспорт і майбутнє / В. В. Козоріз // Технічні вісті. – 1(20), 2(21). – 2005. – С. 29–34. 14. Кокотович П. В. Чувствительность систем автоматического управления / Кокотович П. В., Рутман Р. С. // Автоматика и телемеханика. – 1965. – Т. 26. – № 4. – С. 85–87. 15. Лутидзе Ш. И. Введение в динамику синхронных машин и машинно-полупроводниковых систем / Лутидзе Ш. И., Михневич Г. В., Тафт В. А. – М., 1973. – 538 с. 16. Мельник А. О. Архітектура комп'ютера / Мельник А. О. – Луцьк, 2008. – 470 с. 17. Павельчак А. Г. Метод аналізу параметричної чутливості електромагнетних елементів систем керування: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.13.05 «Комп'ютерні системи та компоненти» / А. Г. Павельчак. – Л., 2007. – 20 с. 18. Павельчак А. Модель параметричної чутливості елементів систем керування / Павельчак А., Самотий В. // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2003. – № 2. – С. 31-36. 19. Розенвассер Е. Н. Чувствительность систем управления / Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. – М., 1981. – 464 с. 20. Хусаінов Д. Я. Введення в моделювання динамічних систем / Хусаінов Д.Я. – Київ, 2010. – С. 130. 21. Чабан В. Математичне моделювання в електротехніці / Чабан В. – Л., 2010. – 508 с.