УДК 519.217.1

М. В. Приймак, О. В. Маєвський, О. В. Мацюк, Г. В. Шимчук
Тернопільський національний університет ім. Івана Пулюя,
кафедра комп'ютерних наук

МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СТОХАСТИЧНО ПЕРІОДИЧНИХ ПОТОКІВ

© Приймак М. В., Маєвський О. В., Мацюк О. В., Шимчук Г. В., 2015

Розглянуто питання моделей та інформаційних технологій дослідження стохастично періодичних потоків. Виділено клас пуассонівських періодичних кусково стаціонарних потоків і для одного із варіантів цього класу, коли відомими є період потоку та інтервали стаціонарності, оцінено інтенсивність потоку. Для опису потоків з обмеженою післядією введено інтервальний процес, який дає змогу враховувати функцію розподілів інтервалів потоку. На основі інтервального процесу відкриваються можливості обґрунтування моделей стохастично періодичних рекурентних потоків та потоків з обмеженою післядією. Як приклад введено клас інтервальних періодичних процесів з рівномірним розподілом, що є моделлю рекурентних стохастично періодичних потоків. Отримані результати є основою розроблення методів імітаційного моделювання та статистичного аналізу стохастично періодичних потоків (пуассонівських, рекурентних тощо).

Ключові слова: пуассонівський потік, періодичний пуассонівський потік, кусково стаціонарний потік, інтенсивність потоку, оцінка інтенсивності потоку.

Problems of the models and IT researches of stochastic periodic flows are considered. The class of periodic piecewise stationary Poisson flows is separated and for one of the versions of this class, when a period of the flow and intervals of stationary process are known, assessment of intensity of the flow is made. For description of the flows with limited aftereffect the interval process is introduced, which allows to consider a function of separation of intervals of the flow. New opportunities of justification of stochastically periodic recurrent flows and flows with limited aftereffect are based on the interval process. As a rule, class of interval periodic processes with uniform distribution is introduced, which is a model of recurrent stochastically periodic flows. Obtained results are the basis of the development of the methods of simulating and statistical analysis of stochastically periodic flows (Poisson, recurrent, etc.)

Key words: Poisson flow, periodic Poisson flow, piecewise stationary Poisson flow, flow's intensity, assessment of the flow's intensity.

Позначення

$x(t)$ – потік (випадковий процес).

$t(t)$ – інтервальний процес.

$x(t)$ – реалізація (результат спостереження; конкретні дані спостереження) потоку.

T – період потоку.

$[t_j, t_{j+1}), [t_j, t_j + t_j)$ – інтервали, на яких визначається приріст потоку.

t, t_j – довжина інтервалів.

$x(t_j; t_j) = x(t_j + t_j) - x(t_j)$ – приріст потоку, тобто число подій, що відбулися на інтервалі $(t_i, t_i + t_i)$.

$\bar{t} = (t_1, \mathbf{L}, t_j, \mathbf{L}, t_n)$ – вектор інтервалів стаціонарності потоку на інтервалі $[0, T)$.

$\overline{l} = \left(l_1, \mathbf{L}, l_j, \mathbf{L}, l_n\right)$ – вектор інтенсивностей потоку на інтервалі $[0, T)$.

$L(l)$ – функція правдоподібності для розподілу Пуассона із параметром l.

$\hat{l}$ – оцінка параметра l.

$\hat{\overline{l}} = \left(\hat{l}_1, \mathbf{L}, \hat{l}_j, \mathbf{L}, \hat{l}_n\right)$ – оцінка вектора інтенсивностей потоку на інтервалі $[0, T)$.

Вступ. Загальна постановка проблеми

Потоки нас оточують всюди, вони пронизують навколишнє середовище, життя загалом. Щоб пересвідчитися в цьому, варто згадати про потоки сонячного світла, потоки води, тепла, енергії, потоки машин на трасах, потоки звернень до систем масового обслуговування, наприклад, в суди, на станцію швидкої допомоги. В останні роки неможливо уявити існування людини без інформаційних потоків.

Вважається, що історія дослідження потоків математичними методами, точніше, методами теорії ймовірностей і математичної статистики, бере свій початок із робіт датського інженера А. К. Ерланга, зокрема із опублікованої в 1909 році його роботи "Теорія ймовірностей і телефонні переговори". Хоча заради історичної справедливості наведемо цікаве зауваження із [1, стор.3]. В цій роботі із посиланням на [2] говориться, що "як попередника А. К. Ерланга слід згадати Іоханнсена, чия стаття "Час очікування і число викликів" вийшла в світ в 1907 році". Перевірити справедливість цієї думки нам не вдалося через відсутність згаданих першоджерел [1, 2].

З часом виявилося, що проблеми, розглянуті Ерлангом в телефонії, виникають у різних областях досліджень: у техніці, економіці, транспорті, організації виробництва. Значного розвитку теорія систем масового обслуговування та їх складової частини – потоків – отримала в 30–50-ті рр. в роботах К. Пальма (Швеція), Ф. Плачека (Франція), В. Феллера (США). Особливої уваги заслуговують роботи Хінчина (СРСР), насамперед робота [3] – "Математические методы теории массового обслуживания", в якій закладено основи теорії потоків. Інтерес до потоків неухильно зростає, про що свідчить збільшення статей математичного і прикладного характеру, дисертацій, міжнародних конференцій, в яких розглядаються питання потоків. З 1986 року видається спеціалізований журнал "Queueing Systems" ("Системи черг").

Вивчення потоків в їх загальному вигляді має переважно теоретичний характер. В прикладних дослідженнях увагу спеціалістів привертають окремі класи потоків, що наділяються певними ознаками. Серед таких класів найбільш вивченими є найпростіші потоки, тобто потоки, для яких виконуються умови стаціонарності, ординарності і відсутності післядії [3–6]. Моделлю найпростішого потоку є стаціонарний пуассонівський процес (потік). На базі цієї моделі для найпростіших потоків розроблено аналітичні та статистичні методи їх досліджень.

Проте, як показує практика, не для всіх потоків виконуються перераховані вище умови, тобто не всі потоки можуть бути зведені тільки до стаціонарних пуассонівських потоків. Легко навести приклади, коли порушується одна чи навіть дві із цих умов. Якщо порушується лише умова стаціонарності, то моделлю таких потоків є пуассонівський процес, а самі потоки при цьому називають пуассонівськими.

Своєю чергою, серед нестаціонарних потоків увагу привертають потоки, характерною ознакою яких є стохастична періодичність (суть цього поняття детальніше розглянемо нижче), можливими періодами якої можуть бути доба, тиждень, рік тощо. У випадку, коли для стохастично періодичного потоку виконуються умови ординарності та відсутності післядії, їх моделлю є пуассонівський періодичний потік [4, 5]. Яким є стан дослідження таких потоків? Огляд літературних джерел показує, що на відміну від пуассонівських стаціонарних потоків більшість завдань дослідження пуассонівських періодичних потоків залишаються не вирішеними, насамперед це стосується оцінювання інтенсивності потоку.

Цікавим для практики також є випадок, коли потік є стохастично періодичним, але при цьому для нього порушується умова відсутності післядії. Уваги науковці на стохастично періодичні потоки, відмінні від пуассонівських, взагалі не звертали, тобто відкритими є питання обґрунтування їх моделей, вивчення методами математичної статистики, імітаційного моделювання.

Мета роботи – розглянути деякі загальні питання потоків, із класу пуассонівських періодичних потоків виділити потоки із “спрощеними” формами періодичності інтенсивності та для однієї із таких форм знайти оцінку інтенсивності, ввести новий клас випадкових процесів – інтервальних процесів і на цій основі розробити підхід для обґрунтування моделей стохастично періодичних рекурентних потоків.

Щоб перейти до розгляду основних питань цієї роботи і при цьому уникнути певних роз’яснень, застережень, попередньо хоча б у загальних рисах охарактеризуємо деякі поняття та основні результати теорії потоків.

Поняття потоку

Потоком називають послідовність подій, що відбуваються в деякі моменти часу, які в переважній більшості є випадковими. Якщо подіями є замовлення в систему обслуговування, такий потік називається потоком замовлень (звернення, вимог, подій) або вхідним потоком. У загальному випадку, якщо не використовувати слова “подія”, “замовлення”, під потоком розуміють випадковий процес, що являє собою послідовність точок, випадково розміщених на осі $[0,\infty)$. Є три основні способи опису потоків. Нагадаємо їх, враховуючи при цьому [3–6].

Потік як випадковий процес. Потік можна розглядати як випадковий процес

$$x(t), t \geq 0, \tag{1}$$

що визначає кількість подій, що відбулися за проміжок часу $(0,t)$.

Потік як послідовність випадкових точок. Нехай $t_1, \mathbf{L}, t_i, \mathbf{L}, t_0 = 0$ – випадкові моменти часу, в які надходять замовлення. Якщо ці моменти розглядати як послідовність випадкових величин (точок)

$$t_1, \mathbf{L}, t_i, \mathbf{L}, t_0 = 0, \tag{2}$$

задану на інтервалі $[0,\infty)$, причому $0 < t_1 < t_2 < \mathbf{L}$, таку послідовність іноді називають точковим процесом.

Потік як послідовність випадкових інтервалів (величин). Якщо послідовність $t_1, \mathbf{L}, t_i, \mathbf{L}$ – це моменти надходження замовлень, тоді різниці $t_i - t_{i-1} \overset{df}{=} t_i, i = 1,2,\mathbf{L}$ визначають інтервали (проміжків) часу між $i-1$-м і i-м замовленнями. Оскільки моменти $t_i, i = 1,2,\mathbf{L}$ є випадковими величинами, то інтервали $t_i, i = 1,2,\mathbf{L}$ теж будуть випадковими. Сам же потік розглядається як послідовність випадкових величин (інтервалів)

$$t_i, i = 1,2,\mathbf{L}. \tag{3}$$

Способи подання потоків у вигляді (1–3) взаємопов’язані, тобто потік, описаний одним із трьох способів, можна описати і в розумінні двох інших [3, с. 41]. Залежно від ситуації ми розглядатимемо потік у вигляді (1), тобто як випадковий процес $x(t), t \geq 0$, або у вигляді (3) як послідовність випадкових величин.

Пуассонівські потоки

Вивчати потоки в загальному вигляді малоефективно. Щоб дослідження потоків було результативним, із множини потоків виділяють потоки, що характеризуються конкретними властивостями. До таких належать пуассонівські потоки та деякі їх окремі класи, насамперед найпростіші потоки.

Найпростіший потік

Потоки, що задовольняють умови стаціонарності, відсутності післядії та ординарності, називають найпростішими. Їх моделлю є стаціонарний пуассонівський процес. Показано [3–6], що для найпростішого потоку $x(t)$ ймовірність того, що за довільний проміжок часу $(t,t+t)$ надійшло s замовлень, визначається за формулою

$$P(x(t)=s)=\frac{(l\,t)^s}{s!}e^{-l\,t},\ \ s=0,1,\mathbf{L}\ . \tag{4}$$

Параметр l, що входить до цієї формули, називають інтенсивністю (густиною) потоку і визначають як середню кількість подій, що відбулися за одиницю часу. Оскільки розподіл ймовірностей (4) є розподілом Пуассона, то найпростіший потік ще називають стаціонарним пуассонівським потоком, стаціонарним потоком Пуассона, іноді пуассонівським стаціонарним процесом. Зустрічаючи такі різноназви, варто пам'ятати, що пуассонівський потік – це те саме, що пуассонівський процес [8, с. 763].

Для характеристики стаціонарного пуассонівського потоку, крім його інтенсивності l, використовують також провідну функцію $\Lambda(t)$, що визначається як математичне сподівання числа подій, які відбулися за проміжок часу $(0,t)$:

$$\Lambda(t)=Mx(t)=\int_{t}^{t+t} l\,dt=l\,t\ .$$

Нестаціонарні пуассонівські потоки

Як наголошується в [5, с. 20], критичне вивчення умов, які приводять до найпростішого потоку, в практичних ситуаціях зустрічаються не так часто. Якщо потоки розглядати на достатньо тривалих інтервалах часу, наприклад, сумірний із добою, роком тощо, то серед них можна зустріти потоки, для яких вже не виконується умова стаціонарності, але залишаються справедливими умови ординарності і відсутності післядії. Нестаціонарність потоку проявляється в тому, що його інтенсивність вже не постійна величина, а є деякою функцією часу $l(t)$ і визначається за формулою

$$l(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M[x(t+\Delta t)-x(t)]}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Mx(t;\Delta t)}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{m(t+\Delta t)-m(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m(t)}{\Delta t}=m'(t), \tag{5}$$

де $x(t;t)=x(t+t)-x(t)$ – приріст потоку, тобто кількість подій, що відбулися протягом часового інтервалу $(t,t+t)$, $Mx(t)=m(t)$ – математичне сподівання. На основі (5) можна стверджувати, що інтенсивність $l(t)$ – миттєва густина потоку в момент t.

Для нестаціонарного пуассонівського потоку є його провідна функція $\Lambda(t;t)$, що визначається як математичне сподівання кількості подій, що настали за інтервал часу $(t,t+t)$:

$$\Lambda(t;t)=Mx(t;t)=M[x(t+t)-x(t)]=Mx(t+t)-Mx(t).$$

Враховуючи (5), провідна функція

$$\Lambda(t;t)=\int_{t}^{t+t} l(t)dt\ .$$

Показано [3, с. 15–18, 75–78], що для нестаціонарного потоку з інтенсивністю $l(t)$ його приріст $x(t;t)=x(t+t)-x(t)$ має розподіл Пуассона із параметром $\Lambda(t,t)$, тобто

$$P\{x(t;t)=k\}=\frac{\int_{t}^{t+t} l(t)dt}{k!}e^{-\int_{t}^{t+t} l(t)dt}=\frac{[\Lambda(t;t)]^k}{k!}e^{-\Lambda(t;t)}\,.$$

Стохастично періодичні потоки

Нестаціонарні потоки якогось особливого значення ні для теорії, ні для практичного використання не мають. Проте увагу спеціалістів, особливо інженерного спрямування, привертають виділені із множини нестаціонарних потоків стохастично періодичні потоки. Нагадаємо [7, 9], що потік називається стохастично періодичним, якщо періодичними (з одним і тим самим періодом) є його певні параметри, можливо, ймовірнісні характеристики, для потоків з обмеженою післядією – одновимірні функції розподілів. Що стосується стохастично періодичних потоків пуассонівського типу, то періодичним є їх параметр $l(t), t \geq 0$, тобто існує таке число T , що

$$l(t) = l(t+T). \tag{6}$$

При цьому сам потік називається пуассонівським періодичним потоком. Зупинимось на питаннях, наскільки вивченими є періодичні пуассонівські потоки, що зроблено стосовно статистичних методів їх аналізу?

Загальний стан досліджень пуассонівських періодичних потоків

Напевно, перші згадки щодо наявності пуассонівських потоків із періодичною інтенсивністю $l(t)$ зустрічаємо в [4, с.107]. Але звертаючись до цього питання, в роботі наведено лише приклад періодичної інтенсивності у вигляді

$$l(t) = 2l\sin^2 at = l(1-\cos 2at).$$

Вказується також, що до потоків із яскраво вираженою періодичністю належать потоки викликів в телефонії, потоки вантажних суден, потоки викликів на станцію швидкої допомоги.

Важливою є робота [10], в якій було введено клас випадкових процесів із незалежними періодичними приростами. Частинним випадком цих процесів є періодичні пуассонівські потоки.

Хоча в цих та інших роботах йдеться про періодичні пуассонівські потоки та деякі методи їх аналітичного вивчення, відкритими залишаються задачі їх дослідження методами математичної статистики. Чи не найважливішою із таких задач є оцінюваннч періодичної інтенсивності $l(t)$. Сьогодні ця задача залишається невирішеною.

Про можливості використання для аналізу періодичних пуассонівських потоків методів періодично корельованих процесів

Піднімаючи питання оцінювання інтенсивності пуассонівських періодичних потоків, необхідно з'ясувати, чи можливо використати для цього відомий метод оцінювання періодичного математичного сподівання періодично корельованих процесів [11, 12]. Порівняльний аналіз пуассонівських періодичних потоків (процесів) і періодично корельованих процесів показує, що на поставлене питання є однозначна відповідь – ні, безпосередньо не можна. Хоча, з одного боку, ці процеси дещо подібні, найперше, наявністю певних періодичних ймовірнісних характеристик, з іншого – це різні за визначенням класи процесів. Нагадаємо [11, 12], що періодично корельовані процеси визначаються через ймовірнісні властивості самого процесу $x(t)$. Що стосується пуассонівських потоків, то, як видно із (5), їх основний параметр – інтенсивність $l(t)$ – визначається через ймовірнісні властивості приростів процесу. Отже, в припущенні про періодичність інтенсивності (формула (6)) теж неявно присутні прирости процесу. Вказані розбіжності між цими процесами породжують відмінності в способах отримання їх реалізацій (вибірок), що використовуються в задачах статистичного аналізу. Для періодично корельованого процесу реалізацією є значення процесу $x(t)$, прийняті в певні моменти часу t_i. Для пуассонівського періодичного потоку $x(t)$ його реалізацією є значення приростів $h_i = x(t_i; t_i) = x(t_i + t_i) - x(t_i)$. Але питання щодо того, в яких точках t_i і на яких інтервалах t_i брати прирости процесу, поки залишається відкритим. Щоби відповісти на це запитання, звернемось до методу оцінювання математичного сподівання періодично корельованого процесу [12].

Оцінювання математичного сподівання періодично корельованого процесу

Оскільки математичне сподівання періодично корельованого процесу $x(t)$ є періодичною функцією з періодом T, оцінку достатньо будувати лише в точках, розміщених на інтервалі $[0,T)$. В основу побудови оцінки математичного сподівання покладено лему, згідно з якою відліки періодично корельованого процесу, взяті через період, утворюють стаціонарну послідовність. Отже, для довільної точки $t_0 \in [0,T)$ послідовність

$$x(t_0), x(t_0+T), \mathbf{L}, x(t_0+iT), \mathbf{L} \tag{7}$$

є стаціонарною, тобто для неї можна знайти оцінку її математичного сподівання $Mx(t_0)$. Нехай $x(t), t \in [0, T_0]$, $T_0 >> T$ – реалізація періодично корельованого процесу. Оцінкою математичного сподівання $Mx(t_0)$ є статистика [12]

$$\tilde{m}(t_0) = \frac{1}{S}\sum_{i=0}^{S-1} x(t_0 + iT), \tag{7а}$$

де $S = \left[{}^{T_0}\!/_{T} \right]$ – ціла частина, $t_0 \in [0,T)$. Ця оцінка є незміщеною, слушною й ефективною.

Обґрунтування умов щодо можливості статистичного аналізу пуассонівських періодичних потоків

Аналізуючи стаціонарну послідовність (7) і оцінку (7, а), необхідно з’ясувати, як виявити в періодичних пуассонівських потоках елементи стаціонарності (однорідності), а саме виділити вкладені відносно них стаціонарні послідовності, які теж можна було б використовувати в задачах їх статистичного аналізу.

Якщо взяти до уваги відмінності у визначеннях між періодично корельованими процесами і періодичними пуассонівськими потоками, то виходить, що випадкові величини стаціонарної послідовності $h_1, \mathbf{L}, h_i, \mathbf{L}$, вкладеної відносно періодичного пуассонівського потоку, повинні мати певні характерні особливості, які ми подамо у такому вигляді.

a) для стаціонарної послідовності $h_1, \mathbf{L}, h_i, \mathbf{L}$ її випадкові величини h_i є приростами періодичного пуассонівського потоку $x(t), t \geq 0$, взятими на певних інтервалах $[t_i, t_i + t], i = 1,2, \mathbf{L}$, $t < T$, напівосі $[0, \infty)$, тобто $h_i = x(t_i; t) = x(t_i + t) - x(t_i)$, при цьому $t_1 \in [0,T), t_1 + t < T$;

b) інтервали $[t_i, t_i + t], i = 1,2, \mathbf{L}$ повинні бути розміщені через період T, тобто $t_i = t_1 + (i-1)T, i \geq 2$;

c) випадкові величини $h_1, \mathbf{L}, h_i, \mathbf{L}$ є незалежними і розподілені за одним і тим самим законом Пуассона;

d) що стосується параметра розподілу Пуассона, то тут можуть бути два варіанти, а саме:

d.1. На кожному із інтервалів $[t_i, t_i + t], i = 1,2, \mathbf{L}$, інтенсивність є постійною величиною l, тому параметром розподілу послідовності $h_1, \mathbf{L}, h_i, \mathbf{L}$ є величина $l t$;

d.2. На вказаних інтервалах $[t_i, t_i + t], i = 1,2, \mathbf{L}$ інтенсивність є деякою функцією, яку в силу її періодичної повторюваності достатньо знати лише на першому інтервалі: $l(t), t \in [t_1, t_1 + t]$. При цьому параметром розподілу послідовності $h_1, \mathbf{L}, h_i, \mathbf{L}$ буде провідна функція $\Lambda(t_1, t) = \int_{t_1}^{t_1+t} l(t)dt$.

Який із двох останніх варіантів вибрати? При виборі варіанта d.1 пуассонівський періодичний потік на інтервалах $[t_i, t_i + t], i = 1,2, \mathbf{L}$ буде стаціонарним, тому, використовуючи метод максимальної правдоподібності, можна знайти оцінку інтенсивності l. Якщо вибрати d.2, то в цьому випадку за методом максимальної правдоподібності можна знайти лише усереднену оцінку провідної функції $\Lambda(t;t)$ на інтервалах $[t_i, t_i + t],\ i = 1,2,\mathbf{L}$, а отже, і усереднену оцінку інтенсивності $l(t)$ на цих інтервалах.

Пуассонівські періодичні кусково-стаціонарні потоки

Зупинимось на варіанті, що містить пункти a, b, c, d1. Щоб реалізувати цей варіант, необхідно із всієї сукупності пуассонівських періодичних потоків виділити клас потоків, форма періодичності інтенсивності яких конкретизується так, щоб, по-перше, було враховано пункти a, b, c, d1, і, по-друге, була можливість розробити метод оцінювання цієї інтенсивності.

Означення 1. Пуассонівський потік $x(t)$ називається кусково-стаціонарним (однорідним), якщо його параметр $l(t)$ є періодичною кусково-постійною функцією з періодом T.

Повна назва визначеного класу процесів – пуассонівські періодичні кусково-стаціонарні потоки (процеси).

Визначення пуассонівського періодичного кусково-стаціонарного потоку можна уточнити. Наприклад, можна вважати, що на періоді $[0,T)$ таких інтервалів стаціонарності є скінченна кількість, і крім цього, можуть вказуватися ці інтервали:

$$[t_0, t_1), \mathbf{L}, [t_{j-1}, t_j), \mathbf{L}, [t_{n-1}, t_n),$$

де $t_0 = 0, t_n = T$. Якщо $t_j = t_j - t_{j-1}$ – довжини інтервалів $[t_{j-1}, t_j),\ j = 1, \mathbf{L}, n$, то разом ці довжини утворюють вектор

$$\bar{t} = (t_1, \mathbf{L}, t_j, \mathbf{L}, t_n),$$

для якого $\sum_{j=1}^{n} t_j = T$, самі ж інтервали $[t_{j-1}, t_j),\ j = 1, \mathbf{L}, n$ ще можна записати у вигляді $[t_{j-1}, t_{j-1} + t_j)$.

Оскільки інтенсивність потоку є періодичною функцією, то очевидно, що інтервали стаціонарності $[t_0, t_1), \mathbf{L}, [t_{j-1}, t_j), \mathbf{L}, [t_{n-1}, t_n)$, розміщені на періоді $[0,T)$, періодично продовжуються на весь інтервал $[0,\infty)$, і на довільному періоді $[iT,(i+1)T)$ вони мають вигляд

$$[t_{j-1} + iT, t_j + iT),\ j = 1, \mathbf{L}, n;\ i = 0,1,\mathbf{L}. \qquad (8)$$

або

$$[t_{j-1+in}, t_{j+in}),\ j = 1, \mathbf{L}, n;\ i = 0,1,\mathbf{L},$$

де $t_j + iT = t_{j+in}$.

Крім задання інтервалів однорідності, можуть бути також вказані значення інтенсивностей потоку на цих інтервалах, наприклад, у вигляді вектора

$$\bar{l} = (l_1, \mathbf{L}, l_j, \mathbf{L}, l_n),$$,

де $l_j,\ j = 1, \mathbf{L}, n$ – інтенсивність потоку на інтервалі $[t_{j-1}, t_j)$, а отже, і на інтервалах $[t_{j-1} + iT, t_j + iT),\ i = 0,1,\mathbf{L}$.

У випадках, коли про періодичний пуассонівський кусково-стаціонарний потік відома деяка додаткова інформація, то її можна вказувати при заданні потоку. Наприклад, якщо відомими є:

- період T, то потік може бути поданий у вигляді

$$\{x(t), T\};$$

- вектор $\bar{l}$ – у вигляді

$$\{x(t), \bar{l}\};$$

- вектор $\bar{t}$ – у вигляді

$$\{x(t), \bar{t}\};$$

- період T і вектори $\bar{t}$ – у вигляді

$$\{x(t), T, \bar{t}\};$$

- період T і вектор $\bar{l}$ – у вигляді

$$\{x(t), T, \bar{l}\}$$

- період T і вектори $\bar{t}$ і $\bar{l}$ –у вигляді

$$\{x(t), T, \bar{t}, \bar{l}\} \text{ або } \{x(t), \bar{t}, \bar{l}\}.$$

Подання пуассонівського періодичного кусково-стаціонарного потоку в тому чи іншому вигляді дає змогу робити постановки конкретних, чітко сформульованих задач. Наприклад, для потоку $\{x(t), \bar{l}\}$ такими задачами можуть бути оцінка періоду T і вектора $\bar{t}$ для потоку $\{x(t), T, \bar{t}\}$ – оцінка вектора $\bar{l}$ тощо.

Подібно до пуассонівського періодичного кусково-стаціонарного потоку можна сформулювати визначення пуассонівських періодичних потоків, що мають інші форми періодичності інтенсивності $l(t)$. Наприклад, результати попередніх досліджень деяких реальних потоків показують, що їх інтенсивність має періодичну кусково-лінійну форму. Як модель такого потоку можна визначити пуассонівський періодичний кусково-лінійний потік.

Оцінка інтенсивності періодичного пуассонівського кусково-стаціонарного потоку

Перейдемо тепер до розгляду питання побудова алгоритму оцінювання інтенсивності пуассонівського періодичного кусково-стаціонарного потоку $\{x(t), T, \bar{t}\}$, тобто потоку, для якого відомими є його період T та вектор інтервалів стаціонарності $(t_0, t_1), \mathbf{L}, (t_{j-1}, t_j), \mathbf{L}, (t_{n-1}, t_n)$, де $t_0 = 0, t_n = T$, або відповідний їм вектор тривалостей стаціонарності $\bar{t} = (t_1, \mathbf{L}, t_j, \mathbf{L}, t_n)$, де $t_j = t_j - t_{j-1}$. При цьому вектор інтенсивностей

$$\bar{l} = (l_1, \mathbf{L}, l_j, \mathbf{L}, l_n) \tag{10}$$

є невідомим.

Нехай спостереження за потоком здійснювалися на інтервалі $[0, T']$, $T' >> T$, $\left[T_0 / T\right] \overset{df}{=} m$. Для наочності весь інтервал спостереження $[0, T']$ розіб’ємо на окремі T_i-інтервали $[(i-1)T, iT)$, довжина кожного з яких дорівнює періоду T.

Результати спостережень розмістимо у вигляді $m \times n$ матриці, поданої на рисунку, де m – число T_i-інтервалів $[(i-1)T, iT)$, протягом яких велися спостереження за потоком, n – кількість інтервалів стаціонарності потоку на кожному із T_i-інтервалів. Елементи $s(i, j)$ матриці – це кількість подій, які були зафіксовані на j-му інтервалі стаціонарності i-го T_i-інтервалу, тобто $s(i, j)$ – це приріст потоку $x(t)$ на інтервалі $[t_{j-1} + (i-1)T, t_j + (i-1)T + t_j)$:

$$s(i, j) = x(t_{j-1} + (i-1)T, t_j) = x(t_{j-1} + (i-1)T + t_j) - x(t_{j-1} + (i-1)T + t_j).$$

В останньому рядку матриці розміщено суми $S(j) = \sum_{i=1}^{m} s(i, j)$, $j = 1, \mathbf{L}, n$, кожна з яких дорівнює сумі подій, що відбулися на всіх інтервалах стаціонарності $[t_{j-1} + (i-1)T, t_j + (i-1)T + t_j)$, $i = 1, \mathbf{L}, m$, і на яких одна і та ж інтенсивність l_j, оцінку якої потрібно знайти.

Номер T_i-інтервалу	Номер інтервалу стаціонарності на T_i-інтервалі				
	1		j		n
1	$s(1,1)$	…	$s(1,j)$	…	$s(1,n)$
…	…	…	…	…	…
i	$s(i,1)$	…	$s(i,j)$	…	$s(i,n)$
…	…	…	…	…	…
m	$s(m,1)$	…	$s(m,j)$	…	$s(m,n)$
	$S(1)$	…	$S(j)$	…	$S(n)$

Результати спостережень за пуассонівським періодичним кусково-стаціонарним потоком

Оскільки при фіксованому j на кожному із інтервалів $[t_{j-1}+(i-1)T, t_j+(i-1)T+t_j)$, $i=1,\ldots,m$, потік є стаціонарним із поки що невідомою інтенсивністю λ_j, то беручи до уваги метод оцінювання інтенсивності стаціонарного потоку [13], оцінкою інтенсивності λ_j, $j=1,\ldots,n$ буде статистика

$$\hat{\lambda}_j = \frac{S(j)}{m\tau_j},\ j=1,\ldots,n.$$

Вектор $\vec{\lambda} = (\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_j,\ldots,\hat{\lambda}_n)$ буде оцінкою вектора інтенсивностей (10).

Потоки, в яких порушується умова відсутності післядії

Пуассонівські потоки часто є лише деяким наближенням реальних потоків, проте використовуються в силу того, що в окремих випадках дають змогу проводити їх статистичний аналіз. Практика свідчить, що не завжди для потоків виконується умова відсутності післядії, тобто не всі потоки можна звести тільки до пуассонівських. Щоб вивчати потоки, відмінні від пуассонівських, їх зручно розглядати як послідовність випадкових величин (інтервалів) τ_k, $k=1,2,\ldots$. Із множини потоків, для яких не виконується умова відсутності післядії, виділені окремі класи потоків [6, 14].

Потоки з обмеженою післядією. Випадковий потік подій τ_k, $k=1,2,\ldots$ називається потоком з обмеженою післядією (або потоком Пальма), якщо його випадкові величини (інтервали) τ_k взаємно незалежні. Із цього визначення випливає, що для задання потоку з обмеженою післядією достатньо задати послідовність одновимірних розподілів

$$F_k(x) = P\{\tau_k < x\},\ k=1,2,\ldots,$$

припускаючи при цьому, що $F_k(x) \equiv 0$ при $x<0$.

Потоки з обмеженою післядією – це загальний клас потоків; ні теоретичного, ні тим більше практичного значення не мають. Певний інтерес, особливо в прикладних напрямках, мають виділені із множини потоків з обмеженою післядією рекурентні потоки із запізненням та рекурентні потоки [3].

Рекурентні потоки із запізненням. Потік з обмеженою післядією, для якого $F_k(x)=F(x)$, $k=2,3,\ldots$, $F_1(x)\neq F(x)$, називається рекурентним потоком із запізненням або процесом відновлення із запізненням.

Рекурентні потоки. Потік з обмеженою післядією, для якого $F_k(x)=F(x)$ при $k=1,2,\ldots$, називається рекурентним потоком, або процесом відновлення.

Із визначення рекурентного потоку видно, що для його задання достатньо задати функцію розподілу інтервалів $t_k, k = 1,2,\mathbf{L}$. Серед можливих розподілів на практиці часто зустрічаються розподіл Вейбулла, рівномірний розподіл, нормальний і логарифмічно нормальний розподіли, гамма-розподіл тощо.

Зауважимо: якщо потік розглядати як послідовність інтервалів $t_k, k = 1,2,\mathbf{L}$, то для пуассонівського стаціонарного потоку розподілу інтервалів t_k є показниковим:

$$F_k(x) = P(t_k < x) = 1 - e^{-lx} \overset{df}{=} F(x).$$

Хоча функція розподілу випадкових величин рекурентного потоку $t_k, k = 1,2,\mathbf{L}$ одна і та сама, проте, подібно до періодичного пуассонівського потоку, для рекурентних потоків теж спостерігаються випадки їх стохастичної періодичності. Як же обґрунтовувати моделі стохастично періодичних рекурентних потоків? Щоб була така можливість, визначимо поняття потоку дещо інакше. Для цього спочатку введемо новий тип випадкових процесів – інтервальний процес.

Інтервальний процес

Для потоку як послідовності моментів $t_k, k = 1,2,\mathbf{L}$, в які надходять вимоги, розглядатимемо момент надходження вимоги в загальному випадку і позначимо його через t. Інтервал часу між моментом t і моментом надходження наступної вимоги позначимо через $t(t)$ і розглядатимемо його як процес, що описує інтервали між сусідніми вимогами (подіями) потоку. Нагадаємо, що при визначенні потоку як послідовності випадкових величин $t_k, k = 1,2,\mathbf{L}$ ці величини вважаються незалежними. Враховуючи це зауваження, дамо визначення інтервального процесу.

Означення 2. Випадковий процес з незалежними значеннями $t(t), t \in [0, \infty)$, для якого при кожному фіксованому значенні $t = t_0$ випадкова величина $t(t_0)$ є інтервалом часу між сусідніми вимогами за умови, що лівий кінець цього інтервалу збігається з точкою t_0, називається інтервальним процесом.

Оскільки інтервальний процес є процесом з незалежними значеннями, він повністю описується лише одновимірною функцією розподілу $F(t, x) = P(t(t) < x)$.

Інтервальний процес $t(t), t \in [0, \infty)$ іноді називатимемо інтервальним потоком, подібно до того, як пуассонівський процес також називають пуассонівським потоком. Причина такої двоякості назв в тому, що інтервальний процес виник у зв'язку із вивченням потоків.

Однією із реалізацій інтервального потоку є рекурентний потік, заданий у вигляді послідовності незалежних інтервалів (випадкових величин) $t_k, k = 1,2,\mathbf{L}$, які мають одну і ту саму функцією розподілу $F(x) = P(t_k < x), k = 1,2,\mathbf{L}$. Враховуючи це зауваження, із загальної множини виділимо стаціонарний інтервальний процес $t(t), t \in [0, \infty)$, для якого його одновимірна функція розподілу $F(t, x) = P(t(t) < x)$ не залежить від часу t, тобто $F(t, x) = F(x)$. Будемо вважати, що ця функція залежить від параметрів $a_1, a_2, \mathbf{L}, a_n$. У загальному випадку інтервальних потоків параметри $a_1, a_2, \mathbf{L}, a_n$ функції розподілу $F(t, x)$ вже є деякими функціями часу $a_1(t), a_2(t), \mathbf{L}, a_n(t)$.

Інтервальний періодичний процес

Подібно до того, як серед множини пуассонівських потоків вирізняють стохастично періодичні потоки, моделлю яких є розглянуті вище пуассонівські періодичні потоки, аналогічний клас потоків можна виділити із множини інтервальних процесів.

Означення 3. Інтервальний процес $t(t), t \in [0, \infty)$, називається періодичним, якщо періодичною з періодом T є його функція розподілу, тобто виконується рівність

$$F(t, x) = F(t + T, x).$$

При цьому параметри функції розподілу $a_1(t), a_2(t), \mathbf{L}, a_n(t)$ (всі чи деякі) є періодичними з одним і тим самим періодом T. Останнє означення можна доповнити уточненням, що у випадку, коли лише деякі із функцій $a_1(t), a_2(t), \mathbf{L}, a_n(t)$ є періодичними, останні вважаються постійними.

Для реальних стохастично періодичних потоків з обмеженою післядією їх функція розподілу конкретизується і може набувати певної аналітичної форми. Щоб була можливість досліджувати подібні потоки методами математичної статистики, за допомогою інтервального процесу можна виділяти їх окремі класи, вказуючи при цьому їх функцію розподілу. Для прикладу виділимо клас таких потоків із рівномірним розподілом.

Означення 4. Інтервальний процес $t(t), t \in [0, \infty)$ називається інтервальним періодичним процесом із рівномірним розподілом, якщо для його густини розподілу

$$f(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b(t) - a(t)}, & x \in [a(t), b(t)], \\ 0, & x \notin [a(t), b(t)], \end{cases}$$

параметри $a(t)$ і $b(t)$, $b(t) > a(t) > 0$ є періодичними функціями з одним і тим самим періодом T: $a(t) = a(t+T)$, $b(t) = b(t+T)$.

Реалізацією інтервального періодичного процесу із рівномірним розподілом є рекурентний періодичний потік із рівномірним розподілом.

Подібно до періодичного інтервального процесу із рівномірним розподілом легко визначити інтервальні періодичні процеси із трикутним розподілом, гіперекспоненційний, гамма, Вейбула, Ерланга, Релея, Вейбула–Гніденка, Максвелла, логарифмічним нормальним, Накагамі та іншими розподілами. Для потреб практики можна визначити інтервальні процеси, що мають "кускову" структуру. Це можуть бути інтервальні кусково-стаціонарні процеси, інтервальні періодичні кусково-стаціонарні процеси. Визначення інтервальних періодичних процесів із зазначенням тих чи інших конкретних форм їх періодичності, методи їх імітаційного моделювання та статистичного аналізу планується розглянути в наступних роботах.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок

Аналіз стану теорії потоків показав наявність цілої низки ще не вирішених питань, особливо тих, що стосуються стохастично періодичних потоків – їх моделей, статистичного аналізу, зокрема, тих чи інших оцінок, що стосуються періодичності. Враховуючи особливості оцінювання інтенсивності пуассонівських стаціонарних потоків, розглянуто спосіб виділення із пуассонівських періодичних потоків їх окремих класів, що мають "спрощені" форми періодичності і для одного із цих класів – пуассонівських періодичних кусково-стаціонарних потоків – побудовано оцінку їх періодичної інтенсивності. Для обґрунтування моделей стохастично періодичних рекурентних потоків введено поняття інтервального процесу, що дає змогу враховувати функцію розподілу інтервалів потоку та її періодичність. Як приклад подано означення інтервального періодичного процесу із рівномірним розподілом, що є моделлю стохастично періодичних рекурентних потоків із рівномірним розподілом. Подібним чином можуть бути введені періодичні інтервальні процеси із трикутним розподілом, гіперекспоненційний, гамма, Вейбула, Ерланга, Релея, Вейбула–Гніденка, Максвела, логарифмічним нормальним, Накагамі та іншими розподілами. Отримані результати є базою розроблення методів імітаційного моделювання та методів статистичного аналізу окремих класів стохастично періодичних пуассонівських та рекурентних потоків.

1. Лабскер Л. Г., Бабешко Л. О. Теория массового обслуживания в экономической сфере. Учеб. пособие для вузов. – М.:. Банки и биржа, ЮНИТИ, 1998. 319 с. 2. Четыркин Е. М. Теория *массового обслуживания и ее применение в экономике. – М.: Статистика, 1971. 3 Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания. Труды математического института имени В. А. Стеклова, Т.49. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 122 с. 4. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1966. – 431 с. 5. Гнеденко Б. В. Беседы о теории массового обслуживания. – М.: Знание, 1973. – 64 с. 6. Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания. – М.: Высшая школа, 1982. – 256 с. 7. Приймак М. В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: автореф. дис. … д-ра техн. наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. – 34 с. 8. Математическая энциклопедия, т. 4. – М.: Сов. энцикл., 1981. – 1208 с. 9. Приймак М. В., Мацюк О. В., Маєвський О. В., Прошин С. Ю. Моделі та методи дослідження систем масового обслуговування марківського типу в умовах стохастичної періодичності та їх застосування в енергетиці // Технічна електродинаміка. – 2014. – С.1 1–16. 10. Красильников О. І., Марченко Б. Г., Приймак М. В. Процеси з незалежними періодичними приростами і періодичні білі шуми // Відбір і обробка інформації. – 1996. – Вип. 10(86). – С. 22–27. 11. Коронкевич О. І. Лінійні динамічні системи під дією випадкових сил // Наукові записки Львів. ун-ту. – 1957. – 44, № 8. – С. 175–183. 12. Драган Я. П. Свойства отсчетов периодически коррелированных случайных процессов // Отбор и передача информации. – 1972. – № 33. – С. 9–12. 13. Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М. Случайные процессы: Справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 367 с. 14. Вентцель Э. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 2000. – 383 с.*