журн.: http://it-claim.ru/Library/Books/ITS/wwwbook/IST7/ sigachov/Sigachov.htm. 7. Белоусов К. Теория и методология полиструктурного синтеза текста [Монография]/ К. Белоусов. – М.: Флинта: Наука, 2009. – 216 с. 8. Вавіленкова А. . Проект комп'ютерної технології лінгвістичного аналізу електронних документів / А. І. Вавіленкова // Strategy of quality in industry and education: IX international conference, June 6–13, 2014. – Varna (Bulgaria), 2014. – P. 388 – 394. 9. Вавіленкова А. І. Методологічні основи автоматичного аналізу логіко-лінгвістичних моделей текстових документів / А. І. Вавіленкова // Математичні машини та системи. – 2015. – № 1. – С. 65–71. 10. Вавіленкова А. І. Застосування формальних алгоритмів у структурній лінгвістиці / А. І. Вавіленкова // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2014. – № 699. – С. 265–272. 11. Головкина С. Х. Лингвистический анализ текста // С. Х. Головкина, С. Н. Смольников. – Вологда: Издательский центр ВИРО, 2006. – 124 с. 12. Гальперин И. Р. Текст как объект лингвистического исследования. Изд. 5-тое, стереотипное / И. Р. Гальперин. – М: КомКнига, 2007. – 144 с. 13. Вавіленкова А. І. Застосування формальних алгоритмів у структурній лінгвістиці / А. І. Вавіленкова // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2014. – № 699. – С. 265–272.

УДК 004.94

Я. Соколовський, М. Москвітіна
НЛТУ України, м. Львів

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙНО-РЕЛАКСАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОХІДНИХ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

З використанням апарату дробових диференціальних та інтегральних операторів досліджено математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів, пов'язаних з ефектами пам'яті та самоорганізації. Наведено аналітичні співвідношення для визначення деформацій та напружень узагальнених дробово-диференціальних стандартних реологічних моделей. Для інтегрального представлення цих моделей визначено ядра повзучості та релаксації, а також термодинамічні функції стану. Досліджено вплив параметрів дробового диференціювання на деформаційні процеси матеріалів.

Ключові слова: математична модель, похідні дробового порядку, функція Міттаг – Леффлера, реологічні моделі, деформаційні процеси.

In the work, with the use apparatus of the fractional differential and integral operators investigated mathematical models strain-relaxation processes related to memory effects and self-organization. These analytical relations for determining the strain and stress of generalized fractional differential standard rheological models. For the integral representation of these models are defined kernel creep and relaxation, as well as the thermodynamic state function. The investigated the influence of parameters of fractional differentiation on the deformation processes of materials.

Key words: mathematical model, derivatives of fractional order, Mittag-Leffler function, rheological models, deformation processes.

Актуальність досліджень

Розроблення адекватних математичних моделей процесів в'язкопружного деформування та тепломасоперенесення у середовищах з фрактальною структурою, для яких характерні ефекти пам'яті, просторової нелокальності і самоорганізації має ґрунтуватися на використанні математичного апарату дробових інтегро-диференціальних операторів. Наявність у диференціальних рівняннях дробової похідної за часом характеризує ефекти пам’яті (еридитарності) або немарковість процесів моделювання. Дробові похідні за просторовими координатами відображають самоподібну неоднорідність фрактального середовища.

Значна кількість публікацій у цьому напрямі присвячена математичним основам та проблемам інтерпретації застосування дробового інтегрування та диференціювання для моделювання різних систем. У світі існують декілька наукових шкіл пов’язаних з іменами: Ф. Майнарді [4], І. Піддубного [5], В. Учайкіна [1], А. Нахушева [6], Р. Нігматуліна [7] та інших, які розвивають ідеї дробового інтегродиференційованого апарату до моделювання складних систем. Кількість публікацій швидко зростає та переважно стосується математичних питань дослідження диференційних рівнянь з похідними дробового порядку, аналітичних методів їх розв’язання, існування розв’язків, а також питань, пов’язаних з геометричною та фізичною інтерпретаціями дробових похідних. Значно меншу кількість робіт присвячено розвитку числових методів розв’язання диференційних рівнянь тепломасоперенесення з похідними дробового порядку. На початковому етапі знаходяться дослідження, присвячені питанням побудови математичних методів та моделей взаємозв’язаних деформаційно-релаксаційних та тепломасообмінних процесів у середовищах з фрактальною структурою. До кінця не розв’язаною залишається задача коректної та фізично-осмисленої постановки граничних і початкових умов для нелокальних математичних моделей нерівноважних процесів у середовищах з фрактальною структурою.

Аналіз сучасного стану досліджень

Аналіз наукових джерел свідчить про те, що визначення похідних дробового порядку ґрунтується на двох підходах. Перший – це узагальнення відомої формули Коші, яка дозволяє звести багатократний інтеграл цілого порядку до однократного [8, 9] та ін.. Другий підхід розвинуто у працях [10, 11] та узагальнено у [11, 12] щодо визначення дробової похідної через границю скінченно-різницевого відношення. Також відомі ряд узагальнень та модифікацій таких підходів [13, 14]. Властивості дробового інтегродиференціювання у рамках цих підходів досліджено та описано у [1– 6, 15, 16]. Основною відмінністю дробових похідних від цілочислових є їх нелокальність, тобто залежність результатів диференціювання від значень функцій у всіх точках деякого відрізка або числової прямої, а не від значень функцій у точках із малого околу точки – як у випадку звичайного диференціювання. Також відомі дослідження щодо узагальнення дробових операторів диференціювання, зокрема у [17, 18] дробовий порядок описується функцією часу, а в [19] – випадковою величиною.

Характерною особливістю дробових операторів диференціювання та інтегрування є відсутність явної фізичної та геометричної інтерпретації таких операцій. Існують декілька підходів до вирішення цієї проблеми, які умовно можна поділити на три напрямки: ймовірнісний, геометричний та фізичний [1, 2, 5, 7]. Автори останніх двох підходів з використанням класичної фрактальної геометрії будують аналогію відносно операцій диференціювання цілого порядку. Зокрема, робиться спроба обґрунтування змісту дробових похідних з використанням зв’язку між дробовими операторами і фракталами у термінах операцій, що задаються на фрактальних багатообразах. Ймовірнісний підхід базується на аналізі статистичних розподілів «некласичної» поведінки. Наявність різних підходів до визначення дробових похідних породжують неоднозначність щодо коректності та фізичної осмисленості постановки початкових та граничних умов залежно від типу дробової похідної.

Останніми роками спостерігається значна зацікавленість щодо використання дробових диференційних рівнянь для моделювання різних процесів. Дослідженню динаміки та автохвильових розв’язків бістабільних систем реакції – дифузії з часовими дробовими похідними – присвячено праці [27–29] . Показано, що застосування дробових диференційних операторів дає змогу описати нові властивості таких систем порівняно з системами, у яких використовуються похідні цілого порядку. Побудовам фундаментальних розв’язків параболічних рівнянь з дробовою похідною за часом з різними граничними умовами присвячено праці [32–34]. Наведено розв’язки рівнянь дифузії та термопружності з дробовою похідною за часом. Роботи [30, 31] присвячені застосуванню спектрального методу до розв'язування диференційних рівнянь дробового порядку за часом з використанням многочленів Лагерра. Використання методів скінченних різниць для розв'язання двовимірних задач теплопровідності з похідними дробового порядку за часом у просторових координатах наведено у [38]. У працях [36, 38] застосовано явні та неявні схеми методу скінченних різниць для дослідження рівнянь тепломасоперенесення та в'язкопружного деформування з похідними дробового порядку за часом.

Для моделювання дисипативних властивостей в'язкопружних середовищ, пов'язаних з тепловими затратами енергії, подоланням сил тертя та опору зовнішньому навантаженню у працях [1, 2] показано, що напруження можна представити згорткою дробово-степеневої функції і деформації або похідної від деформації. Дробовий показник степеневої функції зумовлений реальною фізичною поведінкою таких середовищ. Окрім цього, використання диференціальних рівнянь дробового порядку для побудови математичних моделей в'язкопружного деформування дозволяють адекватно, враховуючи фізичні міркування, узагальнювати експериментальні дані для ідентифікації параметрів моделей.

Дробово-диференціальний підхід у математичних моделях в'язкопружності дає змогу враховувати ефекти пам'яті. Відомо [10], що врахування ефекту пам'яті для зміни деякої фізичної величини $F(t)$ залежно від іншої $f(t)$ визначається залежністю

$$F(t)=\int_0^t K(t-t')f(t')dt',$$

де K – функція пам'яті; t, t' – час.

Для моделювання систем у випадку відсутності ефекту пам'яті (марківські процеси) функція $F(t)$ має вигляд $K(t-t')=hd(t-t')$, де $d(t)$ – дельта-функція Дірака; $h>0$ – деяка константа. У випадку «повної» пам'яті маємо співвідношення $K(t-t')=t^{-1}h(t-t')$, де $h(t)$ – одинична функція Хевісайда. Проміжний часовий етап розвитку та функціонування систем між двома граничними станами (відсутність пам'яті – наявність "повної" пам'яті), як показано в [3], характеризуються множиною міри Хаусдорфа–Безиковича, а зв'язок між величинами $F(t)$ і $f(t)$ описується дробовим інтегралом

$$F(t)=\Gamma^{-1}(a)\int_0^t (t-t')^{a-1} f(t')dt',$$

де $\Gamma(a)$ – гамма–функція; a – фрактальна розмірність системи.

Зміна поведінки таких систем з частковою пам'яттю, зокрема пов'язаних з в'язкопружним деформуванням, дисипацією енергії, описується дробовими похідними

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t) \sim \frac{\partial^a}{t_0 \partial \bar{t}^a} f(\bar{t}) \sim \Gamma^{-1}(1-a)\frac{d}{t_0 d\bar{t}}\int_0^{\bar{t}} \frac{f(t')}{(x-t')^a}dt',$$

де $\bar{t}=t_0$ – безрозмірний час; t_0 – характерний час даного процесу. Видно, що шукана функція у визначенні дробової похідної знаходиться під інтегралом за часом, тобто конкретним значенням a враховуються ефект пам'яті, зокрема у наступні моменти часу.

Для моделювання самоподібної неоднорідності відповідно просторова похідна має аналогічний дробовий порядок $t \to l_0$, $\bar{t} \to x$, $x = x/l_0$, де l_0 – характерний просторовий масштаб.

Для математичного моделювання деформаційно-релаксаційних процесів використовують структурні реологічні моделі. Ними користуються для визначення механічних властивостей полімерів, внутрішнього тертя в твердих тілах та інших властивостей реальних тіл. До традиційних реологічних моделей слід віднести моделі Максвелла, Фойгта, Кельвіна, Джеффріса тощо, які описують властивості суцільних середовищ. У більшості випадків для опису моделей допускається, що механічні властивості досліджуваного середовища можна з достатньою точністю описати на основі трьох основних властивостей: пружних, пластичних та в'язкопружних.

Використовуючи можливі комбінації таких моделей, можна отримати різні схеми в'язкопружного деформування, що описуються різними типами диференціальних рівнянь, які містять звичайні похідні. Своєю чергою, ці рівняння дають змогу отримати функції вільної енергії, зміни ентропії та розсіювання енергії для кожної найпростішої моделі. Враховуючи вищенаведені міркування, що базуються на аналізі робіт [1, 21, 22], можна вважати, що для математичного моделювання реологічних властивостей в'язкопружних середовищ доцільне використовування інтегродиференціальних операторів дробового порядку. Зазначимо, що дробово-диференціальний підхід для моделювання реологічної поведінки матеріалів пов'язаний з роботами [1, 23–25] та працями інших авторів. У статті розглядаються математичні моделі лінійної в'язкопружності, які ґрунтуються на введені дробового диференціювання та отримані основні термодинамічні функції реологічних моделей.

Математичне моделювання з використанням дробово-диференційного підходу

Математичні моделі деформування у в'язкопружних фрактальних середовищах описуються відповідними рівняннями дробово-диференціального типу [1]:

для моделі Максвелла

$$s(t)+t^{a}D_t^{a}s(t)=Et^{b}D_t^{b}e(t),\qquad 0<a,b<1 \tag{1}$$

для моделі Фойгта

$$s(t)=E(t^{a}D_t^{a}s(t)+t^{b}D_t^{b}e(t)),\quad 0<a<b<1 \tag{2}$$

для моделі Кельвіна

$$E_1t^{a}D_t^{a}s(t)+(E_1+E_2)s(t)=E_1E_2(e(t)+t^{b}D_t^{b}e(t)),\qquad 0<a,b<1, \tag{3}$$

де t,t – час, E – модуль пружності для моделей Максвелла та Фойгта; E_1 – модуль пружності елемента Фойгта для моделі Кельвіна; E_2 – модуль пружності для моделі Кельвіна; $s(t)$ – напруження, $e(t)$ – деформація; D_t^{a}, D_t^{b} – дробові похідні по часу з порядком відповідно a, b.

Дробова похідна порядку a від функції $f(t)$ визначається формулою [5]:

$$D_t^{a}f=\frac{1}{\Gamma(n-a)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t\frac{f(t')}{(t-t')^{a-n+1}}dt',\qquad 0\le n-1<a<n\ \ (n=1,2,...) \tag{4}$$

Знайдемо розв'язки рівняннь відносно напруження $s(t)$, використовуючи метод перетворення Лапласа. Запишемо загальне рівняння, що описує моделі Максвелла та Кельвіна:

$$D_t^{a}s(t)+a_{M,K}s(t)=h_{M,K}(t), \tag{5}$$

де $a_M=\dfrac{1}{t^{a}}$, $a_K=\dfrac{E_1+E_2}{E_1t^{a}}$, $h_M(t)=Et^{b-a}D_t^{b}e(t)$, $h_K(t)=\dfrac{E_2}{t^{a}}(e(t)+t^{b}D_t^{b}e(t))$, де a_M, a_K – деякі коефіцієнти для моделей Максвелла і Кельвіна; $h_M(t), h_K(t)$ – функції від часу для моделей Максвелла і Кельвіна відповідно.

Алгебраїчне рівняння для трансформанти матиме вигляд:

$$l^{a}\hat{s}(l)+a_{M,K}\hat{s}(l)=\hat{h}_{M,K}(l)+c_{M,K}, \tag{6}$$

де $\hat{h}_M=Et^{b-a}l^{b}\hat{e}(l)$ – лапласовий образ перетворення функції $h_M(t)$ для моделі Максвелла; $\hat{h}_K(l)=\dfrac{E_2}{t^{a}}(\hat{e}(l)+(tl)^{b}D_t^{b}\hat{e}(l))$ – лапласовий образ перетворення функції $h_K(t)$ для моделі Кельвіна; $c_M=s^{(a-1)}(0+)-Et^{b-a}e^{(b-1)}(0+)$, $c_K=s^{(a-1)}(0+)-E_2t^{b-a}e^{(b-1)}(0+)$ – деякі коефіцієнти для моделі Максвелла і Кельвіна відповідно; для дробового показника a використано [1], що $f^{(a-1)}(0+)=\lim_{x\downarrow 0}\dfrac{1}{\Gamma(1-a)}\displaystyle\int_0^x\frac{f(x)}{(x-x)^{a}}dx$.

З рівняння (6) отримаємо:

$$\hat{s}(l)=\frac{\hat{h}_{M,K}(l)}{l^{a}+a_{M,K}}+\frac{c_{M,K}}{l^{a}+a_{M,K}}. \tag{7}$$

Для здійснення оберненого перетворення Лапласа зручно подати вираз $\frac{1}{l^{a}+a_{M,K}}$ у вигляді

$$\frac{1}{l^{a}+a_{M,K}}=l^{-a}\frac{1}{1+a_{M,K}l^{-a}}=\sum_{j=0}^{\infty}\left(-a_{M,K}\right)^{j}l^{-aj-a}. \tag{8}$$

Тоді

$$L^{-1}\{\frac{1}{l^{a}+a_{M,K}}\}(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(-a_{M,K}\right)^{j}L^{-1}\{l^{-aj-a}\}(t), \tag{9}$$

де L^{-1} – оператор оберненого перетворення Лапласа.

Використовуючи [1] співвідношення $L^{-1}\{l^{-g}\}(x)=\frac{x^{g-1}}{\Gamma(g)}$, для нашого випадку отримаємо

$$L^{-1}\{\frac{1}{l^{a}+a_{M,K}}\}(t)=t^{a-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(-a_{M,K}t^{a}\right)^{j}}{\Gamma(aj+a)} \tag{10}$$

Для подальших перетворень скористаємось функцією Міттаг – Леффлера [2]:

$$E_{a,b}(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{j}}{\Gamma(aj+b)} \tag{11}$$

Тоді (8) зможемо переписати у вигляді

$$L^{-1}\{\frac{1}{l^{a}+a_{M,K}}\}(t)=t^{a-1}E_{a,a}\left(-a_{M,K}t^{a}\right). \tag{12}$$

Використовуючи теорему про згортку двох функцій [1] та підставляючи відповідні значення $a_{M,K}$ та $h_{M,K}(t)$, отримаємо розв'язок рівнянь (1) та (3) відносно напруження $s(t)$:

$$s_{M}(t)=c_{M}t^{a-1}E_{a,a}\left(-\frac{t^{a}}{t^{a}}\right)+Et^{b-a}\int_{0}^{t}(t-z)^{a-1}E_{a,a}\left(-\frac{(t-z)^{a}}{t^{a}}\right)D_{z}^{b}e(z)dz, \tag{13}$$

$$s_{K}(t)=c_{K}t^{a-1}E_{a,a}\left(-\frac{(E_{1}+E_{2})t^{a}}{E_{1}t^{a}}\right)+\frac{E_{2}}{t^{a}}\int_{0}^{t}(t-z)^{a-1}E_{a,a}\left(-\frac{(E_{1}+E_{2})(t-z)^{a}}{E_{1}t^{a}}\right)(e(z)+t^{b}D_{z}^{b}e(z))dz, \tag{14}$$

де $0<a\le 1,\ 0\le b\le 1$.

Використовуючи співвідношення (4), перепишемо рівняння (2) у вигляді

$$s_{F}(t)=ED_{t}\int_{0}^{t}(\frac{t^{a}(t-z)^{-a}}{\Gamma(1-a)}+\frac{t^{b}(t-z)^{-b}}{\Gamma(1-b)})e(z)dz,\ \ 0\le a,b<1, \tag{15}$$

де D_{t} – цілочислова похідна за часом t.

Знайдемо розв'язок відносно деформації $e(t)$ для моделі Фойгта. Виконавши перетворення Лапласа з рівняння (2), отримаємо

$$(l^{b}+t^{a-b}l^{a})\hat{e}(l)=\hat{h}_{F}(l)+c_{F}, \tag{16}$$

де $\hat{h}_{F}(l)=\hat{s}(l)/Et^{b}$ – лапласовий образ перетворення функції $h_{F}(t)$ для моделі Фойгта, $c_{F}=e^{(b-1)}(0+)+t^{a-b}e^{(a-1)}(0+)$ – деякий коефіцієнт для моделі Фойгта.

Трансформанта розв'язку має вигляд

$$\hat{e}(l)=\frac{\hat{h}_F(l)+c_F}{l^b+t^{a-b}l^a}. \qquad (17)$$

Враховуючи вираз

$$\hat{e}(l)=\left[c_F+\hat{h}_F(l)\right]\sum_{j=0}^{\infty}\left(-t^{a-b}\right)^j l^{(a-b)j-b}, \qquad (18)$$

що представляє лапласовий образ перетворення степеневої функції t^{b-1} і двопараметричної функції Міттаг – Леффлера (11),отримаємо

$$L^{-1}\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(-t^{a-b}\right)^j l^{(a-b)j-b}\}(t)=t^{b-1}E_{b-a,b}\left(-\left(\frac{t}{t}\right)^{b-a}\right). \qquad (19)$$

Знову використовуючи теорему про згортку [1], отримуємо вираз для деформації у випадку моделі Фойгта

$$e_F(t)=c_F t^{b-1}E_{b-a,b}\left(-\left(\frac{t}{t}\right)^{b-a}\right)+\frac{1}{Et^b}\int_0^t(t-z)^{b-1}E_{b-a,b}\left(-\left(\frac{t-z}{t}\right)^{b-a}\right)s(z)dz, \qquad (20)$$

де $0\le a<b\le 1$.

Аналогічно у випадку моделі Кельвіна можна знайти вираз для деформації із рівняння (3), використовуючи метод перетворення Лапласа. Він має вигляд:

$$e_K(t)=\tilde{c}_K t^{b-1}E_{b,b}\left(-\frac{t^b}{t^b}\right)+\int_0^t(t-z)^{b-1}E_{b,b}\left(-\frac{(t-z)^{b-a}}{t^{b-a}}\right)\left[\frac{t^{a-b}}{E_2}D_z^a s(z)+\frac{(E_1+E_2)}{E_1E_2t^b}s(z)\right]dz, \qquad (21)$$

де $\tilde{c}_K=e^{(b-1)}(0+)-\frac{t^{a-b}}{E_2}s^{(a-1)}(0+),\ 0\le a\le 1,\ 0<b\le 1.$

Використовуючи властивості дробових похідних [1] отримуємо вираз, що описує деформацію для моделі Максвелла

$$e_M(t)=\frac{1}{Et^b}\int_0^t\left(\frac{t^a(t-z)^{b-a-1}}{\Gamma(b-a)}+\frac{(t-z)^{b-1}}{\Gamma(b)}\right)s(z)dz,\quad 0\le a<b\le 1. \qquad (22)$$

У застосуванні лінійної теорії в'язкопружності використовуються математичні моделі зв'язку між напруженнями і деформаціями в інтегральній формі з використанням ядер повзучості і релаксації [17].

За наведеними вище виразами для напруження $s(t)$ та деформації $e(t)$ можемо визначити для кожної з моделей ядра повзучості $\Pi(t-z)$ та релаксації $R(t-z)$, які входять в інтегральні рівняння моделей.

Для моделі Максвелла ядра повзучості та релаксації отримуємо із співвідношень (13), (22):

$$\Pi_M(t-z)=\frac{1}{Et^b}\left(\frac{t^a(t-z)^{b-a-1}}{\Gamma(b-a)}+\frac{(t-z)^{b-1}}{\Gamma(b)}\right), \qquad (23)$$

$$R_M(t-z)=Et^{b-a}(t-z)^{a-1}E_{a,a}\left(-\frac{(t-z)^a}{t^a}\right). \qquad (24)$$

Аналогічно для моделей Фойгта та Кельвіна отримаємо ядра повзучості та релаксації із співвідношень (14), (15), (20) та (21):

$$\Pi_F(t-z)=\frac{1}{Et^b}(t-z)^{b-1}E_{b-a,b}\left(-\frac{(t-z)^{b-a}}{t^{b-a}}\right), \qquad (25)$$

$$R_F(t-z)=ED_t\left(\frac{t^a(t-z)^{-a}}{\Gamma(1-a)}+\frac{t^b(t-z)^{-b}}{\Gamma(1-b)}\right), \qquad (26)$$

$$\Pi_K(t-z)=(t-z)^{b-1}E_{b,b}\left(-\frac{(t-z)^b}{t^b}\right), \qquad (27)$$

$$R_K(t-z)=E_2t^{-a}(t-z)^{a-1}E_{a,a}\left(-\frac{(E_1+E_2)(t-z)^a}{E_1t^a}\right). \qquad (28)$$

Важливим для дослідження в'язкопружних середовищ в умовах взаємодії з процесами тепло перенесення є термодинамічні функції. Лише для трьох класичних моделей відомі у явному вигляді термодинамічні параметри стану [26]. Для визначення термодинамічних функцій дробово-диференціальних моделей Максвелла, Фойгта та Кельвіна, як і у випадку звичайних моделей, енергію u, ентропію S та вільну енергію Ψ можна розглядати як функції температури J та пружної деформації e_1, а функцію розсіювання енергії W^* як функцію в'язкої деформації e_2.

Вирази, які описують термодинамічні функції, мають вигляд [39]:

$$\Psi=-\frac{c_r}{2T_0}J^2+\frac{E}{2}\left(e_1^T\right)^2, \qquad (29)$$

$$S=\frac{c_r}{T_0}J+a^*Ee_1^T, \qquad (30)$$

$$W^*=m\left(D_te_2\right)^2, \qquad (31)$$

де $e_1^T=e_1-a^*J$ – пружна складова деформації e_1 елементу з врахуванням лінійного розширення, $J=T-T_0$, T – температура; T_0 – початкова температура; c_r – початкова об'ємна теплоємність; E – модуль пружності; a^* – коефіцієнт теплового (лінійного) розширення, m – в'язкість.

Використовуючи формули складання порядків та властивості обернених операторів для дробових похідних [1], знайдемо e_1^T за рівнянням (1), (2) та (3). Зауважимо, що модель Кельвіна складається із двох пружних елементів, тому $e_1^T=e_1^{T'}+e_2^{T'}$, де $e_1^{T'}$, $e_2^{T'}$ – пружні складові повної деформації елемента Фойгта та пружного елемента відповідно. Враховуючи структурні та фізичні відношення [3] для моделей Максвелла, Кельвіна і Фойгта, отримаємо:

$$e_{1\,(M)}^T=\frac{1}{(1+w^aD_t^{-a})}\left(w^{a-b}D_t^{b-a}e^T(t)+a^*J\frac{(wt)^{a-b}}{\Gamma(1+a-b)}\right),\ 0<b<a\le 1; \qquad (32)$$

$$e_{1\,(K)}^T=\frac{1}{A}\left(w^{a-b}D_t^{b-a}e^T(t)+w^aD_t^{-a}e^T(t)+a^*JB\right)+C,\ 0<b<a\le 1; \qquad (33)$$

$$e_{1\,(F)}^T=\frac{D_t^ae(t)}{w^a}+\frac{D_t^be(t)}{w^b}-\frac{D_te(t)}{w},\ 0\le a,b\le 1, \qquad (34)$$

де D_t^{-a} – обернений для D_t^a оператор, $e^T(t)=e(t)-a^*J$, $A=1+w^a\frac{E_1+E_2}{E_1}D_t^{-a}$, $B=\frac{(wt)^{a-b}}{\Gamma(1+a-b)}+\frac{(wt)^a}{\Gamma(1+a)}$, $C=\int_0^t h(t-t')de^T(t')$, $h(t)$ – функція Хевісайда, $w=\frac{Ea_T}{m}$, a_T – функція температурного зміщення.

Для дробово-диференціальної моделі Максвелла з врахуванням співвідношень $e=e_1+e_2$, $e_2=e^T-e_1^T$ отримаємо деформацію в'язкого елемента

$$e_{2(M)}=\frac{1}{(1+w^aD_t^{-a})}\left(e^T(t)+w^aD_t^{-a}e^T(t)-w^{a-b}D_t^{b-a}e^T(t)-a^*J\frac{(wt)^{a-b}}{\Gamma(1+a-b)}\right) \qquad (35)$$

Отже, враховуючи (29)–(31) та вищеотримані вирази для деформацій (32)–(35), для дробово-диференціальних моделей Максвелла, Кельвіна та Фойгта отримали такі термодинамічні функції:

$$\Psi_M = -\frac{c_r}{2T_0} J^2 + \frac{E}{2} \frac{1}{(1 + w^a D_t^{-a})^2} \left(w^{a-b} D_t^{b-a} e^T(t) + a^* J \frac{(wt)^{a-b}}{\Gamma(1 + a - b)} \right)^2, \tag{36}$$

$$S_M = \frac{c_r}{T_0} J + a^* E \frac{1}{(1 + w^a D_t^{-a})} \left(w^{a-b} D_t^{b-a} e^T(t) + a^* J \frac{(wt)^{a-b}}{\Gamma(1 + a - b)} \right), \tag{37}$$

$$W^*{}_M = \frac{E a_T}{w} \left(D_t \left(\frac{1}{(1 + w^a D_t^{-a})} \left(e^T(t) + w^a D_t^{-a} e^T(t) - w^{a-b} D_t^{b-a} e^T(t) - a^* J \frac{(wt)^{a-b}}{\Gamma(1 + a - b)} \right) \right) \right)^2, \tag{38}$$

$$\Psi_K = -\frac{c_r}{2T_0} J^2 + \frac{E_2}{2} \left(\frac{1}{A} \left(w^{a-b} D_t^{b-a} e^T(t) + w^a D_t^{-a} e^T(t) + a^* J B \right) + C \right)^2, \tag{39}$$

$$S_K = \frac{c_r}{T_0} J + a^* E_2 \frac{1}{A} \left(w^{a-b} D_t^{b-a} e^T(t) + w^a D_t^{-a} e^T(t) + a^* J B \right) + C, \tag{40}$$

$$W^*{}_K = \frac{E_2 a_T}{w} (D_t e(t))^2, \tag{41}$$

$$\Psi_F = -\frac{c_r}{2T_0} J^2 + \frac{E}{2} \left(\frac{D_t^a e(t)}{w^a} + \frac{D_t^b e(t)}{w^b} - \frac{D_t e(t)}{w} \right)^2, \tag{42}$$

$$S_F = \frac{c_r}{T_0} J + a^* E \left(\frac{D_t^a e(t)}{w^a} + \frac{D_t^b e(t)}{w^b} - \frac{D_t e(t)}{w} \right), \tag{43}$$

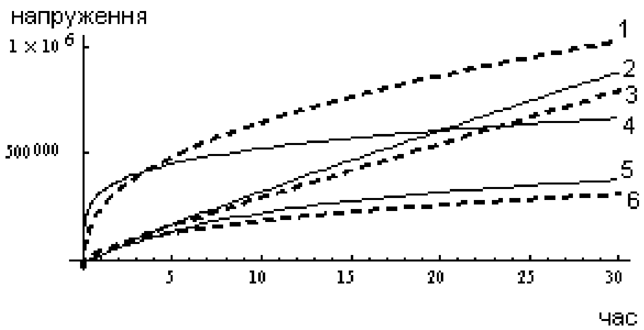
$$W^*{}_F = \frac{E a_T}{w} (D_t e(t))^2. \tag{44}$$

Аналіз результатів числового моделювання

Числовий експеримент визначення залежності напруження $s(t)$ та деформації $e(t)$ від часу t для моделей Максвелла, Кельвіна та Фойгта наведемо для сосни, модуль пружності якої E $(E = 10000 \text{МП}a)$.

На рис. 1 показано залежність напруження від деформації для моделей Максвелла, Кельвіна та Фойгта для фіксованого порядку дробової похідної b $(b = 0{,}7)$ та змінного порядку дробової похідної a. Проаналізувавши отримані результати та графічні залежності, зображені на рис. 1, можна зробити висновки, що для моделей Максвелла та Кельвіна найбільшого значення функції напруження досягається при більшому значенні a. Порівнюючи моделі між собою за фіксованих значень a та b, можна зауважити, що найбільшого значення функція напруження досягає за моделі Фойгта, а найменшого – за моделі Максвелла.

На рис. 2 проілюстровано залежність функції деформації від часу. Аналогічно як і у попередньому випадку проаналізовано отримані результати та графічні залежності для змінного порядку дробової похідної a. Найбільшого значення досягає функція деформації для моделі Максвелла, а найменшого – функція деформації для моделі Фойгта. Зафіксувавши показник дробової похідної b $(b = 1)$ та змінюючи показник дробової похідної a, можна зробити висновок, що для усіх моделей із збільшенням дробового показника a спостерігається зменшення значення функції деформації.



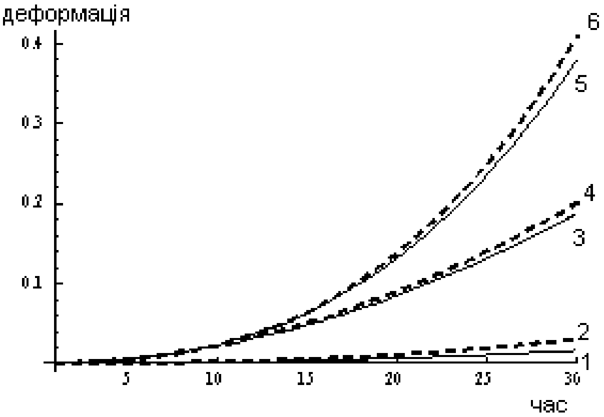


Рис. 1. Залежності напружень

1 – модель Фойгта ($a = 0{,}5; b = 0{,}7$)
2 – модель Кельвіна ($a = 0{,}9; b = 0{,}7$)
3 – модель Кельвіна ($a = 0{,}5; b = 0{,}7$)
4 – модель Фойгта ($a = 0{,}9; b = 0{,}7$)
5 – модель Максвелла ($a = 0{,}9; b = 0{,}7$)
6 – модель Максвелла ($a = 0{,}5; b = 0{,}7$)

Рис. 2. Залежності деформацій

1 – модель Фойгта ($a = 0{,}7; b = 1$)
2 – модель Фойгта ($a = 0{,}5; b = 1$)
3 – модель Кельвіна ($a = 0{,}7; b = 1$)
4 – модель Кельвіна ($a = 0{,}5; b = 1$)
5 – модель Максвелла ($a = 0{,}7; b = 1$)
6 – модель Максвелла ($a = 0{,}5; b = 1$)

Висновки

Розглянуто математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів у фрактальних середовищах з використанням апарату дробового інтегро-диференціювання. Для узагальнених дробових моделей стандартних типів визначено деформації та напруження.

Отримано формули для опису ядер повзучості та релаксації, які входять в інтегральні співвідношення моделей фрактального типу. Отримано вирази для визначення основних термодинамічних функцій таких моделей. Розроблене програмне забезпечення для дослідження впливу параметрів дробового диференціювання на реологічні властивості в'язкопружних середовищ.

Наведені результати можуть бути використані у задачах параметричної ідентифікації математичних моделей в'язкопружних середовищ з фрактальною структурою.

1. Учайкин В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. – Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008. – 512 с. 2. Фракталы и дробные операторы / под общ. ред. А. Х. Гильмутдинова. Казань: Изд-во «Фэн» Академии наук РТ, 2010. – 488 с.3. B.J. West, M. Bologna and P. Grigolini, The Physics of Fractal Operators, Springer-Verlag, New York 2003. – 354 p. 4. Tenreiro J. Machado, V. Kiryakova, F. Mainardi, Recent history of fractional calculus // Commun Nonlinear Science and Numer Simulat. – 2011. – Vol. 16. – P. 1140–1153. 5. Podlubny I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999. – 340 s. 6. Нахушев А. М. Дробное исчисления и его применение / А. М. Нахушев. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с. 7. Нигматуллин Р. Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация / Р. Р. Нигматуллин // Теоретическая и математическая физика. – 1992. – Т. 90. – №3. – С. 354–368. 8. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с. 9. Cottrill-Shepherd K., Naber M. Fractional differential forms // Journal of Mathematical Physics. Vol. 42. No. 5. (2001) 2203–2212. 10. Летников, А. В. Теория дифференцирования с произвольным указателем / А. В. Летников // Мат. сб. – 1868. – Т. 3, № 1. – С. 1–68. 11. Бутковский А. Г. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. / А. Г. Бутковский, С. С. Постнов, Е. А. Постнова // Автоматика и телемеханика. – 2013. – # 4. – С. 3–29. 12. Post E. U. Generalized Differentiation // Trans. of Amer. Math Soc. – 1930. – Vol. 32. – № 4. – P. 723–781. 13. Zavada P.

Operator of fractional derivative in the complex plane // Communications in Mathematical Physics. – 1998. – Vol. 192. – P. 261–285. 14. Chen Y. Yan Zhang. Applications of Fractional Exterior Differential in The Dimension space // Appl. Math. Mech. 2003. V. 24. N 3. –P. 216–260. 15. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху; [отв. ред. А. П. Солдатов]; Научно-иследовательский ин-т приклад. математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – М.: Наука, 2005. – 199 с. 16. Васильев В. В. Дробное исчисление и аппроксимационные методи в моделировании динамических систем. Научное издание / В. В. Васильев, Л. А. Симак. – К.: НАН Украины, 2008. – 256 с. 17. Lorenzo C. F., Hartley T. T., Variable Order Distributed Order fractional Operators // Nonlin. Dyn. 2002, V.29, p. 57–98. 18. Valerio D., da Costa J. S. Variable-Order Fractional Derivatives and their Numerica Aproximations // Signal Proc. 2011, V.91, p. 470–483. 19. Sun H., Chen Y ., Chen W. Time Fractional Differential Equation Model with Randow Derivative Order // Proc. ASME int. Design Engin. Technical Conf. Computers and Inform. in. Engin. Conf. /DETC/CIE 2009, Paper If DETC 2009-87483 (6 pages). 20. Лавренюк М. Моделі механіки де формівного твердого тіла неоднорідних середовищ.: Навчальний посібник / М. Лавренюк. – К.в: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2012. – 86 с. 21. Шермергор Т. Д. Об использовании операторов дробного дифференцирования для описания наследственных свойств материалов // ПМТФ. 1966. – №6. – С. 118–121. 22.Сургуладзе Т. А. О гиперболичности некоторых одномерных уравнений движения вязкоупругости // Мат. модел. систем и процесов . 2002. – № 10. – С. 131–64. 23. Победря Б. Е. Модели линейной теории вязко-упругости // МТТ. – 2005. № 6. – С. 121–134. 24. Tschoegl, N.W. The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior. – Berlin.: Springer – 1989. 25. Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus. New York-London: Academic Press. 1974. 26. Победря Б. Е. Модели механики сплошной среды // Изв. РАН МТТ. 200. № 3. – С. 47–59. 27. Дацко Б. Й. Математичне моделювання нелінійної динаміки в бістабільних системах реакції-дифузії з дробовими похідними / Б. Й. Дацко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – Т. 54, № 2. – С. 163–172. 28. Datsko B. Y., Gafiychuk V. V. Different types of instabilities and complex dynamics in reaction-diffusion systems with fractional derivatives // Computational and Nonlinear Dynamics. – 2012. – DOI No: CND-09-1119. 29. V. Gafiychuk, B. Datsko, Mathematical modeling of different types of instabilities in time fractional reaction-diffusion systems, Computers and Mathematics with Applications, 59, 1101–1107 (2010). 30. П'янило Я. Д., Васюник М., Васюник І. Використання многочленів Лагерра до спектрального методу розв'язання рівнянь дробових похідних за часом // Фізико- математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013, №17. – С. 163–168. 31. П'янило Я. Д., Васюник М., Васюник І. Дослідження спектрального методу розв'язання рівнянь у дробових похідних за часом у базисі многочленів Лагерра // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. № 18. – С. 173–180. 32. Povstenko Y. Fundamental solutions to time-fractional heat conduction equations in two joint half-lines // Cent. Eur. J. Fhys.- 11(10), 2013 p. 1284–1294. 33. Povstenko Y. Neumanuboundary-value problems for a time- fractional diffusion -walue equation in half-plane // J. Computers Mathematics with Applications, Vol.64, 11, 2012 p.3183–3192. 34. Povstenko Y. Fractional Heat Conduction in an Infinite Medium with a Spherical Inclusion // Entropy. Vol. 15 (October 2013) p. 4122–4133. 35. Sokolowskyy Ya. Mathematical Modelling of Non-Isothermal Moisture Transfer and Rheological Behavior in Cappilary-Porous Materrials with Fractal Structure During Drying / Sokolowskyy Ya., Shymanskyi V. // Computer and Information Science, Vol 4, №4, 2014. – P.17–29. 36. Соколовський Я. І. Математична модель теплового перенесення та напруженодеформівного стану у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою / Соколовський Я. І., Шиманський В. М. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2012. – Вип. 16. – С.133–141. 37. Соколовський Я. І. Фрактальна модель тепло і масоперенесення у капілярно-пористих матеріалах / Соколовський Я. І., Шиманський В. М // Вісник національного університету «Львівська політехніка»: Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів: НУ "ЛП", 2011. – №694. – С.424–428. 38. Бейболаев В. Д. Численний метод решения математической модели теплопереноса в середах с фрактальной структурой // Фундаментальные исследования. – 2007. – № 12. – С. 249–251. 39. Ильюшин А. А. Основы математической теории термовязко-упругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. – М.: Наука, 1970. – 280 с.