handbook / E. Nikolaidis, D. M. Ghiocel, S. Singhal. – New York: CRC Press, 2004. – 1216 p. 5. Wit E. All models are wrong: an introduction to model uncertainty / E. Wit, E. Van den Heuvel, J.-W. Romeijn // Statistica Neerlandica. – Vol. 66. – No. 3. – 2012. – P. 217–236. 6. Gibbs B. P. Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling / B. P. Gibbs. – Hoboken (New Jersey): John Wiley & Sons Inc., 2011. – 627 p. 7. Gyorfi L. Distribution-free theory of nonparametric regression / L. Gyorfi, M. Kohler, A. Krzyzak, H. A. Walk. – New York: Springer-Verlag, 2002. – 664 p. 8. Bernardo J. M. Bayesian theory / J. M. Bernardo, A. F. M. Smith. – New York: John Wiley & Sons, Ltd, 2000. – 586 p. 9. Press S. J. Subjective and objective Bayesian statistics / S. J. Press. – Hoboken: John Wiley & Sons, Ltd, 2003. – 558 p. 10. Bolstad W. M. Understanding computational Bayesian statistics / W. M. Bolstad. – Hoboken (New Jersey): John Wiley & Sons, Ltd, 2010. – 334 p. 11. Lindley D. V., Smith A. F. M. Bayes estimates for the linear model / D. V. Lindley, A.F. M. Smith // J. Royal Statist. Soc. – Vol. 34B. – 1972. – P. 1–41.

УДК 681.5.015:007

Г. Ракитянська
Вінницький національний технічний університет

РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЧІТКИХ ЛОГІЧНИХ РІВНЯНЬ У ЗАДАЧАХ ОБЕРНЕНОГО ВИВЕДЕННЯ

Розглянуто задачу оберненого логічного виведення на основі багатовимірних нечітких відношень. Запропоновано метод розв'язання систем нечітких логічних рівнянь з розширеною max-min композицією та еквівалентних систем з ієрархічною max-min/min-max композицією. Доведено властивості множини розв'язків таких систем. Задача знаходження множини розв'язків формулюється у вигляді задачі оптимізації, для розв'язання якої використовується генетичний алгоритм. Запропонований підхід ілюструється прикладом технічної діагностики.

Ключові слова: обернене логічне виведення, композиційне правило виведення, багатовимірні нечіткі відношення, розв'язання систем нечітких логічних рівнянь.

In this paper the problem of inverse logical inference based on multivariable fuzzy relations is considered. The method for solving systems of fuzzy logical equations with the extended max-min composition and equivalent systems with the hierarchical max-min/min-max composition is proposed. The properties of the solution set for such systems are also proven. The problem of the solution set finding is formulated in the form of the optimization problem which is solved using the genetic algorithm. The proposed approach is illustrated by the example of technical diagnosis.

Key words: inverse logical inference, compositional rule of inference, multivariable fuzzy relations, solving systems of fuzzy logical equations.

Вступ

Широке коло задач, які виникають у техніці, медицині, економіці та інших сферах і потребують відновлення причин за спостережуваними наслідками, належить до класу обернених задач [1]. Зручним інструментом формалізації експертної інформації під час моделювання причинно-наслідкових зв'язків є теорія нечітких множин [2]. Модель об'єкта будується на основі композиційного правила виведення Заде [2], яке зв'язує вхідні та вихідні змінні об'єкта (причини і наслідки) за допомогою матриці нечітких відношень. Задача відновлення входів (причин) формулюється у вигляді оберненого нечіткого логічного виведення і потребує розв'язання системи нечітких логічних рівнянь, яка описує залежність «входи – виходи». Недостатнє використання оберненого виведення зумовлене відсутністю ефективних алгоритмів розв'язання таких систем.

Аналіз досліджень та публікацій

Аналітичні методи розв'язання нечітких логічних рівнянь зі спрощеною max-min композицією досліджуються протягом багатьох років [3, 4]. Множина розв'язків такої системи рівнянь визначається єдиним максимальним розв'язком і множиною мінімальних розв'язків [3]. Задача пошуку множини мінімальних розв'язків належить до класу NP-складних [5].

Нечіткі логічні рівняння зі спрощеною max-min композицією розглядаються як нечіткий апроксиматор "один вхід – один вихід" [6]. Обернене виведення на основі багатовимірних нечітких відношень потребує модуляризації системи рівнянь, тобто представлення її у вигляді сукупності підсистем "один вхід – один вихід" з використанням багаторівневого правила виведення [7–9]. Такі структури не застосовують у задачах оберненого виведення, оскільки не досліджено властивості розв'язків багатовимірних нечітких логічних рівнянь.

У [10–12] запропоновано підхід до розв'язання задач оберненого виведення на основі нечітких відношень і правила спрощеної max-min композиції. Задача знаходження розв'язків нечітких логічних рівнянь формулювалась у вигляді задачі оптимізації, для розв'язання якої використовувався генетичний алгоритм. Основні генетичні операції для реалізації пошуку розв'язків визначено у [13]. У роботі [14] цей підхід розвинено для нечітких правил ЯКЩО–ТО.

Формулювання цілі статті

Метою цієї роботи є узагальнення підходу [10–12] для багатовимірних нечітких відношень. В цьому випадку задача оберненого виведення потребує розв'язання системи нечітких логічних рівнянь з розширеною (агрегаційною) max-min композицією [6] або еквівалентної системи з ієрархічною max-min/min-max композицією [14]. З метою розроблення ефективних алгоритмів розв'язання систем нечітких логічних рівнянь, які описують залежність "входи – виходи", постає завдання дослідження властивостей розв'язків таких систем, яке і вирішується в цій статті.

1. Нечіткі логічні рівняння

Розглядається об'єкт з n входами і m виходами. Виходи об'єкта асоціюються зі спостережуваними наслідками (симптомами). Входи відповідають причинам спостережуваних наслідків (діагнозам). Задача оберненого виведення полягає у відновленні причин (входів) за спостережуваними наслідками (виходами). Входи і виходи розглядаються як лінгвістичні змінні, для оцінки яких використано нечіткі терми.

Введемо позначення: $\{x_1,...,x_n\}$ – множина вхідних параметрів, $x_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$, $i=\overline{1,n}$; $\{y_1,...,y_m\}$ – множина вихідних параметрів, $y_j \in [\underline{y}_j, \overline{y}_j]$, $j=\overline{1,m}$; $\{c_{i1},...,c_{ik_i}\}$ – множина нечітких термів для оцінки параметра x_i, $i=\overline{1,n}$; $\{e_{j1},...,e_{jq_j}\}$ – множина нечітких термів для оцінки параметра y_j, $j=\overline{1,m}$. Множину вхідних і вихідних терм-оцінок перепозначимо так: $\{C_1,...,C_N\}=\{c_{11},...,c_{1k_1},...,c_{n1},...,c_{nk_n}\}$ – множина нечітких причин, де $N=k_1+...+k_n$; $\{E_1,...,E_M\}=\{e_{11},...,e_{1q_1},...,e_{m1},...,e_{mq_m}\}$ – множина нечітких наслідків, де $M=q_1+...+q_m$.

Моделювання причинно-наслідкових зв'язків здійснюється за допомогою інтерпретації розширеного (агрегаційного) [6] або ієрархічного [14] композиційного правила виведення.

Взаємозалежність "причини – наслідки" задамо системою матриць нечітких відношень "один вхід – один вихід" $\mathbf{R}_{ij} \subseteq c_{il} \times e_{jp} = [r_{il,jp}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $l=\overline{1,k_i}$, $p=\overline{1,q_j}$], яка еквівалентна нечіткій матриці відношень “багато входів – багато виходів” $\mathbf{R} \subseteq C_I \times E_J = [r_{IJ},\ I = \overline{1,N},\ J = \overline{1,M}]$. Елемент матриці $\mathbf{R}$, $r_{IJ} \in [0,\ 1]$, характеризує ступінь впливу причини C_I на виникнення наслідку E_J.

За наявності матриці $\mathbf{R}$ залежність “входи – виходи” описується за допомогою розширеного композиційного правила виведення [6]

$$(\boldsymbol{\mu}^{B_1},...,\boldsymbol{\mu}^{B_m}) = (\boldsymbol{\mu}^{A_1},...,\boldsymbol{\mu}^{A_n}) * \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & ... & \mathbf{R}_{1m} \\ ... & ... & ... \\ \mathbf{R}_{n1} & ... & \mathbf{R}_{nm} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

де $(\boldsymbol{\mu}^{A_1},...,\boldsymbol{\mu}^{A_n}) = ((\mu^{c_{11}},...,\mu^{c_{1k_1}}),...,(\mu^{c_{n1}},...,\mu^{c_{nk_n}}))$ або $\boldsymbol{\mu}^C = (\mu^{C_1},...,\mu^{C_N})$ – вектор мір значущостей причин; $(\boldsymbol{\mu}^{B_1},...,\boldsymbol{\mu}^{B_m}) = ((\mu^{e_{11}},...,\mu^{e_{1q_1}}),...,(\mu^{e_{m1}},...,\mu^{e_{mq_m}}))$ або $\boldsymbol{\mu}^E = (\mu^{E_1},...,\mu^{E_M})$ – вектор мір значущостей наслідків; $*$ – операція ($\mathbf{o}$, $\mathbf{I}$) [6].

Зі співвідношення (1) випливає система нечітких логічних рівнянь

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\mu}^{B_1} = \boldsymbol{\mu}^{A_1}\ \mathbf{o}\,\mathbf{R}_{11}\ \mathbf{I}\ ...\ \mathbf{I}\ \boldsymbol{\mu}^{A_n}\ \mathbf{o}\,\mathbf{R}_{n1} \\ ... \\ \boldsymbol{\mu}^{B_m} = \boldsymbol{\mu}^{A_1}\ \mathbf{o}\,\mathbf{R}_{1m}\ \mathbf{I}\ ...\ \mathbf{I}\ \boldsymbol{\mu}^{A_n}\ \mathbf{o}\,\mathbf{R}_{nm} \end{gathered} \tag{2}$$

З урахуванням того, що в теорії нечітких множин операція $\mathbf{o}$ асоціюється з max-min, а операції $\mathbf{I}$ відповідає *min*, система (2) переписується у вигляді:

$$\mu^{e_{jp}} = \min_{i=\overline{1,n}} [\max_{l=\overline{1,k_i}} (\min(\mu^{c_{il}}, r_{il,jp}))],\quad j = \overline{1,m},\ p = \overline{1,q_j}. \tag{3}$$

Взаємозв’язок «причини – наслідки» може задаватись ієрархічною системою матриць відношень $\mathbf{V} \subseteq C_I \times P_L = [v_{IL},\ I = \overline{1,N},\ L = \overline{1,K}]$ і $\mathbf{W} \subseteq P_L \times E_J = [w_{LJ},\ L = \overline{1,K},\ J = \overline{1,M}]$. Елемент матриці $\mathbf{V}$, $v_{IL} = 1(0)$, визначає наявність (відсутність) терма C_I в комбінації причин P_L. Елемент матриці $\mathbf{W}$, $w_{LJ} \in [0,\ 1]$, характеризує ступінь впливу комбінації причин P_L на виникнення наслідку E_J.

За наявності матриць $\mathbf{W}$ і $\mathbf{V}$ залежність «входи – виходи» описується за допомогою ієрархічного композиційного правила виведення:

$$\boldsymbol{\mu}^E = \boldsymbol{\mu}^P\ \mathbf{o}\,\mathbf{W}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\mu}^P = \boldsymbol{\mu}^C \bullet \overline{\mathbf{V}}, \tag{5}$$

де $\boldsymbol{\mu}^P = (\mu^{P_1},...,\mu^{P_K})$ – вектор мір значущостей комбінацій причин P_L; $\overline{\mathbf{V}}$ – матриця інверсних значень ваг термів; $\mathbf{o}$ ($\bullet$) – операція max-min (двоїстої min-max) композиції [3, 4].

Зі співвідношень (4) і (5) випливає ієрархічна система нечітких логічних рівнянь

$$\mu^{E_J} = \max_{L=\overline{1,K}} (\min(\mu^{P_L}, w_{LJ})),\ J = \overline{1,M}, \tag{6}$$

$$\mu^{P_L} = \min_{I=\overline{1,N}} (\max(\mu^{C_I}, \bar{v}_{IL})),\ L = \overline{1,K} \tag{7}$$

або

$$\mu^{E_J} = \max_{L=\overline{1,K}} (\min(\min_{I=\overline{1,N}} (\max(\mu^{C_I}, \bar{v}_{IL})), w_{LJ})),\ J = \overline{1,M}. \tag{8}$$

Задача оберненого логічного виведення формулюється так: за відомими матрицею $\mathbf{R}$ і нечітким вектором наслідків $\boldsymbol{\mu}^E$ необхідно знайти нечіткий вектор причин $\boldsymbol{\mu}^C$. Знаходження вектора $\boldsymbol{\mu}^C$ полягає у розв'язанні системи нечітких логічних рівнянь (3) або (8).

2. Розв'язання нечітких логічних рівнянь з розширеною max-min композицією

2.1. Задача оптимізації

Дотримуючись [10–12], задачу розв'язання системи нечітких логічних рівнянь (3) сформулюємо так. Знайти нечіткий вектор причин $\boldsymbol{\mu}^C = (\mu^{C_1}, ..., \mu^{C_N})$, який задовольняє обмеження $\mu^{C_I} \in [0,1]$, $I = \overline{1,N}$, і забезпечує найменшу відстань між спостережуваними і модельними мірами значущості наслідків системи (3):

$$F_1 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{p=1}^{q_j} \left[\mu^{e_{jp}} - \min_{i=1,n} \left[\max_{l=1,k_i} (\min(\mu^{c_{il}}, r_{il,jp})) \right] \right]^2 = \min_{\boldsymbol{\mu}^C}. \tag{9}$$

Твердження 1. Система рівнянь (3) має множину розв'язків $S(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E)$, яка визначається множиною максимальних розв'язків $\overline{S}^*(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E) = \{\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C, k = \overline{1,T}\}$, де кожному розв'язку $\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C \in \overline{S}^*$ відповідає множина мінімальних розв'язків $\underline{S}^*(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E) = \{\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C,\ l = \overline{1,H}\}$:

$$S(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E) = \bigcup_{\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C \in \overline{S}^*} \bigcup_{\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C \in \underline{S}^*} \left[\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C, \overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C \right],\ l = \overline{1,H},\ k = \overline{1,T}, \tag{10}$$

де $\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C = (\overline{\mu}_k^{C_1}, ..., \overline{\mu}_k^{C_N})$ і $\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C = (\underline{\mu}_l^{C_1}, ..., \underline{\mu}_l^{C_N})$ – вектори верхніх і нижніх границь мір значущості причин C_I, де операція об'єднання виконується над усіма $\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C \in \overline{S}^*(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E)$ і $\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C \in \underline{S}^*(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E)$.

Доведення. Оскільки агрегація підсистем "один вхід – один вихід" здійснюється виконанням операції $\wedge$ (min), то система (3) з двоїстою min–max композицією має підмножину розв'язків $D_1 \subseteq S$, яка визначається єдиним мінімальним або агрегаційним розв'язком $\boldsymbol{\mu}_a^C$ і множиною максимальних розв'язків $\overline{S}^*(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E) = \{\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C, k = \overline{1,T}\}$:

$$D_1(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E) = \bigcup_{\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C \in \overline{S}^*} \left[\boldsymbol{\mu}_a^C, \overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C \right],\ k = \overline{1,T}. \tag{11}$$

З іншого боку, оскільки система (3) містить підсистеми з max-min композицією, то єдиному агрегаційному або максимальному розв'язку $\boldsymbol{\mu}_a^C$ відповідає множина мінімальних розв'язків $\underline{S}^*(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E) = \{\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C,\ l = \overline{1,H}\}$, які визначають підмножину розв'язків $D_2 \subseteq S$:

$$D_2(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E) = \bigcup_{\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C \in \underline{S}^*} \left[\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C, \boldsymbol{\mu}_a^C \right],\ l = \overline{1,H}. \tag{12}$$

Тоді, виконавши об'єднання $D_1 \bigcup D_2$, отримуємо формулу (10), у якій інтервальні розв'язки визначаються так: $\left[\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C, \overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C \right] = \left[\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C, \boldsymbol{\mu}_a^C \right] \bigcup \left[\boldsymbol{\mu}_a^C, \overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C \right]$.

2.2. Генетичний пошук множини розв'язків

Для реалізації генетичного алгоритму розв'язання задачі оптимізації (9) хромосома визначається як вектор-рядок двійкових кодів розв'язків μ^{C_I}, $I=\overline{1,N}$ [13]. Операція схрещування полягає в обміні частин хромосом в кожному розв'язку μ^{C_I}. Функція відповідності будується на основі критерію (9).

Формують інтервали (11) і (12), багаторазово розв'язуючи задачу оптимізації (9), починаючи з пошуку її нульового розв'язку $\boldsymbol{\mu}_0^C=(\mu_0^{C_1},...,\mu_0^{C_N})$, $I=\overline{1,N}$. Встановлення агрегаційного розв'язку $\boldsymbol{\mu}_a^C=(\mu_a^{C_1},...,\mu_a^{C_N})$ здійснюється за правилом: під час пошуку нижніх границь ($\underline{\mu}_l^{C_I}$) вважають, що $\mu_a^{C_I}=\min(\overline{\mu}_k^{C_I})$, $k\le T$, а під час пошуку верхніх границь ($\overline{\mu}_k^{C_I}$) вважають, що $\mu_a^{C_I}=\max(\underline{\mu}_l^{C_I})$, $l\le H$. Нижня границя ($\underline{\mu}_l^{C_I}$) для $l=1$ лежить у діапазоні $[0,\mu_0^{C_I}]$, а для $l>1$ – в діапазоні $[0,\mu_a^{C_I}]$, причому мінімальні розв'язки $\underline{\mu}_s^{C_I}$, $s<l$, вилучаються із області пошуку. Верхня границя ($\overline{\mu}_k^{C_I}$) для $k=1$ міститься в діапазоні $[\mu_0^{C_I},1]$, а для $k>1$ – в діапазоні $[\mu_a^{C_I},1]$, причому максимальні розв'язки $\overline{\mu}_p^{C_I}$, $p<k$, вилучаються із області пошуку.

Нехай $\boldsymbol{\mu}^C(t)=(\mu^{C_1}(t),...,\mu^{C_N}(t))$ розв'язок задачі оптимізації (9) на *t*-му кроці формування інтервалів, тобто $F_1(\boldsymbol{\mu}^C(t))=F_1(\boldsymbol{\mu}_0^C)$, оскільки для всіх $\boldsymbol{\mu}^C\in D_1(\mathbf{R},\boldsymbol{\mu}^E)$ і $\boldsymbol{\mu}^C\in D_2(\mathbf{R},\boldsymbol{\mu}^E)$ значення критерію (9) однакове. Під час пошуку верхніх границь ($\overline{\mu}_k^{C_I}$) передбачається, що $\mu^{C_I}(t)\ge\mu^{C_I}(t-1)$, а під час пошуку нижніх границь ($\underline{\mu}_l^{C_I}$) передбачається, що $\mu^{C_I}(t)\le\mu^{C_I}(t-1)$. Встановлення верхніх (нижніх) границь здійснюється за правилом: якщо $\boldsymbol{\mu}^C(t)\ne\boldsymbol{\mu}^C(t-1)$, то $\overline{\mu}_k^{C_I}$ ($\underline{\mu}_l^{C_I}$)$=\mu^{C_I}(t)$, $I=\overline{1,N}$. Якщо $\boldsymbol{\mu}^C(t)=\boldsymbol{\mu}^C(t-1)$, то формування інтервального розв'язку $\left[\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C,\boldsymbol{\mu}_a^C\right]$ або $\left[\boldsymbol{\mu}_a^C,\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C\right]$ припиняється. Пошук інтервалів (11) і (12) продовжується, допоки виконується умова $\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C\ne\overline{\boldsymbol{\mu}}_p^C$ і $\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C\ne\underline{\boldsymbol{\mu}}_s^C$, $p<k$, $s<l$.

3. Розв'язання нечітких логічних рівнянь з ієрархічною max-min/min-max композицією

3.1. Задача оптимізації

Дотримуючись [10–12], задачу розв'язання системи нечітких логічних рівнянь (8) сформулюємо так. Знайти нечіткий вектор причин $\boldsymbol{\mu}^C=(\mu^{C_1},...,\mu^{C_N})$, який задовольняє обмеження $\mu^{C_I}\in[0,1]$, $I=\overline{1,N}$, і забезпечує найменшу відстань між спостережуваними і модельними мірами значущості наслідків системи (8):

$$F_2=\sum_{J=1}^{M}\left[\mu^{E_J}-\max_{L=\overline{1,K}}\left(\min\left(\min_{I=\overline{1,N}}(\max(\mu^{C_I},\bar{v}_{IL})),r_{LJ}\right)\right)\right]^2=\min_{\boldsymbol{\mu}^C}. \tag{13}$$

Твердження 2. Система рівнянь (8) має множину розв'язків $S(\mathbf{R},\boldsymbol{\mu}^E)$, яка збігається із множиною розв'язків (10) системи рівнянь (3), і визначається множиною мінімальних розв'язків

$\underline{S}^*(\mathbf{R},\boldsymbol{\mu}^E)=\{\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C,\ l=\overline{1,H}\}$, де кожному розв'язку $\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C\in\underline{S}^*$ відповідає множина максимальних розв'язків $\overline{S}^*(\mathbf{R},\boldsymbol{\mu}^E)=\{\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C, k=\overline{1,T}\}$:

$$S(\mathbf{R},\boldsymbol{\mu}^E)=\bigcup_{\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C\in\underline{S}^*}\ \bigcup_{\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C\in\overline{S}^*}\left[\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C,\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C\right],\ l=\overline{1,H},\ k=\overline{1,T}, \tag{14}$$

де $\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C=(\overline{\mu}_k^{C_1},...,\overline{\mu}_k^{C_N})$ і $\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C=(\underline{\mu}_l^{C_1},...,\underline{\mu}_l^{C_N})$ – вектори верхніх і нижніх границь мір значущості причин C_I, які збігаються із границями розв'язків множини (10).

Доведення. Формула (14) випливає із послідовного розв'язання систем (6) і (7) з max-min і двоїстою min-max композицією.

Система рівнянь (6) має множину розв'язків $Q(\mathbf{R},\boldsymbol{\mu}^E)$, яка визначається єдиним максимальним розв'язком $\overline{\boldsymbol{\mu}}^P$ і множиною мінімальних розв'язків $\underline{Q}^*(\mathbf{R},\boldsymbol{\mu}^E)==\{\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^P,\ l=\overline{1,H}\}$:

$$Q(\mathbf{R},\boldsymbol{\mu}^E)=\bigcup_{\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^P\in\underline{Q}^*}\left[\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^P,\overline{\boldsymbol{\mu}}^P\right], \tag{15}$$

де $\overline{\boldsymbol{\mu}}^P=(\overline{\mu}^{P_1},...,\overline{\mu}^{P_K})$ і $\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^P=(\underline{\mu}_l^{P_1},...,\underline{\mu}_l^{P_K})$ – вектори верхніх і нижніх границь мір значущості комбінацій причин P_L, де операція об'єднання виконується над усіма $\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^P\in\underline{Q}^*(\mathbf{R},\boldsymbol{\mu}^E)$.

Кожному інтервальному розв'язку $\left[\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^P,\overline{\boldsymbol{\mu}}^P\right]$, $l=\overline{1,H}$, системи (6) відповідає множина розв'язків $G_l(\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^P,\overline{\boldsymbol{\mu}}^P)$ системи (7), яка визначається єдиним мінімальним розв'язком $\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C\in\underline{S}^*$ і множиною максимальних розв'язків $\overline{S}^*(\overline{\boldsymbol{\mu}}^P)=\{\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C, k=\overline{1,T}\}$:

$$G_l(\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^P,\overline{\boldsymbol{\mu}}^P)=\bigcup_{\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C\in\overline{S}^*}\left[\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C,\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C\right], \tag{16}$$

де $\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C=(\underline{\mu}_l^{C_1},...,\underline{\mu}_l^{C_N})$ і $\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C=(\overline{\mu}_k^{C_1},...,\overline{\mu}_k^{C_N})$ – вектори нижніх і верхніх границь мір значущості причин C_I, де операція об'єднання виконується над усіма $\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C\in\overline{S}^*(\overline{\boldsymbol{\mu}}^P)$.

Тоді, виконавши об'єднання $\bigcup_{\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C\in\underline{S}^*}G_l(\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^P,\overline{\boldsymbol{\mu}}^P)$, отримуємо формулу (14), де інтервальні розв'язки $\left[\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C,\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C\right]$ збігаються з (10).

3.2. Генетичний пошук множини розв'язків

Для реалізації генетичного алгоритму розв'язання задачі оптимізації (13) хромосома визначається як вектор-рядок двійкових кодів розв'язків μ^{P_L} і μ^{C_I}, $L=\overline{1,K}$, $I=\overline{1,N}$ [13]. Операція схрещування виконується обміном частин хромосом в кожному розв'язку μ^{P_L} і μ^{C_I}. Функція відповідності будується на основі критерію (13).

Формування інтервалів (15) здійснюється багаторазовим розв'язанням задачі оптимізації (13) і починається з пошуку її нульового розв'язку $\boldsymbol{\mu}_0^P = (\mu_0^{P_1}, ..., \mu_0^{P_K})$. Верхня границя ($\overline{\mu}^{P_L}$) лежить у діапазоні $[\mu_0^{P_L}, 1]$. Нижня границя ($\underline{\mu}_l^{P_L}$) для $l = 1$ міститься в діапазоні $[0, \mu_0^{P_L}]$, а для $l > 1$ – в діапазоні $[0, \overline{\mu}^{P_L}]$, причому із області пошуку вилучаються мінімальні розв'язки $\underline{\boldsymbol{\mu}}_s^P$, $s < l$.

Нехай $\boldsymbol{\mu}^P(t) = (\mu^{P_1}(t), ..., \mu^{P_K}(t))$ – розв'язок задачі оптимізації (13) на t-му кроці формування інтервалів (15), тобто $F_2(\boldsymbol{\mu}^P(t)) = F_2(\boldsymbol{\mu}_0^P)$, оскільки для всіх $\boldsymbol{\mu}^P \in Q(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E)$ значення критерію (13) однакове. Під час пошуку верхніх границь ($\overline{\mu}^{P_L}$) передбачається, що $\mu^{P_L}(t) \geq \mu^{P_L}(t-1)$, а під час пошуку нижніх границь ($\underline{\mu}_l^{P_L}$) передбачається, що $\mu^{P_L}(t) \leq \mu^{P_L}(t-1)$. Встановлення верхніх (нижніх) границь здійснюється за правилом: якщо $\boldsymbol{\mu}^P(t) \neq \boldsymbol{\mu}^P(t-1)$, то $\overline{\mu}^{P_L}$ ($\underline{\mu}_l^{P_L}$)$= \mu^{P_L}(t)$, $L = \overline{1, K}$. Якщо $\boldsymbol{\mu}^P(t) = \boldsymbol{\mu}^P(t-1)$, то формування інтервального розв'язку $[\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^P, \overline{\boldsymbol{\mu}}^P]$ припиняється. Пошук інтервалів (15) продовжується, допоки виконується умова $\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^P \neq \underline{\boldsymbol{\mu}}_s^P$, $s < l$.

Формують інтервали (16), багаторазово розв'язуючи задачу оптимізації (13), починаючи з пошуку нульових розв'язків $\boldsymbol{\mu}_{0l}^C = (\mu_{0l}^{C_1}, ..., \mu_{0l}^{C_N})$ для кожного інтервального розв'язку $[\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^P, \overline{\boldsymbol{\mu}}^P]$, $l = \overline{1, H}$, системи (6). Нижня границя ($\underline{\mu}_l^{C_I}$) міститься в діапазоні $[0, \mu_{0l}^{C_I}]$. Верхня границя ($\overline{\mu}_k^{C_I}$) для $k = 1$ міститься в діапазоні $[\max(\mu_{0l}^{C_I}), 1]$, а для $k > 1$ – в діапазоні $[\max(\underline{\mu}_l^{C_I}), 1]$, причому із області пошуку вилучаються максимальні розв'язки $\overline{\mu}_p^{C_I}$, $p < k$.

Нехай $\boldsymbol{\mu}^C(t) = (\mu^{C_1}(t), ..., \mu^{C_N}(t))$ – розв'язок задачі оптимізації (13) на t-му кроці формування інтервалів (16), тобто $F_2(\boldsymbol{\mu}^C(t)) = F_2(\boldsymbol{\mu}_{0l}^C)$, оскільки для всіх $\boldsymbol{\mu}^C \in G_l(\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^P, \overline{\boldsymbol{\mu}}^P)$ значення критерію (13) однакове. Під час пошуку верхніх границь ($\overline{\mu}_k^{C_I}$) передбачається, що $\mu^{C_I}(t) \geq \mu^{C_I}(t-1)$, а під час пошуку нижніх границь ($\underline{\mu}_l^{C_I}$) – що $\mu^{C_I}(t) \leq \mu^{C_I}(t-1)$. Встановлення верхніх (нижніх) границь здійснюється за правилом: якщо $\boldsymbol{\mu}^C(t) \neq \boldsymbol{\mu}^C(t-1)$, то $\overline{\mu}_k^{C_I}$ ($\underline{\mu}_l^{C_I}$)$= \mu^{C_I}(t)$, $I = \overline{1, N}$. Якщо $\boldsymbol{\mu}^C(t) = \boldsymbol{\mu}^C(t-1)$, то формування інтервального розв'язку $[\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C, \overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C]$ припиняється. Пошук інтервалів (16) продовжується, допоки виконується умова $\overline{\boldsymbol{\mu}}_k^C \neq \overline{\boldsymbol{\mu}}_p^C$, $p < k$, і $\underline{\boldsymbol{\mu}}_l^C \neq \underline{\boldsymbol{\mu}}_s^C$, $s < l$.

4. Приклад технічної діагностики

Розглядається діагностика паливного насоса.

Вхідні параметри насоса такі: x_1 – частота обертання двигуна; x_2 – тиск у вхідній магістралі; x_3 – радіальний зазор шестерень; x_4 – витік палива; x_5 – кінематична в'язкість палива. Причинами несправності є: c_{11} – зменшення частоти обертання x_1; c_{21} – падіння тиску x_2; c_{31} – збільшення зазору x_3, тобто зношеність шестерень; c_{41} – збільшення витоку x_4, тобто порушення герметичності; c_{51} (c_{52}) – низька (висока) в'язкість палива x_5.

Вихідні параметри насоса: y_1 – продуктивність; y_2 – споживана потужність. Наслідками несправності є: e_{11} (e_{12}) – падіння (підвищення) продуктивності y_1; e_{21} (e_{22}) – падіння (підвищення) споживаної потужності y_2.

Перепозначимо множину причин і наслідків так: $\{C_1, \ldots, C_6\}=\{c_{11}, c_{21}, c_{31}, c_{41}, c_{51}, c_{52}\}$; $\{E_1, \ldots, E_4\}=\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$.

Нехай для моделювання причинно-наслідкових зв'язків використовується розширене (агрегаційне) композиційне правило виведення [6]. Тоді експертна матриця нечітких відношень має вигляд [10, 11]:

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.44 & 0.55 & 0.99 & 0 \\ 0.78 & 0 & 0.46 & 0 \\ 0.55 & 0 & 0.55 & 0.67 \\ 0.67 & 0.46 & 0.87 & 0 \\ 0 & 0.67 & 0 & 0.89 \\ 0.78 & 0.34 & 0.87 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Система нечітких логічних рівнянь у цьому випадку виглядає так:

$$\begin{gathered} \mu^{E_1} = [(\mu^{C_1} \wedge 0.44) \vee (\mu^{C_2} \wedge 0.78) \vee (\mu^{C_3} \wedge 0.55) \vee (\mu^{C_4} \wedge 0.67)] \wedge [\mu^{C_6} \wedge 0.78] \\ \mu^{E_2} = [(\mu^{C_1} \wedge 0.55) \vee (\mu^{C_4} \wedge 0.46)] \wedge [(\mu^{C_5} \wedge 0.67) \vee (\mu^{C_6} \wedge 0.34)] \\ \mu^{E_3} = [(\mu^{C_1} \wedge 0.99) \vee (\mu^{C_2} \wedge 0.46) \vee (\mu^{C_3} \wedge 0.55) \vee (\mu^{C_4} \wedge 0.87)] \wedge [\mu^{C_6} \wedge 0.87] \\ \mu^{E_4} = [\mu^{C_3} \wedge 0.67] \wedge [\mu^{C_5} \wedge 0.89] \end{gathered} \quad (17)$$

Нехай нечіткий вектор причин, заданий експертом, такий

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}^C = (\hat{\mu}^{C_1}=0.14;\ \hat{\mu}^{C_2}=0.75;\ \hat{\mu}^{C_3}=0.21;\ \hat{\mu}^{C_4}=0.67;\ \hat{\mu}^{C_5}=0.38;\ \hat{\mu}^{C_6}=0.95),$$

що означає падіння тиску і витік у магістралі за високої кінематичної в'язкості палива. В результаті прямого логічного виведення отримуємо нечіткий вектор наслідків

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}^E = (\hat{\mu}^{E_1}=0.75;\ \hat{\mu}^{E_2}=0.38;\ \hat{\mu}^{E_3}=0.67;\ \hat{\mu}^{E_4}=0.21),$$

що означає падіння продуктивності та споживаної потужності насоса.

А тепер оберненим логічним виведенням для нечіткого вектора наслідків $\hat{\boldsymbol{\mu}}^E$ відновимо нечіткий вектор причин $\boldsymbol{\mu}^C$.

За допомогою генетичного алгоритму отримано нульовий розв'язок

$$\boldsymbol{\mu}_0^C = (\mu_0^{C_1} = 0.67, \mu_0^{C_2} = 0.75, \mu_0^{C_3} = 0.21, \mu_0^{C_4} = 0.44, \mu_0^{C_5} = 0.38, \mu_0^{C_6} = 0.87),$$

для якого значення критерію оптимізації (9) дорівнювало F_1=0.0000.

Отриманий нульовий розв'язок дозволив організувати генетичний пошук множин розв'язків $D_1(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E)$ і $D_2(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E)$, які визначаються агрегаційним розв'язком

$$\boldsymbol{\mu}_a^C = (\mu_a^{C_1} = 0.67, \mu_a^{C_2} = 0.75, \mu_a^{C_3} = 0.21, \mu_a^{C_4} = 0.67, \mu_a^{C_5} = 0.38, \mu_a^{C_6} = 0.75),$$

двома максимальними розв'язками $\bar{S}^* = \{\bar{\boldsymbol{\mu}}_1^C, \bar{\boldsymbol{\mu}}_2^C\}$

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}_1^C = (\bar{\mu}_1^{C_1}=0.67,\ \bar{\mu}_1^{C_2}=0.75,\ \bar{\mu}_1^{C_3}=0.21,\ \bar{\mu}_1^{C_4}=0.67,\ \bar{\mu}_1^{C_5}=0.38,\ \bar{\mu}_1^{C_6}=1.0);$$

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}_2^C = (\bar{\mu}_2^{C_1}=0.67,\ \bar{\mu}_2^{C_2}=1.0,\ \bar{\mu}_2^{C_3}=0.21,\ \bar{\mu}_2^{C_4}=0.67,\ \bar{\mu}_2^{C_5}=0.38,\ \bar{\mu}_2^{C_6}=0.75)$$

і двома мінімальними розв'язками $\underline{S}^* = \{\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^C, \underline{\boldsymbol{\mu}}_2^C\}$

$$\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^C = (\underline{\mu}_1^{C_1} = 0.67,\ \underline{\mu}_1^{C_2} = 0.75,\ \underline{\mu}_1^{C_3} = 0.21,\ \underline{\mu}_1^{C_4} = 0,\ \underline{\mu}_1^{C_5} = 0.38,\ \underline{\mu}_1^{C_6} = 0.75);$$

$$\underline{\boldsymbol{\mu}}_2^C = (\underline{\mu}_2^{C_1} = 0,\ \underline{\mu}_2^{C_2} = 0.75,\ \underline{\mu}_2^{C_3} = 0.21,\ \underline{\mu}_2^{C_4} = 0.67,\ \underline{\mu}_2^{C_5} = 0.38,\ \underline{\mu}_2^{C_6} = 0.75).$$

Множину розв'язків системи нечітких логічних рівнянь (17), визначену об'єднанням $D_1 \mathbf{U} D_2$, можна подати у вигляді інтервалів:

$S(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E) = \{\mu^{C_1} = 0.67;\ \mu^{C_2} = 0.75;\ \mu^{C_3} = 0.21;\ \mu^{C_4} \in [0,\ 0.67];\ \mu^{C_5} = 0.38;\ \mu^{C_6} \in [0.75,\ 1.0]\}\ \mathbf{U}$

$\mathbf{U}\ \{\mu^{C_1} \in [0,\ 0.67];\ \mu^{C_2} = 0.75;\ \mu^{C_3} = 0.21;\ \mu^{C_4} = 0.67;\ \mu^{C_5} = 0.38;\ \mu^{C_6} \in [0.75,\ 1.0]\}\ \mathbf{U}$

$\mathbf{U}\ \{\mu^{C_1} = 0.67;\ \mu^{C_2} \in [0.75,\ 1.0];\ \mu^{C_3} = 0.21;\ \mu^{C_4} \in [0,\ 0.67];\ \mu^{C_5} = 0.38;\ \mu^{C_6} = 0.75\}\ \mathbf{U}$

$\mathbf{U}\ \{\mu^{C_1} \in [0,\ 0.67];\ \mu^{C_2} \in [0.75,\ 1.0];\ \mu^{C_3} = 0.21;\ \mu^{C_4} = 0.67;\ \mu^{C_5} = 0.38;\ \mu^{C_6} = 0.75\}$. (18)

Нехай для моделювання причинно-наслідкових зв'язків використовується ієрархічне композиційне правило виведення [14]. Тоді експертна матриця нечітких відношень має вигляд:

$$\mathbf{W} = \begin{array}{c} \\ C_1 C_5 \\ C_3 C_5 \\ C_4 C_5 \\ C_1 C_6 \\ C_2 C_6 \\ C_3 C_6 \\ C_4 C_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0.55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.67 \\ 0 & 0.46 & 0 & 0 \\ 0.44 & 0.34 & 0.87 & 0 \\ 0.78 & 0 & 0.46 & 0 \\ 0.55 & 0 & 0.55 & 0 \\ 0.67 & 0.34 & 0.87 & 0 \end{array} \right] \end{array}.$$

Нечіткі логічні рівняння в цьому випадку виглядають так:

$$\begin{aligned} \mu^{E_1} &= (\mu^{P_4} \wedge 0.44) \vee (\mu^{P_5} \wedge 0.78) \vee (\mu^{P_6} \wedge 0.55) \vee (\mu^{P_7} \wedge 0.67) \\ \mu^{E_2} &= (\mu^{P_1} \wedge 0.55) \vee (\mu^{P_3} \wedge 0.46) \vee (\mu^{P_4} \wedge 0.34) \vee (\mu^{P_7} \wedge 0.34) \\ \mu^{E_3} &= (\mu^{P_4} \wedge 0.87) \vee (\mu^{P_5} \wedge 0.46) \vee (\mu^{P_6} \wedge 0.55) \vee (\mu^{P_7} \wedge 0.87) \\ \mu^{E_4} &= (\mu^{P_2} \wedge 0.67) \end{aligned} \tag{19}$$

де

$$\begin{aligned} \mu^{P_1} &= \mu^{C_1} \wedge \mu^{C_5} \\ \mu^{P_2} &= \mu^{C_3} \wedge \mu^{C_5} \\ \mu^{P_3} &= \mu^{C_4} \wedge \mu^{C_5} \\ \mu^{P_4} &= \mu^{C_1} \wedge \mu^{C_6} \\ \mu^{P_5} &= \mu^{C_2} \wedge \mu^{C_6} \\ \mu^{P_6} &= \mu^{C_3} \wedge \mu^{C_6} \\ \mu^{P_7} &= \mu^{C_4} \wedge \mu^{C_6} \end{aligned} \tag{20}$$

Для експертного нечіткого вектора причин $\hat{\boldsymbol{\mu}}^C$ в результаті прямого виведення отримуємо нечіткий вектор комбінацій причин

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}^P = (\hat{\mu}^{P_1} = 0.14,\ \hat{\mu}^{P_2} = 0.21,\ \hat{\mu}^{P_3} = 0.38,\ \hat{\mu}^{P_4} = 0.14,\ \hat{\mu}^{P_5} = 0.75,\ \hat{\mu}^{P_6} = 0.21,\ \hat{\mu}^{P_7} = 0.67),$$

якому відповідає нечіткий вектор наслідків $\hat{\boldsymbol{\mu}}^E$.

А тепер оберненим логічним виведенням для нечіткого вектора наслідків $\hat{\boldsymbol{\mu}}^E$ відновимо нечіткі вектори причин $\boldsymbol{\mu}^P$ і $\boldsymbol{\mu}^C$.

За допомогою генетичного алгоритму отримано нульовий розв’язок

$$\boldsymbol{\mu}_0^P = (\mu_0^{P_1} = 0.38, \mu_0^{P_2} = 0.21, \mu_0^{P_3} = 0.10, \mu_0^{P_4} = 0.67, \mu_0^{P_5} = 0.75, \mu_0^{P_6} = 0.12, \mu_0^{P_7} = 0.35),$$

для якого значення критерію оптимізації (13) становило F_2=0.0000.

Отриманий нульовий розв’язок дав змогу організувати генетичний пошук множини розв’язків $Q(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E)$, яка визначається максимальним розв’язком

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}^P = (\bar{\mu}^{P_1} = 0.38,\ \bar{\mu}^{P_2} = 0.21,\ \bar{\mu}^{P_3} = 0.38,\ \bar{\mu}^{P_4} = 0.67,\ \bar{\mu}^{P_5} = 0.75,\ \bar{\mu}^{P_6} = 1.0,\ \bar{\mu}^{P_7} = 0.67)$$

і двома мінімальними розв’язками $\underline{Q}^* = \{\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^P, \underline{\boldsymbol{\mu}}_2^P\}$

$$\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^P = (\underline{\mu}_1^{P_1} = 0.38,\ \underline{\mu}_1^{P_2} = 0.21,\ \underline{\mu}_1^{P_3} = 0,\ \underline{\mu}_1^{P_4} = 0.67,\ \underline{\mu}_1^{P_5} = 0.75,\ \underline{\mu}_1^{P_6} = 0,\ \underline{\mu}_1^{P_7} = 0);$$

$$\underline{\boldsymbol{\mu}}_2^P = (\underline{\mu}_2^{P_1} = 0,\ \underline{\mu}_2^{P_2} = 0.21,\ \underline{\mu}_2^{P_3} = 0.38,\ \underline{\mu}_2^{P_4} = 0,\ \underline{\mu}_2^{P_5} = 0.75,\ \underline{\mu}_2^{P_6} = 0,\ \underline{\mu}_2^{P_7} = 0.67).$$

Отже, розв’язок системи нечітких логічних рівнянь (19) можна подати у вигляді інтервалів:

$$Q(\mathbf{R}, \boldsymbol{\mu}^E) = \{\mu^{P_1} = 0.38, \mu^{P_2} = 0.21, \mu^{P_3} \in [0,\ 0.38], \mu^{P_4} = 0.67, \mu^{P_5} = 0.75, \mu^{P_6} \in [0,\ 1.0], \mu^{P_7} \in [0,\ 0.67]\} \mathbf{U}$$

$$\mathbf{U}\ \{\mu^{P_1} \in [0,\ 0.38],\ \mu^{P_2} = 0.21,\ \mu^{P_3} = 0.38,\ \mu^{P_4} \in [0,\ 0.67],\ \mu^{P_5} = 0.75,\ \mu^{P_6} \in [0,\ 1.0],\ \mu^{P_7} = 0.67]\}.$$

Для інтервальних розв’язків $[\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^P, \bar{\boldsymbol{\mu}}^P]$ і $[\underline{\boldsymbol{\mu}}_2^P, \bar{\boldsymbol{\mu}}^P]$ за допомогою генетичного алгоритму отримано нульові розв’язки

$$\boldsymbol{\mu}_{01}^C = (\mu_{01}^{C_1} = 0.67, \mu_{01}^{C_2} = 0.80, \mu_{01}^{C_3} = 0.21, \mu_{01}^{C_4} = 0.54, \mu_{01}^{C_5} = 0.38, \mu_{01}^{C_6} = 0.75),$$
$$\boldsymbol{\mu}_{02}^C = (\mu_{02}^{C_1} = 0.18, \mu_{02}^{C_2} = 0.90, \mu_{02}^{C_3} = 0.21, \mu_{02}^{C_4} = 0.67, \mu_{02}^{C_5} = 0.38, \mu_{02}^{C_6} = 0.75),$$

для яких значення критерію оптимізації (13) становило F_2=0.0000.

Отримані нульові розв’язки дали змогу організувати генетичний пошук множин розв’язків $G_1(\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^P, \bar{\boldsymbol{\mu}}^P)$ і $G_2(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2^P, \bar{\boldsymbol{\mu}}^P)$, які визначаються двома мінімальними розв’язками $\underline{S}^* = \{\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^C, \underline{\boldsymbol{\mu}}_2^C\}$

$$\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^C = (\underline{\mu}_1^{C_1} = 0.67,\ \underline{\mu}_1^{C_2} = 0.75,\ \underline{\mu}_1^{C_3} = 0.21,\ \underline{\mu}_1^{C_4} = 0,\ \underline{\mu}_1^{C_5} = 0.38,\ \underline{\mu}_1^{C_6} = 0.75);$$
$$\underline{\boldsymbol{\mu}}_2^C = (\underline{\mu}_2^{C_1} = 0,\ \underline{\mu}_2^{C_2} = 0.75,\ \underline{\mu}_2^{C_3} = 0.21,\ \underline{\mu}_2^{C_4} = 0.67,\ \underline{\mu}_2^{C_5} = 0.38,\ \underline{\mu}_2^{C_6} = 0.75)$$

і двома максимальними розв’язками $\bar{S}^* = \{\bar{\boldsymbol{\mu}}_1^C, \bar{\boldsymbol{\mu}}_2^C\}$

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}_1^C = (\bar{\mu}_1^{C_1} = 0.67,\ \bar{\mu}_1^{C_2} = 1.0,\ \bar{\mu}_1^{C_3} = 0.21,\ \bar{\mu}_1^{C_4} = 0.67,\ \bar{\mu}_1^{C_5} = 0.38,\ \bar{\mu}_1^{C_6} = 0.75);$$
$$\bar{\boldsymbol{\mu}}_2^C = (\bar{\mu}_2^{C_1} = 0.67,\ \bar{\mu}_2^{C_2} = 0.75,\ \bar{\mu}_2^{C_3} = 0.21,\ \bar{\mu}_2^{C_4} = 0.67,\ \bar{\mu}_2^{C_5} = 0.38,\ \bar{\mu}_2^{C_6} = 1.0).$$

Отже, інтервальним розв’язкам $[\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^P, \bar{\boldsymbol{\mu}}^P]$ і $[\underline{\boldsymbol{\mu}}_2^P, \bar{\boldsymbol{\mu}}^P]$ відповідають розв’язки системи нечітких логічних рівнянь (20) у вигляді інтервалів:

$$G_1(\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^P, \bar{\boldsymbol{\mu}}^P) = \{\mu^{C_1} = 0.67,\ \mu^{C_2} \in [0.75,\ 1.0],\ \mu^{C_3} = 0.21,\ \mu^{C_4} \in [0,\ 0.67],\ \mu^{C_5} = 0.38,\ \mu^{C_6} = 0.75\} \mathbf{U}$$

$\mathbf{U}\,\{\mu^{C_1}=0.67,\ \mu^{C_2}=0.75,\ \mu^{C_3}=0.21,\ \mu^{C_4}\in[0,\,0.67],\ \mu^{C_5}=0.38,\ \mu^{C_6}\in[0.75,\,1.0]\};$

$$G_2(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2^P,\bar{\boldsymbol{\mu}}^P)=\{\mu^{C_1}\in[0,\,0.67],\ \mu^{C_2}\in[0.75,\,1.0],\ \mu^{C_3}=0.21,\ \mu^{C_4}=0.67,\ \mu^{C_5}=0.38,\ \mu^{C_6}=0.75\}\,\mathbf{U}$$

$\mathbf{U}\,\{\mu^{C_1}\in[0,\,0.67],\ \mu^{C_2}=0.75,\ \mu^{C_3}=0.21,\ \mu^{C_4}=0.67,\ \mu^{C_5}=0.38,\ \mu^{C_6}\in[0.75,\,1.0]\}.$

Множина розв’язків системи нечітких логічних рівнянь (20), визначена об’єднанням $S(\mathbf{R},\boldsymbol{\mu}^E)=G_1(\underline{\boldsymbol{\mu}}_1^P,\bar{\boldsymbol{\mu}}^P)\,\mathbf{U}\,G_2(\underline{\boldsymbol{\mu}}_2^P,\bar{\boldsymbol{\mu}}^P)$, збігається із множиною розв’язків (18) системи рівнянь (17).

Отриманий розв’язок дає підставу зробити такі висновки. Причиною спостережуваного стану насоса є падіння вхідного тиску за підвищеної в’язкості палива, оскільки міри значущості причин C_2 і C_6 є максимальними. Крім того, зменшення кількості обертів двигуна або витік палива також можуть позначатись на роботі насоса, оскільки міри значущості причин C_1 і C_4 є достатньо високими. Зношеність шестерень слід виключити, оскільки міра значущості причини C_3 мала.

Параметри основних генетичних операцій вибрано відповідно до рекомендацій роботи [13]. Кількість ітерацій для пошуку розв’язків систем нечітких логічних рівнянь (3) і (8) оцінювали так. Нехай:

T_0 – кількість ітерацій генетичного алгоритму для пошуку нульового розв’язку;

T_1 – кількість запусків генетичного алгоритму для пошуку однієї границі;

T_2 – кількість запусків генетичного алгоритму для пошуку множини границь.

Тоді розв’язання систем рівнянь (3) та (8) потребує $2T_0T_1$ ітерацій для пошуку єдиної границі у спрощених множинах розв’язків (11), (12) та (15), (16), а також $2T_0T_1T_2$ ітерацій для пошуку множини верхніх і нижніх границь у розширених множинах розв’язків (10) та (14).

Висновки

В статті розглянуто задачу оберненого логічного виведення на основі багатовимірних нечітких відношень. Встановлено, що моделювання причинно-наслідкових зв’язків потребує використання розширеного (агрегаційного) або ієрархічного композиційного правила виведення.

Запропоновано метод розв’язання систем нечітких логічних рівнянь з розширеною max-min композицією та еквівалентних систем з ієрархічною max-min/min-max композицією. Доведено властивості множини розв’язків таких систем. Задача знаходження множини розв’язків сформульована у вигляді задачі оптимізації, для розв’язання якої використано генетичний алгоритм. Розглянуто приклад технічної діагностики, який ілюструє застосування запропонованого методу.

1. Groetsch C. W. Inverse problems in the mathematical sciences / C. W. Groetsch. – Braunschweig: Vieweg Verlag, 1993. – 152 с. 2. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений / Л. Заде. – М.: Мир, 1976. – 166 с. 3. Di Nola A. Fuzzy relation equations and their applications to knowledge engineering / A. Di Nola, S. Sessa, W. Pedrycz, E. Sanchez. – Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1989. – 278 p. 4. Peeva K. Fuzzy relational calculus. Theory, applications and software / K. Peeva, Y. Kyosev. – New York: World Scientific, 2004. – 304 p. 5. Markovskii A. On the relation between equations with max-product composition and the covering problem / A. Markovskii // Fuzzy Sets and Systems. Vol. 153, 2005, pp. 261–273. 6. Yager R. Essentials of fuzzy modeling and control / R. Yager, D. Filev. – New York: John Willey & Sons, 1994. – 408 p. 7. Gegov A. E. Reduction of multidimensional relations in fuzzy control systems / A. E. Gegov, P. M. Frank // Systems & Control Letters.Vol. 25 (4), 1995, pp. 307–313. 8. Pedrycz W. Modularization of fuzzy relational equations / W. Pedrycz, A. V. Vasilakos // Soft Computing – A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications. Vol. 6 (1), 2002, pp. 33 – 37. 9. Duan J.-C. Multilevel fuzzy relational systems: structure and identification / J.-C. Duan, F.-L. Chung // Soft Computing. Vol. 6 (2), 2002, pp. 71–86. 10. Ротштейн А. П. Диагностика на основе нечетких отношений / А. П. Ротштейн, А. Б. Ракитянская // Автоматика и телемеханика. – № 12. – 2007. – С. 113–130. 11. Rotshtein A. Diagnosis problem solving using fuzzy relations / A. Rotshtein, H. Rakytyanska // IEEE Transactions on Fuzzy Systems.Vol.16 (3), 2008, pp. 664–675.

12. Ротштейн А. П. Адаптивная система диагностики на основе нечетких отношений / А. П. Ротштейн, А. Б. Ракитянская // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 4. – С. 135–150. 13. Ротштейн А. П. Решение задач диагностики на основе нечётких отношений и генетического алгоритма / А. П. Ротштейн, А. Б. Ракитянская // Кибернетика и системный анализ. – № 6. – 2001. – С. 162 –170. 14. Rotshtein A. Fuzzy evidence in identification, forecasting and diagnosis / A. Rotshtein, H. Rakytyanska. – Heidelberg: Springer, 2012. – 314 p.

УДК 004.896, 004.855.5, 004.932, 004.048, 004.942

Ю. Рашкевич[1], І. Ізонін[1], Д. Пелешко[1], І. Малець[2]
[1]Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра інформаційних технологій видавничої справи.
[2]Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
кафедра управління проектами, інформаційних технологій та телекомунікацій

ЗМІНА РОЗДІЛЬНОЇ ЗДАТНОСТІ ЗОБРАЖЕННЯ ЗАСОБОМ ПСЕВДООБЕРТАННЯ ВИРОДЖЕНОГО МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ВІДНОСНИХ СИМЕТРИЧНИХ МІР КОНВЕРГЕНЦІЇ

Розроблено метод зміни роздільної здатності зображення на основі псевдообертання виродженого матричного оператора відносних симетричних мір конвергенції. Процедура передбачає побудову виродженого квадратного матричного оператора на основі мір подібності. Експериментальні дослідження показують високу стійкість методу до обробки зображень із різкофлуктуаційною функцією інтенсивності. Це зумовлює можливість його застосування для оброблення зображень з різкими краями.

Ключові слова: зображення, надвисока роздільна здатність, міри подібності, матриця Мура–Пенроуза, псевдообертання.

The method of changing the image resolution based on pseudorotation degenerate operator's matrix of relative symmetric measures of convergence is developed. The procedure involves the construction of a degenerate square matrix operator based on measures of similarity. Experimental studies show high resistance to image processing method with sharply fluctuating function of intensity. This leads to the possibility of its application in image processing with sharp edges.

Key words: images, super-resolution, similarity measures, Moore-Penrose matrix, pseudorotation.

Вступ

Якість інформації про об'єкт на зображенні чи власне зображення визначає ефективність його обробки у багатьох прикладних галузях, зокрема у: медичній візуалізації, дистанційному зондуванні, телебаченні високої чіткості, відеоспостереженні, відеоконференціях тощо. Отже, зображення з високою роздільною здатністю необхідні для підвищення ефективності роботи цих систем. Сучасна високоточна оптика та різноманітні датчики реєстрації зображення надають можливість його отримання з достатньо високою якістю, проте обмеження цих пристроїв, а також їхня вартість накладають певні обмеження на їх використання. Тому виникає науково-практична задача збільшення роздільної здатності зображень саме програмним шляхом.