

12. Ротштейн А. П. Адаптивная система диагностики на основе нечетких отношений / А. П. Ротштейн, А. Б. Ракитянская // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 4. – С. 135–150.
13. Ротштейн А. П. Решение задач диагностики на основе нечетких отношений и генетического алгоритма / А. П. Ротштейн, А. Б. Ракитянская // Кибернетика и системный анализ. – № 6. – 2001. – С. 162–170.
14. Rotshtein A. Fuzzy evidence in identification, forecasting and diagnosis / A. Rotshtein, H. Rakytyanska. – Heidelberg: Springer, 2012. – 314 p.

УДК 004.896, 004.855.5, 004.932, 004.048, 004.942

Ю. Рашкевич¹, І. Ізонін¹, Д. Пелешко¹, І. Малець²

¹Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра інформаційних технологій видавничої справи.

²Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
кафедра управління проектами, інформаційних технологій та телекомунікацій

ЗМІНА РОЗДІЛЬНОЇ ЗДАТНОСТІ ЗОБРАЖЕННЯ ЗАСОБОМ ПСЕВДООБЕРТАННЯ ВИРОДЖЕНОГО МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ВІДНОСНИХ СИМЕТРИЧНИХ МІР КОНВЕРГЕНЦІЇ

Ї Рашкевич Ю., Ізонін І., Пелешко Д., Малець І., 2015

Розроблено метод зміни роздільної здатності зображення на основі псевдообертання виродженого матричного оператора відносних симетричних мір конвергенції. Процедура передбачає побудову виродженого квадратного матричного оператора на основі мір подібності. Експериментальні дослідження показують високу стійкість методу до обробки зображень із різкофлюктуаційною функцією інтенсивності. Це зумовлює можливість його застосування для оброблення зображень з різкими краями.

Ключові слова: зображення, надвисока роздільна здатність, міри подібності, матриця Мура–Пенроуза, псевдообертання.

The method of changing the image resolution based on pseudorotation degenerate operator's matrix of relative symmetric measures of convergence is developed. The procedure involves the construction of a degenerate square matrix operator based on measures of similarity. Experimental studies show high resistance to image processing method with sharply fluctuating function of intensity. This leads to the possibility of its application in image processing with sharp edges.

Key words: images, super-resolution, similarity measures, Moore-Penrose matrix, pseudorotation.

Вступ

Якість інформації про об'єкт на зображенні чи власне зображення визначає ефективність його обробки у багатьох прикладних галузях, зокрема у: медичній візуалізації, дистанційному зондуванні, телебаченні високої чіткості, відеоспостереженні, відеоконференціях тощо. Отже, зображення з високою роздільною здатністю необхідні для підвищення ефективності роботи цих систем. Сучасна високоточна оптика та різноманітні датчики реєстрації зображення надають можливість його отримання з достатньо високою якістю, проте обмеження цих пристроїв, а також їхня вартість накладають певні обмеження на їх використання. Тому виникає науково-практична задача збільшення роздільної здатності зображень саме програмним шляхом.

Аналіз відомих методів

Класичні методи (білінійна, бікубічна інтерполяції) збільшення роздільної здатності зображень характеризуються високою швидкістю. Проте їм притаманні деякі артефакти, що накладають обмеження на практичне застосування цих методів. Окрім цього вони оперують лише одним зображенням. У деяких випадках це можна вважати недоліком. Зокрема, наявність декількох зразків однієї сцени, які суміщені один відносно одного на неціле значення пікселя, дає додаткову інформацію, яку можна було б використати як для збільшення роздільної здатності, так і для покращення якості вихідного зразка.

Одним із можливих розв'язків такої задачі є використання методів Super resolution reconstruction, або надвисокої роздільної здатності [2]. У загальному випадку технологія надвисокої роздільної здатності складається із двох класів методів [15], зокрема: оптичні (OSR) та геометричні (GSR) методи надвисокої роздільної здатності. Перший клас (OSR) становлять методи, орієнтовані на апаратну реалізацію. Водночас другий клас (GSR) – це методи, алгоритмічна реалізація яких ґрунтується на обробці наборів однотипних зображень чи їх фрагментів. Ідея класу геометричних методів надвисокої роздільної здатності – збільшення зображення чи набору зображень на основі одного чи декількох зразків низької роздільної здатності, для яких характерний піксельний чи субпіксельний зсув. Для методів надвисокої роздільної здатності на основі декількох зразків низької роздільності однієї сцени важлива саме наявність піксельного чи субпіксельного зсуву між ними. Саме він є носієм тієї додаткової інформації, яка дасть змогу отримати зображення з високою інформативністю.

Бурхливий розвиток методів цього класу характеризується застосуванням різноманітного інструментарію для розв'язання поставленої задачі. Відповідно, розроблено кілька класифікацій цих методів [4, 9], зокрема щодо кількості зображень низької роздільності, що використовуються у процесі роботи [7] чи щодо області, у якій працюють ці методи [8], або щодо фактичного методу реконструкції вихідного зразка тощо.

Найдетальнішу класифікацію методів надвисокої роздільної здатності, на нашу думку, подано у [9]. Згідно з нею, розглядаються дві групи методів надвисокої роздільної здатності зображень просторової області: а) класичні – методи, що працюють з декількома зразками низької роздільності та б) на основі обробки одного зображення (рис. 1). Автори у [9] виділяють такі класичні методи: методи ітеративного зворотного проектування, ітеративної адаптивної фільтрації, прямі методи, методи на основі теорії проєкцій на опуклі множини та ймовірнісні методи. Додамо, що ця класифікація неповна, оскільки за останні роки набули розвитку методи, що поєднують різноманітні математичні апарати з вищеперерахованих груп і утворюють групу гібридних методів [7, 10, 11, 16, 18].

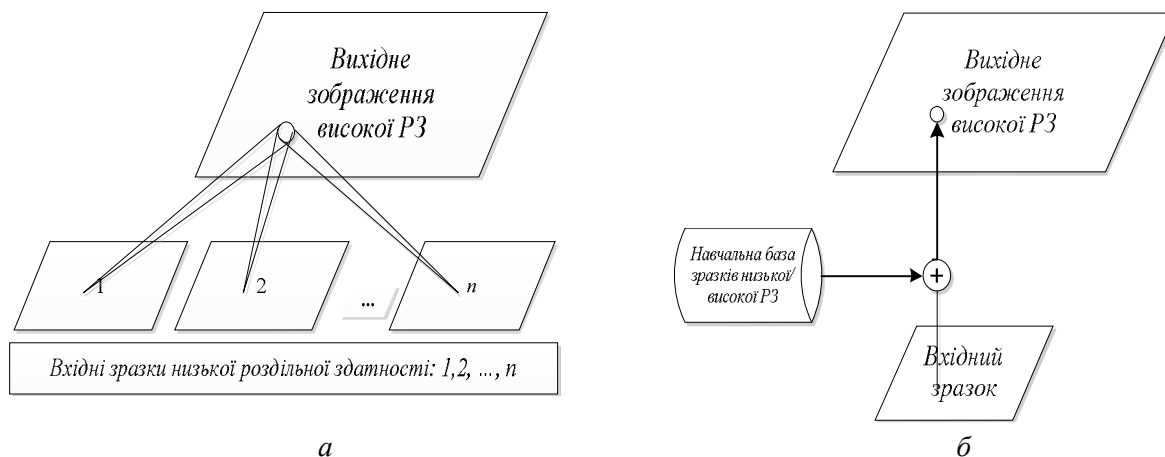


Рис. 1. Узагальнена схема роботи методів:
а – класичних, б – на основі обробки одного зображення

Використання методів ітеративного зворотного проектування [17] може зумовити такі артефакти на результуючому зображенні, як ефект дзвону та ступінчастості. Окрім цього, ітераційний процес мінімізації помилки реконструкції може сходитися до декількох результатів. Це зумовлює існування декількох розв'язків і алгоритм може коливатися між ними або сходитися до одного із них.

Методи ітеративної адаптивної фільтрації створено для обробки відеопотоків. Їх основною метою є оцінка невідомих змінних, тому вони переважно використовують фільтр Калмана.

Група методів [19] на основі теорії проєкцій на опуклі множини ґрунтується на ітеративному знаходженні елемента допустимої області, яка визначається перетином ряду опуклих обмежень, починаючи з довільної точки. Основним завданням є визначення проєкцій, що може виявитися зовсім нетривіальним завданням. Окрім цього, розв'язок цих методів теж може бути не єдиним.

Інша підгрупа методів [6] – статистична, розв'язує задачу надвисокої роздільної здатності стохастично, близькою до оптимальної реконструкції зображення. Результуюче зображення та міжкадровий рух розглядаються як стохастичні змінні. Ці методи формують задачу надвисокої роздільності як обернену задачу, чутливу до різноманітних артефактів. Окрім цього, якщо кількість зображень низької роздільності, що використовує метод, є меншою за коефіцієнт збільшення роздільної здатності вихідного зображення, то це знову ж таки зводиться до некоректної задачі. Інакше кажучи, методи цього класу також не забезпечують єдиності розв'язку поставленої задачі.

Постановка задачі

Головним завданням, яке розглядається в роботі, є розроблення методу збільшення роздільної здатності (в контексті задачі надвисокої роздільної здатності), який для випадку цифрових зображень із різкими флуктуаціями функції інтенсивності дасть змогу уникати деяких інтерполяційних артефактів та розмитості контурів.

Методи надвисокої роздільної здатності

Побудова матричного оператора.

Нехай задано цифрове напівтонове зображення :

$$C = [c_{i,j}]_{i=1..h}^{j=1..l}, \quad (1)$$

де $c_{i,j}$ – значення функції інтенсивності піксела з координатами (i, j) .

Зсунемо значення дискретного набору точок C у додатну область:

$$c_{i,j} = c_{i,j} + \frac{1}{2} \left(\max_{\substack{i \in [1;h]; \\ j \in [1;l]}} c_{i,j} + \min_{\substack{i \in [1;h]; \\ j \in [1;l]}} c_{i,j} \right), \quad (2)$$

і пронормуємо зсунутий сигнал C за схемою оберненого мінімаксного множника K [13]:

$$c_{i,j} = K c_{i,j}, \quad \text{де} \quad K = \frac{1}{\max_{i \in [1;h]; j \in [1;l]} c_{i,j}}. \quad (3)$$

Надалі розглядатимемо процедури передискретизації у вертикальному напрямку (у напрямку, заданому індексом i). Для кожного рядка матриці C будемо оператор відносних симетричних мір конвергенції [3] у вигляді квадратної виродженої симетричної матриці

$$\forall i \in [1;h]: \nabla_i = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_{i,2} & c_{i,1} \\ c_{i,1} & c_{i,2} \end{pmatrix} & \dots & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_{i,l} & c_{i,2} \\ c_{i,2} & c_{i,l} \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_{i,1} & c_{i,2} \\ c_{i,2} & c_{i,1} \end{pmatrix} & 1 & \dots & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_{i,l} & c_{i,2} \\ c_{i,2} & c_{i,l} \end{pmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_{i,1} & c_{i,l} \\ c_{i,l} & c_{i,1} \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_{i,2} & c_{i,l} \\ c_{i,l} & c_{i,2} \end{pmatrix}^{-1} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

У результаті алгебраїчних перетворень оператор (4) можна записати у вигляді:

$$\forall i \in [1; h]: \nabla_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & \delta_{1,2} & \dots & \delta_{1,l} \\ \delta_{1,2} & 2 & \dots & \delta_{2,l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{1,l} & \delta_{2,l} & \dots & 2 \end{pmatrix} \text{ де } \delta_{m,n} = \begin{pmatrix} c_{i,m}^2 + c_{i,n}^2 \\ c_{i,m}c_{i,n} \end{pmatrix}, \quad m, n \in [1; l]. \quad (5)$$

Розмірність оператора (5) дорівнює: $\dim \nabla_i = l \times l$.

Оператор (5) є квадратною виродженою невід'ємною матрицею. Невід'ємність визначається операціями зсуву (2) та нормалізації (3). Невиродженість оператора (5) – із методу оточення мінорів [1], за яким:

$$\text{rang}(\nabla_i) = 1. \quad (6)$$

Оскільки $\text{rang}(\nabla_i) < l$, то матриця ∇_i вироджена. Для побудови операторів відносних симетричних мір конвергенції у напрямку j вхідна матриця значень функції інтенсивності C транспонується і надалі використовується формула (5).

Визначення характеристичного вектора на основі псевдообертання Мура–Пенроуза матриці відносних симетричних мір конвергенції

Відповідно до п. 4.1 розглянемо побудову характеристичних векторів у напрямку i . Для вирішення завдання побудови характеристичних векторів y_i , які виступатимуть характеристиками кожного рядка (чи стовпця) зображення C , розглянемо рівняння:

$$\nabla_i y_i = c_i, \quad (7)$$

де $c_i = \{c_{i,j} \mid j = 1..l\}$; $y_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,l})$ – l -вимірний вектор характеристичних значень зображення C для i -го рядка.

У загальному випадку характеристичний вектор y_i із (7) визначається так:

$$y_i = \nabla_i^{-1} c_i. \quad (8)$$

За (6) матриця ∇_i є виродженою ($\det(\nabla_i) = 0$), а отже, обернена матриця ∇_i^{-1} не існує. Тому, для розв'язання задачі (8), за теоремою про мінімізацію нев'язки $\|x_i - \nabla_i y_i\|^2$ лінійної системи з [14] пропонується такий спосіб визначення вектора y_i :

$$y_i = \nabla_i^+ c_i + (1 - \nabla_i^+ \nabla_i) r_i, \quad (9)$$

де ∇_i^+ – узагальнена обернена матриця Мура–Пенроуза (псевдообернена до ∇_i матриці [12, 14]); $(1 - \nabla_i^+ \nabla_i)$ – оператор проектування на ядро оператора ∇_i ; r_i – випадковий вектор розмірності l . Перший доданок у (9) виступає псевдооберненим розв'язком, а другий є розв'язком однорідної системи $\nabla_i y_i = 0$. Наведений через (9) спосіб визначення вектора характеристик i -го елемента покриття χ можливий, оскільки згідно з [14] матриця $\nabla_i^+ \nabla_i$ перестає бути виродженою.

Матриця Мура–Пенроуза ∇_i^+ визначається за сингулярним розкладом матриці ∇_i у такий спосіб [12]:

$$\nabla_i^+ = V_i \Sigma_i^+ U_i^T, \quad (10)$$

де U_i, V_i – унітарні матриці порядку $l \times l$ сингулярного розкладу матриці ∇_i ; Σ_i^+ – матриця порядку $l \times l$, яка є псевдооберненою до діагональної матриці Σ_i сингулярного розкладу матриці ∇_i . Оскільки матриця Σ_i також вироджена, то матрицю Σ_i^+ отримують з Σ_i , замінивши усі ненульові сингулярні числа $\sigma_{i,q}$ ($\sigma_{i,1} \geq \sigma_{i,2} \geq \dots \geq \sigma_{i,l} \geq 0$) на відповідно обернені до них $1/\sigma_{i,q}$.

В ітераційному процесі знаходження за y_i^{j+1} за (9) випадковий вектор r_i^{j+1} визначено за нев'язкою: $r_i^{j+1} = \|x_i - \nabla_i y_i^j\|_l$, тут $\|\cdot\|_l$ – l -норма.

Алгоритм передискретизації зображень

Алгоритм збільшення роздільної здатності складається із двох послідовних частин, за якими передискретизація зображення здійснюється у вертикальному та горизонтальному напрямках відповідно. Послідовність виконання дії кожної частини алгоритму може бути довільною.

Збільшення роздільної здатності. Для розв'язання цієї задачі побудовано алгоритм, частинами якого є:

- Обчислення характеристичних векторів u_i квадратних матриць, побудованих за співвідношеннями (5), за ітераційною процедурою (9).
- Побудова розширеного зображення додаванням у початкову матрицю C характеристичного вектора в позицію рядка чи стовпця.

Зазначені дві частини послідовно застосовують до всіх рядків матриці C для збільшення розмірів заданого зображення по висоті, і – до всіх стовпців матриці C для збільшення зображення по ширині.

Аналіз результатів практичних експериментів

За алгоритмом, описаним у п. 4.3, розроблене програмне рішення в середовищі Matlab. Завдяки цьому рішенню проведено експерименти, які засвідчили ефективність запропонованого методу.

Вхідне зображення, що використовувалося в одному із експериментів, наведене на рис. 2 (тип – 2-байтовий напівтоновий (grayscale), розмірність – 231×199 пікселів).

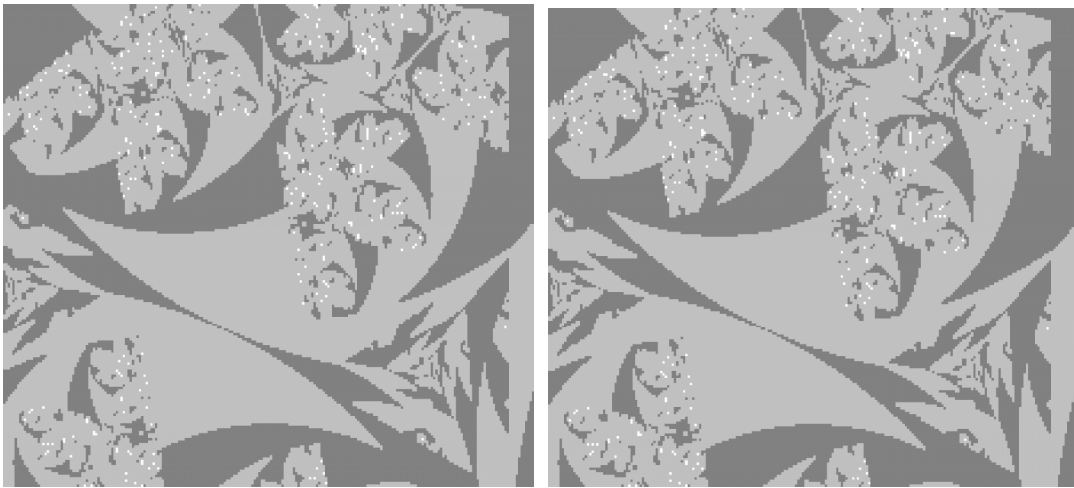


Рис. 2. Вхідне зображення

На рис. 3 наведено результати збільшення у 16 разів вхідного зображення (а) й еталонне зображення (б). Зазначимо, що усі зображення масштабовані для наведення у статті. З наведених на рис. 3 зображень можна констатувати, що передискретизоване зображення візуально практично нічим не відрізняється від еталонного. Тобто експертне оцінювання засвідчить практично стовідсотковий збіг цих двох зображень. Необхідно зазначити, що вдалось повністю зберегти дрібні деталі вхідного зображення, які визначались різкофлуктуаційними значеннями функції інтенсивності.

На рис. 4 наведено значення PSNR між еталонними зображеннями та збільшеними зображеннями за розробленим методом за різних коефіцієнтів збільшення. А на рис. 5 – модуль градієнта PSNR. З наведених графіків варто зробити такі важливі висновки:

- значення PSNR на проміжку коефіцієнта збільшення [2;16] відрізняються несуттєво. Це означає, що зростання зашумлення на збільшених зображеннях не є великим;
- модуль градієнта зміни PSNR на першій частині проміжку [2;10] більше, ніж на третій частині [12;16];
- стрибок значення градієнта PSNR є на другій частині проміжку значень коефіцієнта збільшення [10; 12].



a

б

*Рис. 3. Результати передискретизації:
a – еталонне зображення; б – збільшене у 16 разів зображення*



*Рис. 4. Значення співвідношення сигналу до шуму
за різних значень коефіцієнта збільшення*

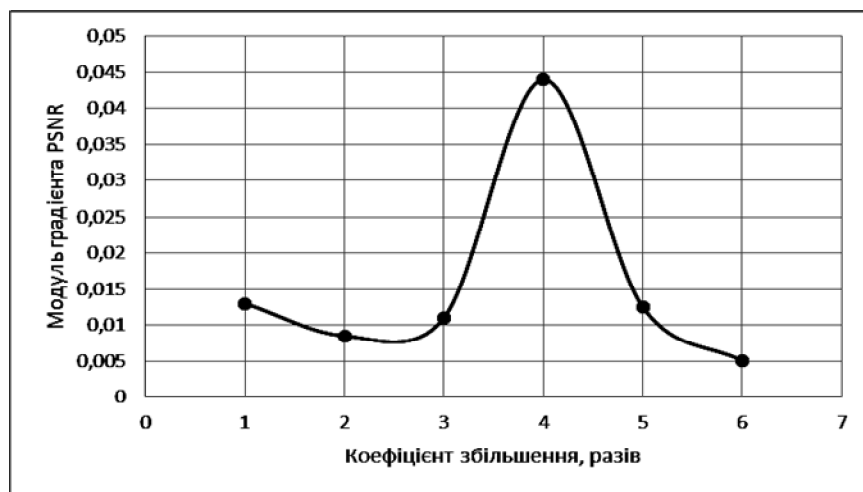


Рис. 5. Модуль градієнта PSNR

На підставі наведених висновків можна констатувати таке.

Для наведеного у роботі методу проміжок значень коефіцієнта збільшення умовно можна розділити на три частини. На першій частині збільшені зображення дуже сильно збігаються за значеннями PSNR з еталонними зображеннями. На другому проміжку спостерігається стрибок значення відхилення від еталонного зображеннями. Проте у міру зростання значення коефіцієнта збільшення зашумлення зростає, але з не дуже великими значеннями приросту. На третьому проміжку відхилення від еталонних зображень зростатимуть дуже сильно. А у міру зростання значення коефіцієнта збільшення різко зростатиме шум, який зробить незадовільним використання цього методу.

Проведення експериментів з іншими зображеннями лише підтвердили правильність висновків. В усіх випадках спостерігався поділ проміжку коефіцієнта збільшення на три частини за значеннями PSNR. Проте границі цих частин збігались не завжди, тобто значення правої та лівої границь коливаються в деяких околах.

Висновок

У роботі запропоновано новий метод надвисокої роздільної здатності зображень на основі псевдообертання виродженого матричного оператора відносних симетричних мір конвергенції матриці. Процедура передбачає побудову виродженого квадратного матричного оператора на основі мір подібності. Завдяки псевдообертанню цього оператора вдалось виділити характеристики, які можна використати для розв'язання задачі збільшення роздільної здатності. Перевагою такого підходу є те, що він не потребує застосування будь-якої інтерполяції, що характерно для прямих методів. Це забезпечує високу ефективність передискретизації за критерієм на основі PSNR і зменшення впливу артефактів, які притаманні різним видам інтерполяції.

1. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. – М.: Наука. – 1967. – 576 с. 2. Кочерга О. *Англійсько-українсько-англійський словник наукової мови (фізика та споріднені науки). Парт I – English-Ukrainian / Ольга Кочерга, Євген Мейнарович*. – Вінниця, Нова Книга, 2010. – XXXIV+1384 с. 3. *Матрица мер конвергенции [Електронний ресурс]* – Режим доступу до журналу: http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_%D0%BC%D0%B5%D1%80_%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B8 4. Пелешко Д. Д. *Аналіз основних методів збільшення роздільної здатності зображень на основі технології super resolution / Д. Д. Пелешко, І. В. Ізонін, Ю. М. Пелех // Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова*. – 2013. – Вип. 67. – С. 162–169. 5. Borman S. *Super-resolution from image sequences – A review / S. Borman, R. L. Stevenson // Circuits and Systems: proc. of the 1998 Midwest Symposium, Notre Dame, 9–12 Aug. 1998*. – IEEE, 1998. – P. 374–378. 6. Cain S. *Restoration of aliased video sequences via a maximum-likelihood approach / S. Cain, R. C. Hardie, and E. E. Armstrong // Passive Sensors: proc. of nat. infrared inform. symp., Monterey, Mar. 1996*. – CA, 1996. – P. 377–390. 7. Elad M. *Restoration of a single super-resolution image from several blurred, noisy and down-sampled measured images. / M. Elad, A. Feuer // IEEE Transactions on Image Processing*. – 1997. – Vol. 6, № 12. – P. 1646–1658. 8. Glasner D. *Super-Resolution from a Single Image / D. Glasner, S. Bagon, M. Irani // Computer Vision: proc. of 12-th intern. conf., Kyoto, 27 Sept. – 4 Oct. 2009*. – IEEE, 2009. – P. 349–356. 9. Nasrollahi K. *Super-resolution: a comprehensive survey / K. Nasrollahi, T. B. Moeslund // Machine Vision and Applications*. – 2014. – Vol. 25, № 6. – P. 1423–1468. 10. Patti A. J. *Artifact reduction for set theoretic super resolution image reconstruction with edge adaptive constraints and higher-order interpolation / A. J. Patti, Y. Altunbasak // IEEE Transaction on Image Processing*. – 2001. – Vol. 10, № 1. – P. 179–186. 11. Patti A. J. *Robust methods for high quality stills from interlaced video in the presence of dominant motion / A. J. Patti, M. Sezan, and A. M. Tekalp // IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*. – 1997. – Vol. 7, № 2. – P. 328–342. 12. Penrouse R. *A generalized inverse for matrices. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 51, 406–413 (1955). 13. Rashkevych Y., Peleshko D., Kovalchuk A., Kupchak M., Pelekh Y. *Speech signal pseudo invariants. Computer Science And Information Technologies*:

Materials of the Vith International Scientific and Technical Conference CSIT 2001. – Lviv: Publishig House Vezha&Co, 2011. 2011, с.21–22. 14. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание / А. Алберт // пер. с англ. – М.: Наука, 1977. – 224 с. 15. Superresolution. [Электронный ресурс]. – <http://www.wikiwand.com/en/Superresolution>. 16. Shen W. Projection onto Convex Sets Method in Spacefrequency Domain for Super Resolution / Wanqiang Shen, Lincong Fang, Xiang Chen, Honglin Xu // Journal of computers. – 2014. – Vol. 9, № 8. – P. 1959–1966. 17. Tai Y. W. Perceptually-inspired and edge-directed color image super-resolution / Y. W. Tai, W. S. Tong, and C. K. Tang // Computer Vision and Pattern Recognition: proc. of intern. conf, New York, 17 – 22 June 2006. – Los Alamitos: IEEE CS, 2006. – Vol. 2. – P. 1948–1955. 18. Tang Z. Projection onto convex sets super-resolution image reconstruction based on wavelet bi-cubic interpolation / Zhifei Tang, Deng M., Chuangbai Xiao, Jing Yu // Electronic and Mechanical Engineering and Information Technology (EMEIT): proc. of intern. conf., Harbin, 12–14 Aug. 2011. – IEEE Press, 2011. – Vol. 2. – P. 351–354. 19. Wheeler W. E. Super-Resolution Image Synthesis using Projections onto Convex Sets in the Frequency Domain / Frederick W. Wheeler, Ralph T. Hoctor and Eamon B. Barrett // Computational Imaging, Electronic Imaging Symposium: proc. of intern. conf., San Jose, January 2005. – 2005. – Vol. 5. – P.479–490.

УДК 519.8

О. Михальова

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ БАГАТОКРАТНОГО КУЛЬОВОГО ПОКРИТТЯ ОБМЕЖЕНИХ МНОЖИН ТА ЇХ МУЛЬТИПЛЕКСНОГО РОЗБИТТЯ

© Михальова О., 2015

Запропоновано модифікацію критерію оптимальності в неперервній задачі оптимального мультиплексного розбиття обмеженої множини n -вимірному евклідовому простору, який дає змогу у результаті розв'язання останньої отримати мінімальний радіус багатократного кульового покриття цієї множини.

Ключові слова: неперервна задача багатократного покриття, оптимальне k -кратне кульове покриття, діаграми Вороного вищих порядків, мультиплексне розбиття множин

There is proposed a modification of optimality criterion in the continuous problem of optimal multiplex-partitioning of a bounded set from n -dimensional Euclidean space, which allows in the result of its solving receive the smallest radius of the multiple covering by balls of this set.

Key words: continuous problem of multiple covering, optimal k -multiple covering by balls, Voronoi diagrams of higher orders, multiplex-partitioning of sets

Вступ

Задачі багатократного кульового покриття двовимірної області виникають у різних сферах людської діяльності. Широкий спектр практичних їх застосувань наведений, наприклад, у роботах [1–3].

У переважній більшості моделі задач покриття, що вивчаються в науковій літературі, є дискретними. Відомі задачі 0–1 покриття та багатократного покриття як задачі цілочислового