

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МІЦНОСТІ АНІЗОТРОПНИХ
МАТЕРІАЛІВ В УМОВАХ ДВОВІСНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ**

© Поберейко С., Соколовський Я., 2016

На основі механіки суцільних середовищ та аналітичної геометрії синтезовано математичну модель для визначення граничного напруженого стану композитних матеріалів з двовісним напруженим станом у площинах структурної симетрії, яка на відміну від механічних теорій міцності задовільно описує граничні напружені стани ортотропних матеріалів із слабкою та сильною асиметрією меж міцності у напрямках анізотропії.

Ключові слова: міцність, напруження, деформації, відносна об'ємна деформація, густина потенціальної енергії.

In terms of continuum mechanics and analytic geometry is mathematical model synthesized to determine the strength of the wood with biaxial strained conditions in structural symmetry planes. Unlike mechanical strength theories it satisfactorily describes the tense boundary conditions of orthotropic materials with weak and strong asymmetry of strength limits in the directions of anisotropy.

Key words: strength, tension, deformation, volumetric deformation, potential energy density.

Актуальність теми

Для своєчасного виявлення небезпечних щодо формозміни та тріщиноутворень полів напружень у висушуваних та висушених пиломатеріалах важливими є задачі побудови математичних моделей для визначення міцності деревини. Адже відомі сьогодні механічні теорії міцності для композитних матеріалів з недостатньо повнотою описують особливості міцності деревини. Теорії, які задовільно описують міцність деревини з двовісним чи плоским напруженими станами у радіально-тангенціальних площинах структурної симетрії, не придатні для визначення граничних напружених станів у матеріалі з двовісним чи плоским напруженими станами у радіально-аксіальній та аксіально-тангенціальній площинах. Тому для удосконалення відомих та розроблення нових способів ідентифікації в реальному масштабі часу допустимих напружень у висушуваних пиломатеріалах актуальними є задачі удосконалення відомих та синтезу нових математичних моделей визначення міцності анізотропних матеріалів зі складним напруженим станом.

Постановка задачі

Припустімо, що існує така функція $f(\sigma_{11}; \sigma_{22})$ компонентів тензора напружень σ_{11} та σ_{22} , лінії рівнів (ізолінії) якої охоплюють початок декартової системи координат і не мають точок перетину. Окрім цього вважатимемо, що ці лінії є гладкими, випуклими та замкненими. Тоді, оскільки геометричною інтерпретацією більшості з відомих механічних теорій конструктивної міцності анізотропних матеріалів є гладкі, випуклі та замкнені криві міцності [1], математичні моделі яких мають вигляд [2, 3]:

$$\varphi(\tilde{\sigma}_{11}; \tilde{\sigma}_{22}) = 0, \quad (1)$$

то очевидно, що на кривій (1) завжди можна знайти такі дві точки $(\tilde{\sigma}_{11}^*; \tilde{\sigma}_{22}^*)$ та $(\tilde{\sigma}_{11}^{**}; \tilde{\sigma}_{22}^{**})$ для яких:

$$f(\tilde{\sigma}_{11}^*; \tilde{\sigma}_{22}^*) = \min f(\tilde{\sigma}_{11}; \tilde{\sigma}_{22}) = f^* ; \quad (2)$$

$$f(\tilde{\sigma}_{11}^{**}; \tilde{\sigma}_{22}^{**}) = \max f(\tilde{\sigma}_{11}; \tilde{\sigma}_{22}) = f^{**} , \quad (3)$$

де $\tilde{\sigma}_{11}$ та $\tilde{\sigma}_{22}$ – значення граничних напружень матеріалу з двовісним напруженим станом.

Точки $(\tilde{\sigma}_{11}^*; \tilde{\sigma}_{22}^*)$ та $(\tilde{\sigma}_{11}^{**}; \tilde{\sigma}_{22}^{**})$ є проєкціями точок $A(\tilde{\sigma}_{11}^*; \tilde{\sigma}_{22}^*; f^*)$ та $B(\tilde{\sigma}_{11}^{**}; \tilde{\sigma}_{22}^{**}; f^{**})$ на площину $O\sigma_{11}\sigma_{22}$ декартової системи координат $O\sigma_{11}\sigma_{22}$ (рис.1).

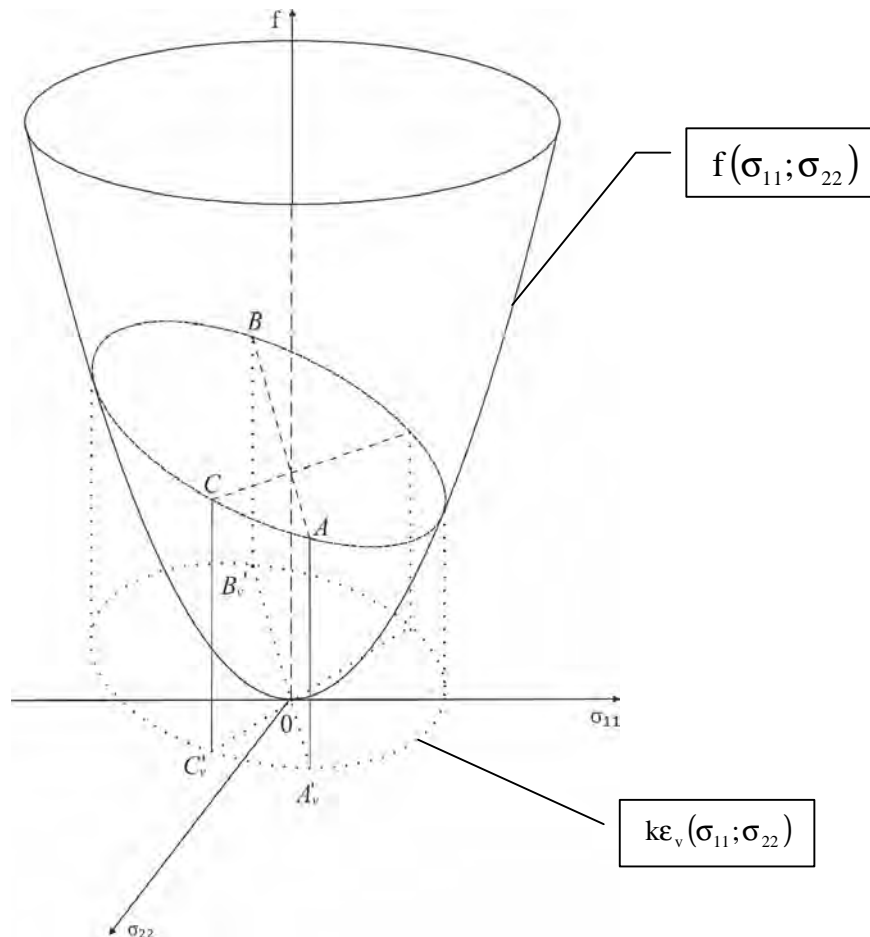


Рис. 1. Поверхні функцій $f(\sigma_{11}; \sigma_{22})$ та $\epsilon_v^*(\sigma_{11}; \sigma_{22})$

Окрім точок A і B на поверхні $f(\sigma_{11}; \sigma_{22})$ завжди можна знайти таку точку $C(\sigma_{11}^T; \sigma_{22}^T; f(\sigma_{11}^T; \sigma_{22}^T))$, яка не належить прямій AB , а її координати задовольняють подвійну нерівність:

$$\min f(\tilde{\sigma}_{11}; \tilde{\sigma}_{22}) < f(\sigma_{11}^T; \sigma_{22}^T) < \max f(\tilde{\sigma}_{11}; \tilde{\sigma}_{22}) . \quad (4)$$

Отже, маємо три точки A , B і C , які не належать одній прямій. Якщо через ці точки провести площину ABC , то матимемо лінію перетину L цієї площини з поверхнею функції напружень $f(\sigma_{11}; \sigma_{22})$. Проекцію цієї лінії на площину $O\sigma_{11}\sigma_{22}$ знаходять між двома ізолініями поверхні $f(\sigma_{11}; \sigma_{22})$:

$$f(\sigma_{11}; \sigma_{22}) = \min f(\tilde{\sigma}_{11}; \tilde{\sigma}_{22}) = f^* ; \quad (5)$$

$$f(\sigma_{11}; \sigma_{22}) = \max f(\tilde{\sigma}_{11}; \tilde{\sigma}_{22}) = f^{**} . \quad (6)$$

Ці ізолінії розбивають площину $O\sigma_{11}\sigma_{22}$ на три області (рис. 2):

$$f(\sigma_{11}; \sigma_{22}) \leq \min f(\tilde{\sigma}_{11}; \tilde{\sigma}_{22}) ; \quad (7)$$

$$\min f(\tilde{\sigma}_{11}; \tilde{\sigma}_{22}) \leq f(\sigma_{11}; \sigma_{22}) \leq \max f(\tilde{\sigma}_{11}; \tilde{\sigma}_{22}); \quad (8)$$

$$f(\sigma_{11}; \sigma_{22}) \geq \max f(\tilde{\sigma}_{11}; \tilde{\sigma}_{22}). \quad (9)$$

У пружній постановці задачі в області (7) поведінка суцільного середовища є абсолютно пружною, а в області (9) – не пружною. Область (8) – це область, якій належить шукана крива міцності (проекція кривої L на площину $O\sigma_{11}\sigma_{22}$, яка показана на рис. 2 штриховою лінією).

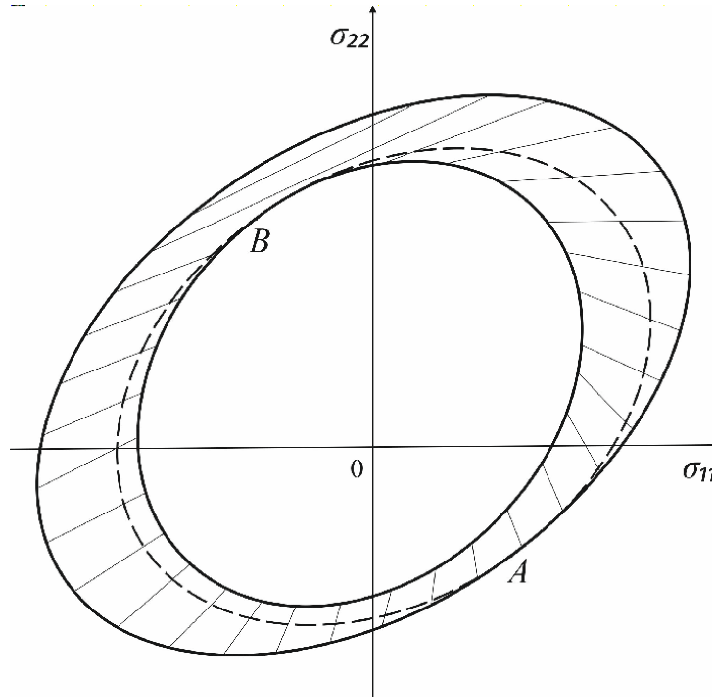


Рис. 2. Крива міцності (штрихова лінія) та ізолінії (суцільні лінії) поверхні $f(\sigma_{11}; \sigma_{22})$, яким належать проекції точок A та B

Отже, у першому наближенні проекція кривої L на площину $O\sigma_{11}\sigma_{22}$ є геометричною інтерпретацією математичної моделі міцності матеріалу з двовісним напруженим станом в одній із площин структурної симетрії. Для її визначення необхідно:

- 1) обґрунтувати вибір функції напружень $f(\sigma_{11}; \sigma_{22})$;
- 2) побудувати математичну модель площини ABC;
- 3) побудувати математичну модель міцності матеріалу з двовісним напруженим станом.

Функція напружень $f(s_{11}; s_{22})$

Відомо, що гладкими, випуклими та замкненими ізолініями, які охоплюють початок декартової системи координат і не мають точок перетину, є ізолінії поверхонь, математичними моделями яких є функції [4]:

$$f(\sigma_{11}; \sigma_{22}) = a\sigma_{11}^2 + b\sigma_{11}\sigma_{22} + c\sigma_{22}^2, \quad (10)$$

де a , b і c – коефіцієнти: $a > 0$ та $b > 0$, а c – будь-яке дійсне число.

До класу функцій (10) належить залежність густини потенціальної енергії суцільного середовища з двовісним напруженим станом від компонентів тензора напружень σ_{11} та σ_{22} . Знайдемо цю залежність і покажемо, що це справді так. Для цього скористаємось формулою [2]:

$$\Pi = 0,5(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22}) \quad (11)$$

та математичною моделлю закону Гука для стисливих матеріалів [5]:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = E_{11}\varepsilon_{11} + \sqrt{E_{11}E_{22}}\mu_{12}\varepsilon_{22} + \sqrt{E_{11}E_{33}}\mu_{13}\varepsilon_{33}; \\ \sigma_{22} = \sqrt{E_{11}E_{22}}\mu_{21}\varepsilon_{11} + E_{22}\varepsilon_{22} + \sqrt{E_{22}E_{33}}\mu_{23}\varepsilon_{33}; \\ \sigma_{33} = \sqrt{E_{11}E_{22}}\mu_{31}\varepsilon_{11} + \sqrt{E_{22}E_{33}}\mu_{32}\varepsilon_{22} + E_{33}\varepsilon_{33}; \\ \sigma_{12} = 2G_{12}\varepsilon_{12}; \quad \sigma_{23} = 2G_{23}\varepsilon_{23}; \quad \sigma_{13} = 2G_{13}\varepsilon_{13}; \end{cases} \quad (12)$$

Тут ε_{ij} – компоненти тензора деформацій; σ_{ij} – компоненти тензора напружень; E_{ij} – модулі пружності; G_{ij} – модулі зсуву ($i \neq j$); μ_{ij} – коефіцієнти Пуассона; Π – густина потенціальної енергії деформованого матеріалу з двовісним напруженим станом.

Математична модель (11) – (12) дає змогу визначити шукану функцію напружень $f(\sigma_{11}; \sigma_{22})$ для матеріалів з двовісним напруженим станом. Для цього достатньо компоненти напружень σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} та σ_{33} прирівняти до нуля та розв'язати систему рівнянь (12) відносно ε_{11} , ε_{22} та ε_{33} . Тоді матимемо:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = L \left\{ \frac{1 - \mu_{23}\mu_{32}}{E_{11}} \sigma_{11} + \frac{\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12}}{\sqrt{E_{11}E_{22}}} \sigma_{22} \right\} \\ \varepsilon_{22} = L \left\{ \frac{\mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21}}{\sqrt{E_{11}E_{22}}} \sigma_{11} + \frac{1 - \mu_{13}\mu_{31}}{E_{22}} \sigma_{22} \right\} \\ \varepsilon_{33} = L \left\{ \frac{\mu_{32}\mu_{21} - \mu_{31}}{\sqrt{E_{11}E_{33}}} \sigma_{11} + \frac{\mu_{31}\mu_{12} - \mu_{22}}{\sqrt{E_{22}E_{33}}} \sigma_{22} \right\} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{де } L = \frac{1}{1 + \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{21}\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{13}\mu_{31} - \mu_{23}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{21}}.$$

Звідси, підставивши знайдені ε_{11} та ε_{22} у (11) одержимо шукану функцію $f(\sigma_{11}; \sigma_{22})$:

$$f(\sigma_{11}; \sigma_{22}) = \Pi(\sigma_{11}; \sigma_{22}) = \frac{L}{2\sqrt{E_{11}E_{22}}} \left((1 - \mu_{23}\mu_{32}) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} \sigma_{11}^2 + (\mu_{13}\mu_{32} + \mu_{23}\mu_{31} - \mu_{12}\mu_{21}) \cdot \sigma_{11}\sigma_{22} + (1 - \mu_{13}\mu_{31}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \sigma_{22}^2 \right). \quad (14)$$

Рівняння площини ABC

Проекції $(\tilde{\sigma}_{11}^*; \tilde{\sigma}_{22}^*)$, $(\tilde{\sigma}_{11}^{**}; \tilde{\sigma}_{22}^{**})$ та $(\sigma_{11}^T; \sigma_{22}^T)$ точок A, B та C є також проекціями точок A_V , B_V та C_V , які належать поверхні, що є геометричною інтерпретацією залежності відносної об'ємної деформації ε_V від компонентів тензора напружень ε_{11} та ε_{22} . Адже у граничному напруженому стані не лише значення густини потенціальної енергії $f(\sigma_{11}; \sigma_{22})$ деформованого матеріалу є граничним, граничним є й значення величини ε_V . А це означає, що параметри математичних моделей площин ABC та $A_V B_V C_V$ є взаємозалежними та взаємопов'язаними. Тому для знаходження рівняння площини ABC визначимо рівняння площини $A_V B_V C_V$. Для вирішення цієї задачі покажемо, що функція двох змінних $\varepsilon_V(\sigma_{11}; \sigma_{22})$ є лінійною, а її геометричною інтерпретацією є площина $A_V B_V C_V$. Для цього підставимо формулу (12) у формулу [2]:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}. \quad (15)$$

Після нескладних математичних перетворень одержимо залежність величини ε_v від компонентів тензора напружень у двовісній постановці задачі:

$$\varepsilon_v = \frac{L}{E_{11}} \left(1 - \mu_{23}\mu_{32} + (\mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + \left(\mu_{32}\mu_{21} - \mu_{31} \right) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} \right) \sigma_{11} + \quad (16)$$

$$+ \frac{L}{E_{22}} \left(1 - \mu_{13}\mu_{31} + (\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12}) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} + \left(\mu_{31}\mu_{12} - \mu_{32} \right) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{33}}} \right) \sigma_{22}.$$

З отриманої формули випливає, що функція $\varepsilon_v(\sigma_{11}; \sigma_{22})$ є лінійною. Тому, оскільки точки A_v , B_v , і C_v належать поверхні ε_v , то (16) є рівнянням площини $A_v B_v C_v$, що й потрібно було довести.

Розмірності значень функцій $f(\sigma_{11}; \sigma_{22})$ та $\varepsilon_v(\sigma_{11}; \sigma_{22})$ є різними. Значення функції $\varepsilon_v(\sigma_{11}; \sigma_{22})$ є безрозмірними, а значення функції $f(\sigma_{11}; \sigma_{22})$ мають розмірність густини потенціальної енергії деформованого матеріалу. Тому з метою усунення цієї невідповідності помножимо (16) на деяку сталу величину k , розмірності напружень. У результаті отримаємо лінійну функцію двох змінних:

$$\varepsilon_v^*(\sigma_{11}; \sigma_{22}) = k \varepsilon_v(\sigma_{11}; \sigma_{22}). \quad (17)$$

Очевидно, що геометричною інтерпретацією цієї функції є площина – площина $A_v^* B_v^* C_v^*$ на рис. 1, точкам A_v^* , B_v^* та C_v^* цієї площини відповідають точки A_v , B_v та C_v площини $\varepsilon_v(\sigma_{11}; \sigma_{22})$.

Знайдемо таке значення сталої k , щоб прями AB та $A_v^* B_v^*$ були паралельними.

Оскільки точки $(\tilde{\sigma}_{11}^*; \tilde{\sigma}_{22}^*)$ та $(\tilde{\sigma}_{11}^{**}; \tilde{\sigma}_{22}^{**})$ є проєкціями не лише точок A і B , але і проєкціями точок A_v^* та B_v^* , то, згідно з рис. 1, прями AA_v^* та BB_v^* є паралельними. Звідси, необхідною та достатньою умовою паралельності прямих AB та $A_v^* B_v^*$ є умова:

$$|AA_v^*| = |BB_v^*|, \quad (18)$$

яка з урахуванням координат точок A , A_v^* , B та B_v^* запишеться у вигляді:

$$f(\tilde{\sigma}_{11}^*; \tilde{\sigma}_{22}^*) - k e_v(\tilde{\sigma}_{11}^*; \tilde{\sigma}_{22}^*) = f(\tilde{\sigma}_{11}^{**}; \tilde{\sigma}_{22}^{**}) - k e_v(\tilde{\sigma}_{11}^{**}; \tilde{\sigma}_{22}^{**}) \quad (19)$$

Формула для визначення шуканого множника k має вигляд:

$$k = \frac{f(\tilde{\sigma}_{11}^{**}; \tilde{\sigma}_{22}^{**}) - f(\tilde{\sigma}_{11}^*; \tilde{\sigma}_{22}^*)}{e_v(\tilde{\sigma}_{11}^{**}; \tilde{\sigma}_{22}^{**}) - e_v(\tilde{\sigma}_{11}^*; \tilde{\sigma}_{22}^*)}. \quad (20)$$

На поверхні $f(\sigma_{11}; \sigma_{22})$ виберемо точку C з такими координатами σ_{11}^T , σ_{22}^T та $f(\sigma_{11}^T; \sigma_{22}^T)$ щоб площини ABC та $A_v^* B_v^* C_v^*$ були паралельними. Тоді, з огляду на формули (16) – (17) та (20), шукане рівняння площини ABC матиме вигляд:

$$y(\sigma_{11}; \sigma_{22}) = \frac{kL}{E_{11}} \left(1 - \mu_{23}\mu_{32} + (\mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + \left(\mu_{32}\mu_{21} - \mu_{31} \right) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} \right) (\sigma_{11} - a) + \quad (21)$$

$$+ \frac{kL}{E_{22}} \left(1 - \mu_{13}\mu_{31} + (\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12}) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} + \left(\mu_{31}\mu_{12} - \mu_{32} \right) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{33}}} \right) (\sigma_{22} - b),$$

де a і b – сталі величини, розмірності напружень.

Математична модель міцності матеріалу з двовісним напруженим станом в одній зі структурних площин симетрії

У граничному напруженому стані значення густини потенціальної енергії та відносної об'ємної деформації дорівнюють граничним значенням. Тому для отримання математичної моделі міцності анізотропних матеріалів з двовісним напруженим станом достатньо прирівняти праві частини рівнянь (14) та (21). У результаті після нескладних математичних перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{L}{2\sqrt{E_{11}E_{22}}} \left((1 - \mu_{23}\mu_{32}) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} \sigma_{11}^2 + (\mu_{13}\mu_{32} + \mu_{23}\mu_{31} - \mu_{12}\mu_{21}) \sigma_{11}\sigma_{22} + (1 - \mu_{13}\mu_{31}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \sigma_{22}^2 \right) + \\ & + \frac{kL}{E_{11}} \left(1 - \mu_{23}\mu_{32} + (\mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + \left(\mu_{32}\mu_{21} - \mu_{31} \right) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} \right) (\sigma_{11} - a) + \\ & + \frac{kL}{E_{22}} \left(1 - \mu_{13}\mu_{31} + (\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12}) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} + \left(\mu_{31}\mu_{12} - \mu_{32} \right) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{33}}} \right) (\sigma_{22} - b) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Геометричною інтерпретацією рівняння (22) є наведена на рис. 2 штрихова лінія, яка є проекцією лінії перетину поверхні $f(\sigma_{11}; \sigma_{22})$ та площини ABC на площину $O\sigma_{11}\sigma_{22}$ декартової системи координат (рис. 1). Згідно з рис. 1 та 2 ця лінія задовольняє вимоги гладкості, випуклості та замкнутості, окрім цього, вона охоплює початок координат, точку (0;0;0). Оскільки ці вимоги є необхідними умовами для обґрунтування достовірності відомих теорій міцності Є. К. Ашкеназі, Гольденבלата–Копнова, Мізеса–Хілла, К. В. Захарова, то запропонована модель міцності анізотропних композитних матеріалів з двовісним напруженим станом є достовірною.

Висновки

Побудовано нову математичну модель для визначення локальної міцності анізотропних матеріалів з двовісним напруженим станом у площинах структурної симетрії, яка на відміну від відомих, дає змогу розрахувати граничний напружений стан матеріалів зі слабкою та сильною асиметрією меж міцності у напрямках ортотропії.

1. Божидарник В. В. *Елементи теорії пластичності та міцності* / В. В. Божидарник, Г. Т. Сулим. – Львів : Світ, 1999. – Т. 2. – 532 с. 2. Яценко В. Ф. *Прочность композиционных материалов* / В. Ф. Яценко. – К.: Выща школа Головное изд-во, 1988. – 191 с. 3. Гольденблат И. И. *Длительная прочность в машиностроении* / И. И. Гольденблат, В. Л. Бажанов, В. А. Копнов. – М.: Машиностроение, 1977. – 192 с. 4. Булдігін В. В. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посібник* / В. В. Булдігін, І. В. Алексеева, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдігіна. – К. : ТВіМС, 2011. – 224 с. 5. Черных К. В. *Введение в анизотропную упругость* / К. В. Черных. – М. : Наука, 1988. – 192 с.