УДК 536.24

В. Гавриш, Р. Шкраб
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра програмного забезпечення

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ РЕЖИМІВ У ШАРІ З ЧУЖОРІДНИМ НАСКРІЗНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянуто крайову осесиметричну задачу теплопровідності для ізотропного шару з наскрізним чужорідним циліндричним включенням на одній із межових поверхонь якого локально зосереджено тепловий потік. Після кусково-лінійної апроксимації температури на межовій поверхні включення з використанням інтегрального перетворення Ганкеля знайдено аналітично-числовий розв’язок задачі. Виконано та проаналізовано числові розрахунки температурного поля, де матеріалом шару та включення є кремній та срібло відповідно.

Ключові слова: температура, теплопровідність, осесиметрична задача, ізотропний шар, чужорідне наскрізне включення, ідеальний тепловий контакт, тепловий потік.

The paper considers axially-symmetric boundary-value problem of thermal conduction for isotropic layer with reach-through cylindrical foreign inclusion on the boundary surface of which the heat flow is concentrated. After piecewise linear approximation of the temperature on the boundary surface of the inclusion and with the use of Hankel integral transform, the analytical-numerical solution of the problem has been found. Numerical calculations of temperature field have been conducted and analyzed for given geometrical and thermophysical parameters where the inclusion layer material is silicon and silver respectively.

Key words: temperature, axially-symmetric problem, isotropic layer, reach-through cylindrical foreign inclusion, heat flow.

Вступ

Особливого значення для виробництва мікроелектронних пристроїв набувають композитні матеріали, серед яких важливе місце займають кусково-однорідні структури (шаруваті структури, однорідні і шаруваті структури з чужорідними включеннями), які широко застосовуються в інтегральних сенсорах для моніторингу температури і вологості, світловипромінювальних елементах для динамічних світлодіодних підсвіток, температурних перетворювачах тощо. Оскільки наведені структури як у процесі виробництва, так і при експлуатації перебувають у режимах широкого діапазону температур, що призводить до утворення структурних дефектів, то з метою прогнозування подальшої надійної роботи наведених пристроїв важливою проблемою є визначення температурних полів та їх градієнтів. У зв’язку з цим виникла необхідність створення нових лінійних математичних моделей процесу теплопровідності для шаруватих тіл з чужорідними наскрізними включеннями і розроблення ефективних методів розв’язування виникаючих при цьому лінійних крайових задач теплопровідності. В роботі [1] наведено деякі методи розв’язання лінійних крайових задач теплопровідності для однорідних тіл. В роботі [2] сформульовано задачу стаціонарної теплопровідності для шаруватих пластин сталої і змінної товщини в просторовій постановці. Методом початкових функцій тривимірну задачу зведено до двовимірної. Для пластини з шарами змінної товщини отримано систему рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Проаналізовано отримані двовимірні крайові задачі. Для пластин з однорідними шарами сталої товщини отримано розв’язок в аналітичній формі. Показано, що цей розв’язок збігається з розв’язком, отриманим методом розділення змінних. У роботі [3] побудовано зовнішній асимптотичний розклад розв’язку задачі нестаціонарної теплопровідності для шаруватих анізотропних неоднорідних пластин з крайовими умовами другого роду на лицьових поверхнях. Проаналізовано отримані двовимірні розв’язальні рівняння і досліджено асимптотичні властивості розв’язків задачі теплопровідності. Отримано оцінки точності, з якою температура в пластині за межовим шаром вважається кусково-лінійно або кусково-квадратично розподілено за товщиною шаруватої конструкції. Фізично обґрунтовано деякі особливості асимптотичного розкладу температури. Роботи [4–11] присвячені розвитку методів розв’язування стаціонарних лінійних задач теплопровідності з тепловіддачею для конструкцій двовимірної кусково-однорідної структури. У роботах [12, 13] наведено загальні рівняння теплопровідності для кусково-однорідних тіл.

Об’єкт дослідження. Математична модель

Розглянемо ізотропний відносно теплофізичних параметрів шар, який містить чужорідне наскрізне циліндричне включення з радіусом R, віднесений до циліндричної системи координат $(Or\varphi z)$ із початком в центрі включення. В області $_0=\{(r,\varphi,-l): r\le R, 0\le\varphi\le 2\pi\}$ межової поверхні $L_-=\{(r,\varphi,-l): 0\le r<\infty, 0\le\varphi\le 2\pi\}$ шару система нагрівається локально зосередженим тепловим потоком, поверхнева густина якого дорівнює $q_0=const$, а інша поверхня шару $L_+=\{(r,\varphi,l): 0\le r<\infty, 0\le\varphi\le 2\pi\}$ є теплоізольвованою. На межовій поверхні включення $K_R=\{(R,\varphi,z): 0\le\varphi\le 2\pi, |z|\le l\}$ існує ідеальний тепловий контакт (рис. 1).

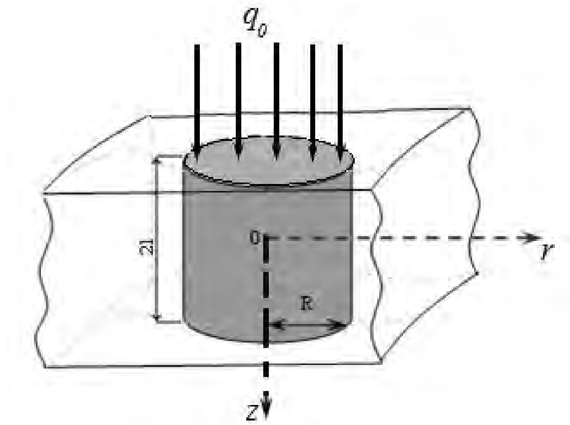

Рис. 1. Ізотропний шар з чужорідним наскрізним включенням циліндричної форми

Крайова задача. Розподіл температури $t(r,z)$ у наведеній системі отримаємо, розв’язавши рівняння теплопровідності [13,14]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda(r)\frac{\partial t}{\partial r}\right]+\lambda(r)\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$t|_{r\to\infty}=t_c\,,\quad \left.\frac{\partial t}{\partial r}\right|_{r\to\infty}=0\,,\quad \left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z=l}=0\,,\qquad \left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z=-l}=\frac{-q_0}{l_0}S_-(R-r), \tag{2}$$

де

$$\lambda(r)=\lambda_1+(\lambda_0-\lambda_1)S_-(R-r)- \tag{3}$$

коефіцієнт теплопровідності неоднорідного шару; λ_1,λ_0 – коефіцієнти теплопровідності матеріалів пластини та включення; t_c – температура середовища;

$$S_{\pm}(\zeta)=\begin{cases}1, & \zeta>0,\\ 0,5\mp 0,5, & \zeta=0,\\ 0, & \zeta<0\end{cases}$$ – асиметричні одиничні функції [14].

Введемо функцію

$$T = \lambda(r)q \tag{4}$$

і продиференціюємо її за змінною r, враховуючи опис коефіцієнта теплопровідності $l(r)$ (3). У результаті отримаємо:

$$\lambda(r)\frac{\partial q}{\partial r}=\frac{\partial T}{\partial r}+(\lambda_0-\lambda_1)q\big|_{r=R}\cdot d_+(r-R)\,. \tag{5}$$

Тут $q=t-t_c$ – надлишкова температура; $d_{\pm}(\zeta)=\dfrac{dS_{\pm}(\zeta)}{d\zeta}$ – асиметричні дельта-функції Дірака [14].

Підставивши вираз (5) у співвідношення (1), приходимо до диференціального рівняння з частинними похідними із сингулярними коефіцієнтами

$$\Delta T+\frac{R}{r}(\lambda_0-\lambda_1)q\,|_{r-R}\,d'_+(r-R)=0\,, \tag{6}$$

де $\Delta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial}{\partial r})+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат.

Отже, шукане температурне поле в наведеній системі цілком визначається з рівняння (6) та крайових умов (2).

Знаходження аналітично-числового розв'язку. Апроксимуємо функцію $q(R,z)$ (рис. 2) виразом

$$q(R,z)=q_1+\sum_{i=1}^{n-1}(q_{i+1}-q_i)S_-(z-z_i)\,, \tag{7}$$

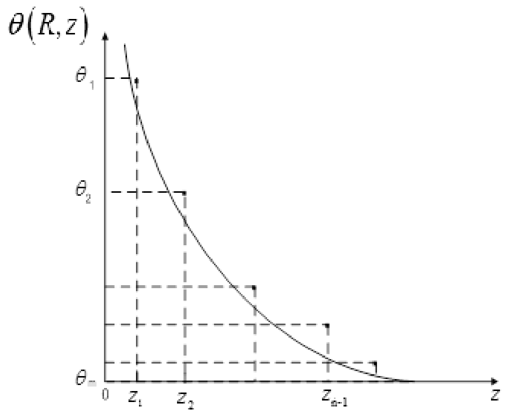

Рис. 2. Апроксимація функції $q(R,z)$

де $z_i\in\,]-l;l[\,;z_1\le z_2\le ...\le z_{n-1};q_i\ (i=\overline{1,n})$ – невідомі апроксимаційні значення надлишкової температури.

Підставивши вираз (7) у рівняння (6), отримаємо:

$$\Delta T=-\frac{R}{r}(\lambda_0-\lambda_1)[q_1+\sum_{i=1}^{n-1}(q_{i+1}-q_i)S_-(z-z_i)]d'_+(r-R)\,. \tag{8}$$

Застосувавши інтегральне перетворення Ганкеля за координатою r до рівняння (8) та крайових умов (2) із урахуванням співвідношення (4), приходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2\overline{T}}{dz^2}-\xi^2\overline{T}=-R\xi J_1(R\xi)(\lambda_0-\lambda_1)[q_1+\sum_{i=1}^{n-1}(q_{i+1}-q_i)S_-(z-z_i)] \tag{9}$$

і крайових умов

$$\left.\frac{d\bar{T}}{\partial z}\right|_{z=l} = 0\,,\ \left.\frac{d\bar{T}}{\partial z}\right|_{z=-l} = -\frac{q_0 R}{\xi} J_1\left(R\xi\right), \tag{10}$$

де $\bar{T} = \int_0^\infty r J_0(r\xi) T dr$ – трансформанта функції T; ξ – параметр інтегрального перетворення Ганкеля; $J_v\left(\zeta\right)$ – функція Бесселя першого роду n -го порядку.

Загальний розв'язок рівняння (9) отримуємо за методом варіації сталих у вигляді

$$\bar{T} = C_1 e^{xz} + C_2 e^{-xz} + \frac{R}{\xi}\left(\lambda_0 - \lambda_1\right) J_1\left(R\xi\right)[q_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(q_{i+1} - q_i\right)\left(1 - ch\xi(z - z_i)\right)S_-(z - z_i)].$$

Тут C_1, C_2 – сталі інтегрування.

Використавши крайові умови (10), отримаємо частковий розв'язок задачі (9), (10) у вигляді

$$\begin{aligned}\bar{T} = \frac{R}{\xi} J_1\left(R\xi\right)\{\left(\lambda_0 - \lambda_1\right)[q_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(q_{i+1} - q_i\right)(1 - ch\xi\left(z - z_i\right))S_-\left(z - z_i\right) + \\ + \frac{chx\,(l+z)}{sh2\xi l} sh\xi(l - z_i)] + \frac{q_0 ch\xi(z-l)}{\xi sh2\xi l}\}.\end{aligned} \tag{11}$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Ганкеля до співвідношення (11), одержимо

$$\begin{aligned}T(r,z) = R\int_0^\infty J_0(r\xi) J_1(R\xi)\{(\lambda_0 - \lambda_1)[q_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(q_{i+1} - q_i)(\frac{ch\xi(l+z)}{sh2\xi l} sh\xi(l - z_i) + \\ + (1 - ch\xi(z - z_i))S_-(z - z_i))] + \frac{q_0 ch\xi(z-l)}{\xi sh2\xi l}\}d\xi.\end{aligned} \tag{12}$$

Невідомі апроксимаційні значення $q_i\ (i = \overline{1,n})$ надлишкової температури знаходимо, розв'язавши систему n лінійних алгебраїчних рівнянь, отриману з виразу (12).

Отже, шукане температурне поле в шарі з наскрізним циліндричним включенням, що нагрівається локально зосередженим на межовій поверхні тепловим потоком, описано формулою (12), за якою визначаємо значення температури в довільний його точці.

Аналіз числових результатів

Виконано числовий аналіз безрозмірної надлишкової температури $T^* = \lambda_0 q / \left(q_0 R^2\right)$ для таких вихідних даних: матеріал шару – кремній $\left(\lambda_1 = 67\,вт/(м\cdot C^0)\right)$, матеріал включення – срібло $\left(\lambda_0 = 419\ вт/(м\cdot C^0)\right)$, $n = 10$ – кількість розбиттів інтервалу $]-l; l[$; $L = l / R = 1$.

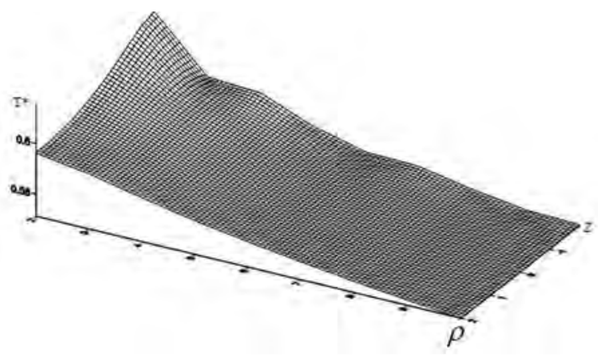

Рис. 3. Залежність безрозмірної температури T^*
від безрозмірних координат r та Z

Побудовано (рис. 3) залежність температури T^* від безрозмірних радіальної $r = r / R$ та аксіальної $Z = z / R$ координат. Зазначимо, що максимальна температура досягається в області дії локально зосередженого теплового потоку, а на краю K_R включення спостерігається виконання умов ідеального теплового контакту (відсутній стрибок температури), що відповідає розглядуваній математичній моделі.

Кількість розбиттів $n = 10$ інтервалу $]-l; l[$ для наведених теплофізичних (коефіцієнти теплопровідності для матеріалів шару та включення) та геометричних (радіус та висота включення, товщина шару) параметрів структури дає змогу виконати обчислення з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

Висновки

Із використанням методу, який ґрунтується на застосуванні узагальнених функцій, після кусково-лінійної апроксимації температури на межовій поверхні включення та з використанням інтегрального перетворення Ганкеля отримано аналітично-числовий розв'язок крайової осесиметричної задачі теплопровідності для шару з чужорідним наскрізним включенням циліндричної форми, що нагрівається локально зосередженим на межовій поверхні тепловим потоком. Встановлено, що по товщині ізотропного шару температура змінюється за лінійним законом для наведених крайових умов. Отримано числові результати на основі розроблених алгоритмів та програмних засобів, які дають змогу аналізувати температурні режими в окремих елементах мікроелектронних пристроїв, які описуються ізотропним шаром із чужорідним наскрізним циліндричним включенням, що нагрівається локально зосередженим тепловим потоком на одній із його межових поверхонь.

1. Беляев Н. В., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности. Ч. I. – М.: Высш. шк., 1982. – 327 с. 2.Немировский Ю. В., Янковский А. П. Решение стационарной задачи теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин методом начальных функций // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, №2. – С. 222–238. 3. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Асимптотический анализ задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин при граничных условиях первого и третьего рода на лицевых поверхностях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007.– 50, №2. – С. 160-175. 4. Havrysh V. I., Kosach A. I. Boundary-value problem of heat conduction for a piecewise homogeneous with foreign inclusion // Materials Science. – 2012. – 47, No 6. – P. 773–782. 5. Havrysh V. I., Fedasyuk D. V., Kosach A. I. Boundary-value problem of heat conduction for a layer with foreign cylindrical inclusion // Material Science. – 2011. – 46, No 5. – P. 702–708. 6. Gavrysh V. I. Thermal state modelling in thermosensitive elements of microelectronic devices with reach-through foreign inclusions // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. – 2012. – 15, No 3. – P. 247–251. 7. Gavrysh V. I. Modelling the temperature conditions in the three-dimensional piecewise homogeneous elements of microelectronic devices // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. – 2011. – 14, No 4. – P. 478–482. 8. Гаврыш В. И. Моделирование температурных режимов в кусочно-однородных елементах электронных устройств со сквозными тепловыделяющими инородными включениями // Электронное моделирование. – 2013. – 35, № 6.– С.63–74. 9. Гаврыш В. И., Косач А. И. Моделирование температурних режимов в элементах микроэлектронных устройств // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2011. – № 1–2 (90). – С. 27–30. 10. Fedasyuk D.,Gavrysh V. Modelling of temperature conditions in electrical devices of inhomogeneous structure // Computational Problems of Electrical Engineering. – 2012. – 2, No 1. – P. 25–28. 11. Гавриш В. І., Федасюк Д. В. Моделювання температурних режимів у кусково-однорідних структурах. – Львів : В-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2012. – 176 с. 12. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с. 13. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наукова думка, 1992. – 280 с. 14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1977. – 720 с.