УДК 004.94

Я. Соколовський, М. Левкович
Національний лісотехнічний університет України

ЧИСЛОВИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ НЕІЗОТЕРМІЧНОГО ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ У СЕРЕДОВИЩАХ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ

Синтезовано двовимірні математичні моделі неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою з врахуванням ефектів пам'яті та просторової кореляції. Побудовані явні та неявні різницеві схеми для зв'язаних рівнянь тепломасоперенесення у двовимірній області з граничними умовами третього роду. Наведено алгоритмічні аспекти для реалізації отриманих різницевих рівнянь з використанням методу предиктор-коректор та проаналізовані умови стійкості різницевих схем.

Ключові слова: тепломасоперенесення, фрактальні структури, різницеві схеми, похідні дробового порядку, стійкість, апроксимація дробових похідних.

The synthesized two-dimensional mathematical models of non-isothermal humidity transfer in media with fractal structure taking into account the effects of memory and spatial correlation. Built explicit and implicit difference schemes for equations related heat-mass transfer in two-dimensional domain with boundary conditions of the third kind. These algorithmic aspects for the realization of the obtained difference equations using method predictor-corrector and analyzed the conditions of stability of difference schemes.

Key words: heat-mass transfer, fractal structures, difference schemes, derivatives of fractional order, stability, approximation fractional derivatives.

Актуальність досліджень

Математичне моделювання процесів тепломасоперенесення в системах із фрактальною структурою, для яких характерні ефекти пам'яті, просторової нелокальності та самоорганізації, як правило, ґрунтується на застосуванні математичного апарату інтегродиференціювання дробового порядку. Значне зацікавлення до апарату дробового інтегродиференціювання було викликане його фізичною інтерпретацією, а також можливістю використання замість одного рівняння однопараметричний континуум диференційних рівнянь, пов'язаних показником дробовості. Диференціальні рівняння дробового порядку описують еволюцію фізичних систем із залишковою пам'ятю, які займають проміжне місце між марківськими системами та системами, які характеризуються повною пам'яттю. Зокрема, показник дробовості вказує на частку станів системи, що зберігаються протягом усього процесу її функціонування.

Математичний апарат дробових похідних і дробових інтегралів має давню історію та бере свій початок ще з часів зародження диференціального числення. Сьогодні сам математичний апарат дробових похідних є доволі розвиненим, проте його використовують для створення математичних моделей систем із фрактальною структурою недавно. З кожним роком все більше зростає зацікавленість щодо використання дробових диференціальних рівнянь для моделювання різних процесів майже в усіх галузях науки: в механіці, фізиці, біофізиці, економіці, теорії інформації, соціології тощо. Адже його застосування дає змогу глибше зрозуміти відомі результати та отримати новий клас рішень, які не змогли охопити класичні теорії цілочислового диференціювання. Проте, незважаючи на підвищений іенерес до таких досліджень, виникають нові задачі, які залишаються до кінця не розв'язаними, а також потребують коректної та фізично-осмисленої постановки граничних і початкових умов.

Аналіз сучасного стану досліджень

Сьогодні для розв'язання диференціальних рівнянь дробового порядку використовують як аналітичні, так і числові методи. Проте зважаючи на значні труднощі у використанні аналітичних методів, більш ефективними та простішими у застосуванні є числові методи з використанням скінченно-різницевих апроксимацій.

Побудові численних методів з використанням явних і неявних різницевих схем для розв'язання диференційних рівнянь у частинних похідних з дробовою похідною за часом і просторовими координатами присвячено дослідження [4–7]. У працях [4–12] застосовано метод скінченних різниць для знаходження розв'язку одновимірної та двовимірної задачі тепло-провідності із похідними дробового порядку. Наведено критерії стійкості отриманих різницевих схем. Зокрема, у [6, 7] розглянуто одновимірну та двовимірну математичні моделі нестаціонарного процесу теплоперенесення із граничними умовами третього роду. Слід зауважити, що небагато робіт присвячено крайовим задачам дробового порядку із граничними умовами третього роду. У працях [8–10] застосовано явні та неявні схеми методу скінченних різниць для дослідження рівнянь тепломасоперенесення, вологоперенесення та в'язкопружного деформування з похідними дробового порядку за часом та граничними умовами третього роду. Побудовам локально-одномірних схем для рівняння дифузії дробового порядку із граничними умовами третього роду присвячено праці [11, 12].

Новизною цієї роботи є розглянуті взаємозв'язані процеси тепло- та вологоперенесення, що описуються системою диференціальних рівнянь у частинних похідних із дробовим порядком за часом та просторовими координатами та граничними умовами третього роду. Для знаходження числового розв'язку задачі використано метод предиктор-коректор. Предиктор реалізований за допомогою неявної різницевої схеми методу скінченних різниць, коректор – явної різницевої схеми.

Постановка задачі

Математична модель процесу тепло- та вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних із дробовим порядком за часом t та просторовими координатами x_1 та x_2

$$c r \frac{\partial^a T(t,x_1,x_2)}{\partial t^a} = l_1 \frac{\partial^b T(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^b} + l_2 \frac{\partial^b T(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^b} + e r_0 r \frac{\partial^a U(t,x_1,x_2)}{\partial t^a}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^a U(t,x_1,x_2)}{\partial t^a} = a_1 \frac{\partial^b U(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^b} + a_2 \frac{\partial^b U(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^b} + a_1 d \frac{\partial^b T(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^b} + a_2 d \frac{\partial^b T(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^b}, \quad (2)$$

з початковими умовами

$$T\big|_{t=0} = T_0(x_1,x_2), \quad (3)$$

$$U\big|_{t=0} = U_0(x_1,x_2), \quad (4)$$

та граничними умовами третього роду

$$l_i \left.\frac{\partial^g T}{\partial x_i^g}\right|_{x_i=l_i} + r_0(1-e) b_i \left(U\big|_{x_i=l_i} - U_{pi}\right) = a_i \left(T\big|_{x_i=l_i} - t_{ci}\right), \quad (5)$$

$$a_i d \left.\frac{\partial^g T}{\partial x_i^g}\right|_{x_i=l_i} + a_i \left.\frac{\partial^g U}{\partial x_i^g}\right|_{x_i=l_i} = b_i \left(U_{pi} - U\big|_{x_1=l_i}\right), \quad (6)$$

$$l_i \left.\frac{\partial^g T}{\partial x_i^g}\right|_{x_i=0} + r_0(1-e) b_i^* \left(U\big|_{x_i=0} - U_{pi}^*\right) = a_i^* \left(T\big|_{x_i=0} - t_{ci}^*\right), \quad (7)$$

$$a_i d \left.\frac{\partial^g T}{\partial x_i^g}\right|_{x_i=0} + a_i \left.\frac{\partial^g U}{\partial x_i^g}\right|_{x_i=0} = b_i^* \left(U_{pi}^* - U\big|_{x_i=0}\right), \quad (8)$$

де $(t, x_1, x_2) \in D, D = [0,t] \times [0,l_1] \times [0,l_2]$; T, U – шукані функції, де T – температура, U – вологовміст, c – питома теплоємність, r – густина, r_0 – базисна густина, e – коефіцієнт фазового переходу, r – питома теплота пароутворення, l_i $(i=1,2)$ – коефіцієнти теплопровідності, a_i $(i=1,2)$ – коефіцієнти вологопровідності, d – термоградієнтний коефіцієнт, t_{ci}, t_{ci}^* $(i=1,2)$ – значення температури середовища, U_{pi}, U_{pi}^* $(i=1,2)$ – значення відносної вологості зовнішнього середовища, a_i, a_i^* $(i=1,2)$ – коефіцієнти теплообміну, b_i, b_i^* $(i=1,2)$ – коефіцієнти волого-обміну, l_i $(i=1,2)$ – геометричні розміри, a – дробовий порядок похідної за часом $(0 < a \le 1)$, b, g – дробові показники похідної за просторовими координатами $(1 < b \le 2)$, $(0 < g \le 1)$.

Числовий метод розв'язання задачі

В області D введемо просторово-часову сітку:

$$v_{\Delta t, h_1, h_2} = \{(t^k, x_{1(n)}, x_{2(m)}) : x_{1(n)} = (n-1)h_1, x_{2(m)} = (m-1)h_2, t^k = k\Delta t, n = 1,...,N; h_1 = \frac{l_1}{N-1}; m = 1,...,M;$$
$$h_2 = \frac{l_2}{M-1}; k = 0,1,...,K; \Delta t = \frac{t}{K}\}.$$

Використавши формулу Рімана–Ліувілля [2]:

$$\left.\frac{\partial^a f(t)}{\partial t^a}\right|_{t^k} = \frac{1}{\Gamma(1-a)}\left(\frac{f(t^k)}{(t^{k+1} - t^k)^a} + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \frac{f'(x)}{(t^{k|+1} - x)^a} dx\right)$$

різницеву апроксимацію дробової похідної a $(0 < a \le 1)$ на відрізку $[t^k, t^{k+1}]$ можна записати так:

$$\left.\frac{\partial^a u}{\partial t^a}\right|_{t^k} \approx \frac{u^{k+1} - a u^k}{\Gamma(2-a)\Delta t^a}, \Delta t = t^{k+1} - t^k, \tag{9}$$

де $\Gamma(a)$ – гамма-функція.

Для визначення дробової похідної b $(1 < b \le 2)$ за координатами x_1, x_2 скористаємось формулою Грюнвальда–Летнікова [3]:

$$\frac{\partial^b f(t)}{\partial x_i^b} = \lim_{h_i \to 0} \frac{1}{h_i^b} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{h_i}\right]} (-1)^j \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(b-j+1)} f(x_i - j + 1),$$

де $h_i = x_{i\,n+1} - x_{i\,n}$, $[x_i]$ – ціла частина x_i, $i = 1,2$.

Тоді різницева апроксимація дробової похідної b за координатами x_1 і x_2 матиме вигляд:

$$\left.\frac{\partial^b u}{\partial x_1^b}\right|_{x_{1(n)}} \approx \frac{1}{h_1^b} \sum_{j=0}^{n} q_j u_{n-j+1}, \quad \left.\frac{\partial^b u}{\partial x_2^b}\right|_{x_{2(m)}} \approx \frac{1}{h_2^b} \sum_{j=0}^{m} q_j u_{m-j+1}, \tag{10}$$

де $q_0 = 1, q_j = (-1)^j \dfrac{b(b-1)...(b-j+1)}{j!}$.

Враховуючи (9), (10), отримаємо неявну різницеву схему для числової реалізації системи диференціальних рівнянь (1), (2):

$$cr \frac{T_{n,m}^{k+1} - a T_{n,m}^k}{\Gamma(2-a)\Delta t^a} = \frac{l_1}{h_1^b} \sum_{j=0}^{n} q_j T_{n-j+1,m}^{k+1} + \frac{l_2}{h_2^b} \sum_{j=0}^{m} q_j T_{n,m-j+1}^{k+1} + e r_0 r \frac{U_{n,m}^{k+1} - a U_{n,m}^k}{\Gamma(2-a)\Delta t^a}, \tag{11}$$

$$\frac{U_{n,m}^{k+1}-aU_{n,m}^{k}}{\Gamma(2-a)\Delta t^{a}}=\frac{a_1}{h_1^{b}}\sum_{j=0}^{n}q_jU_{n-j+1,m}^{k+1}+\frac{a_2}{h_2^{b}}\sum_{j=0}^{m}q_jU_{n,m-j+1}^{k+1}+\frac{a_1d}{h_1^{b}}\sum_{j=0}^{n}q_jT_{n-j+1,m}^{k+1}+\frac{a_2d}{h_2^{b}}\sum_{j=0}^{m}q_jT_{n,m-j+1}^{k+1}. \quad (12)$$

Явна різницева схема буде така:

$$cr\frac{T_{n,m}^{k+1}-aT_{n,m}^{k}}{\Gamma(2-a)\Delta t^{a}}=\frac{l_1}{h_1^{b}}\sum_{j=0}^{n}q_jT_{n-j+1,m}^{k}+\frac{l_2}{h_2^{b}}\sum_{j=0}^{m}q_jT_{n,m-j+1}^{k}+er_0r\frac{U_{n,m}^{k+1}-aU_{n,m}^{k}}{\Gamma(2-a)\Delta t^{a}}, \quad (13)$$

$$\frac{U_{n,m}^{k+1}-aU_{n,m}^{k}}{\Gamma(2-a)\Delta t^{a}}=\frac{a_1}{h_1^{b}}\sum_{j=0}^{n}q_jU_{n-j+1,m}^{k}+\frac{a_2}{h_2^{b}}\sum_{j=0}^{m}q_jU_{n,m-j+1}^{k}+\frac{a_1d}{h_1^{b}}\sum_{j=0}^{n}q_jT_{n-j+1,m}^{k}+\frac{a_2d}{h_2^{b}}\sum_{j=0}^{m}q_jT_{n,m-j+1}^{k}. \quad (14)$$

Початкові умови:

$$T_{n,m}^{0}=T_0\left(x_{1(n)},x_{2(m)}\right),\ U_{n,m}^{0}=U_0\left(x_{1(n)},x_{2(m)}\right). \quad (15)$$

Скінченно-різницевий аналог граничних умов має вигляд:

$$\begin{aligned}
&l_i\frac{T_R^{k+1}-gT_{R-1}^{k+1}}{\Gamma(2-g)h_i^{g}}+r_0(1-e)b_i\left(U_R^{k+1}-U_{pi}\right)=a_i\left(T_R^{k+1}-t_{ci}\right),\\
&a_id\frac{T_R^{k+1}-gT_{R-1}^{k+1}}{\Gamma(2-g)h_i^{g}}+a_i\frac{U_R^{k+1}-gU_{R-1}^{k+1}}{\Gamma(2-g)h_i^{g}}=b_i\left(U_{pi}-U_R^{k+1}\right),\\
&l_i\frac{T_2^{k+1}-gT_1^{k+1}}{\Gamma(2-g)h_i^{g}}+r_0(1-e)b_i^{*}\left(U_1^{k+1}-U_{pi}^{*}\right)=a_i^{*}\left(T_1^{k+1}-t_{ci}^{*}\right),\\
&a_id\frac{T_2^{k+1}-gT_1^{k+1}}{\Gamma(2-g)h_i^{g}}+a_i\frac{U_2^{k+1}-gU_1^{k+1}}{\Gamma(2-g)h_i^{g}}=b_i^{*}\left(U_{pi}^{*}-U_1^{k+1}\right),
\end{aligned} \quad (16)$$

де $i=1{,}2$ (якщо $i=1$, то $R=N$ та якщо $i=2$, то $R=\mathrm{M}$).

Використаємо метод предиктор-коректор [13] для знаходження числових розв'язків отриманої системи різницевих рівнянь. У ролі предиктора використаємо неявну різницеву схему (11), (12), а у ролі коректора – явну різницеву схему (13), (14).

На першому півкроці інтервалу $\Delta t/2$ запишемо неявну різницеву схему, у якій врахуємо тільки похідну дробового порядку b за координатою x_1:

$$cr\frac{T_{n,m}^{k+1/4}-aT_{n,m}^{k}}{\Gamma(2-a)\left(\Delta t/2\right)^{a}}=\frac{l_1}{h_1^{b}}\sum_{j=0}^{n}q_jT_{n-j+1,m}^{k+1/4}+er_0r\frac{U_{n,m}^{k+1/4}-aU_{n,m}^{k}}{\Gamma(2-a)\left(\Delta t/2\right)^{a}}, \quad (17)$$

$$\frac{U_{n,m}^{k+1/4}-aU_{n,m}^{k}}{\Gamma(2-a)\left(\Delta t/2\right)^{a}}=\frac{a_1}{h_1^{b}}\sum_{j=0}^{n}q_jU_{n-j+1,m}^{k+1/4}+\frac{a_1d}{h_1^{b}}\sum_{j=0}^{n}q_jT_{n-j+1,m}^{k+1/4}, \quad (18)$$

Рівняння (17) для зручності перепишемо у вигляді:

$$U_{n,m}^{k+1/4}=-A_1q_0T_{n+1,m}^{k+1/4}+\left(\frac{cr}{er_0r}-A_1q_1\right)T_{n,m}^{k+1/4}-A_1\sum_{j=2}^{n}q_jT_{n-j+1,m}^{k+1/4}+a\left(U_{n,m}^{k}-\frac{cr}{er_0r}T_{n,m}^{k}\right), \quad (19)$$

де $A_1=\dfrac{l_1\Gamma(2-a)\left(\Delta t/2\right)^{a}}{er_0rh_1^{b}}$.

Граничні умови (16) відносно координати x_1, що відповідають рівнянню (17) запишемо у такому вигляді:

$$U_{N,m}^{k+1/4}=\left(\frac{a_1}{r_0(1-e)b_1}-B_1\right)T_{N,m}^{k+1/4}+B_1gT_{N-1,m}^{k+1/4}+U_{p1}-\frac{a_1t_{c1}}{r_0(1-e)b_1}, \quad (20)$$

$$U_{1,m}^{k+1/4} = \left(\frac{a_1^*}{r_0(1-e)b_1^*} + B_1^* g\right) T_{1,m}^{k+1/4} - B_1^* T_{2,m}^{k+1/4} + U_{p1}^* - \frac{a_1^* t_{c1}^*}{r_0(1-e)b_1^*}, \tag{21}$$

де $B_1 = \dfrac{l_1}{r_0(1-e)b_1 \Gamma(2-g)h_1^g}$, $B_1^* = \dfrac{l_1}{r_0(1-e)b_1^* \Gamma(2-g)h_1^g}$.

Запишемо в матричному вигляді рівняння (19)–(21):

$$U_n^{k+1/4} = AT_n^{k+1/4} + aU_n^k - \frac{acr}{er_0 r} T_n^k + \Psi_1, \tag{22}$$

де $U_n^{k+1/4} = \left[U_{1,m}^{k+1/4}, U_{2,m}^{k+1/4}, ..., U_{N-1,m}^{k+1/4}, U_{N,m}^{k+1/4}\right]^T$, $T_n^{k+1/4} = \left[T_{1,m}^{k+1/4}, T_{2,m}^{k+1/4}, ..., T_{N-1,m}^{k+1/4}, T_{N,m}^{k+1/4}\right]^T$,

$U_n^k = \left[0, U_{2,m}^k, ..., U_{N-1,m}^k, 0\right]^T$, $T_n^k = \left[0, T_{2,m}^k, ..., T_{N-1,m}^k, 0\right]^T$, $\Psi_1 = \left[U_{p1}^* - \dfrac{a_1^* t_{c1}^*}{r_0(1-e)b_1^*}, 0, ..., 0, U_{p1} - \dfrac{a_1 t_{c1}}{r_0(1-e)b_1}\right]^T$.

Компоненти a_{ij}, $i, j = \overline{1, N}$, матриці A визначаються за виразами:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0,\ j \ge i+2; & \left(\dfrac{a_1}{r_0(1-e)b_1} - B_1\right), i = j = N; \\ 0, i = N, 1 \le j \le N-2; & -B_1^*, i = 1, j = 2; \\ \left(\dfrac{cr}{er_0 r} - A_1 q_1\right), i = j \ne 1 \ne N; & B_1 g, i = N, j = N-1; \\ \left(\dfrac{a_1^*}{r_0(1-e)b_1^*} + B_1^* g\right), i = j = 1; & -A_1 q_{i-j+1}, \text{інше}. \end{cases}$$

Аналогічно запишемо у матричному вигляді рівняння (18) та граничні умови (16), що відповідають йому:

$$BT_n^{k+1/4} + CU_n^{k+1/4} + \Psi_2 + aU_n^k = 0, \tag{23}$$

$C = (c_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $i, j = \overline{1, N}$,

$$c_{ij} = \begin{cases} 0,\ j \ge i+2; \\ 0, i = N, 1 \le j \le N-2; \\ (Z_1 q_1 - 1), i = j \ne 1 \ne N; \\ \left(a_1 g - b_1^* \Gamma(2-g) h_1^g\right), i = j = 1; \\ -\left(a_1 + b_1 \Gamma(2-g) h_1^g\right), i = j = N; \\ -a_1, i = 1, j = 2; \\ a_1 g, i = N, j = N-1; \\ Z_1 q_{i-j+1}, \text{інше}. \end{cases} \quad b_{ij} = \begin{cases} 0,\ j \ge i+2; \\ 0, i = N, 1 \le j \le N-2; \\ Zq_1 d, i = j \ne 1 \ne N; \\ a_1 dg, i = j = 1; i = N, j = N-1; \\ -a_1 d, i = j = N; i = 1, j = 2; \\ Zq_{i-j+1} d, \text{інше}. \end{cases}$$

$Z_1 = \dfrac{a_1 \Gamma(2-a)\left(\Delta t/2\right)^a}{h_1^b}$, $\Psi_2 = \left[b_1^* \Gamma(2-g) h_1^g U_{p1}^*, 0, ..., 0, b_1 \Gamma(2-g) h_1^g U_{p1}\right]^T$.

Підставляємо (22) в (23) і отримаємо систему рівнянь, яку розв'язуємо відносно функції T:

$$(B + CA) T_n^{k+1/4} - \frac{acr}{er_0 r} CT_n^k + (aC + a) U_n^k + \Psi_1 + \Psi_2 = 0. \tag{24}$$

Знайшовши із (24) множину розв'язків - $T_{1,m}^{k+1/4}, T_{2,m}^{k+1/4}, ..., T_{N-1,m}^{k+1/4}, T_{N,m}^{k+1/4}, (k = 0,1,...,K-1)$, шукаємо із (22) множину розв'язків - $U_{1,m}^{k+1/4}, U_{2,m}^{k+1/4}, ..., U_{N-1,m}^{k+1/4}, U_{N,m}^{k+1/4}, (k = 0,1,...,K-1)$.

На другому півкроці інтервалу $\Delta t/2$ запишемо неявну різницеву схему, у якій врахуємо тільки похідну дробового порядку b за просторовою координатою x_2:

$$cr\frac{T_{n,m}^{k+1/2}-aT_{n,m}^{k+1/4}}{\Gamma(2-a)\left(\Delta t/2\right)^{a}}=\frac{l_2}{h_2^{b}}\sum_{j=0}^{m}q_jT_{n,m-j+1}^{k+1/2}+er_0r\frac{U_{n,m}^{k+1/2}-aU_{n,m}^{k+1/4}}{\Gamma(2-a)\left(\Delta t/2\right)^{a}},\qquad(25)$$

$$\frac{U_{n,m}^{k+1/2}-aU_{n,m}^{k+1/4}}{\Gamma(2-a)\left(\Delta t/2\right)^{a}}=\frac{a_2}{h_2^{b}}\sum_{j=0}^{m}q_jU_{n,m-j+1}^{k+1/2}+\frac{a_2d}{h_2^{b}}\sum_{j=0}^{m}q_jT_{n,m-j+1}^{k+1/2}.\qquad(26)$$

Аналогічно як і на першому півкроці, на другому півкроці отримаємо дві системи. Розв’язавши їх, отримаємо множину розв’язку відносно функції T – $T_{n,1}^{k+1/2},T_{n,2}^{k+1/2},...,T_{n,M-1}^{k+1/2},T_{n,M}^{k+1/2},(k=0,1,...,K-1)$ та множину розв’язку відносно функції U – $U_{n,1}^{k+1/2},U_{n,2}^{k+1/2},...,U_{n,M-1}^{k+1/2},U_{n,M}^{k+1/2},(k=0,1,...,K-1)$.

Для знаходження розв’язків на усьому інтервалі Δt використаємо коректор, який реалізовується на явній різницевій схемі:

$$cr\frac{T_{n,m}^{k+1}-aT_{n,m}^{k}}{\Gamma(2-a)\Delta t^{a}}=\frac{l_1}{h_1^{b}}\sum_{j=0}^{n}q_jT_{n-j+1,m}^{k+1/2}+\frac{l_2}{h_2^{b}}\sum_{j=0}^{m}q_jT_{n,m-j+1}^{k+1/2}+er_0r\frac{U_{n,m}^{k+1}-aU_{n,m}^{k}}{\Gamma(2-a)\Delta t^{a}},\qquad(27)$$

$$\frac{U_{n,m}^{k+1}-aU_{n,m}^{k}}{\Gamma(2-a)\Delta t^{a}}=\frac{a_1}{h_1^{b}}\sum_{j=0}^{n}q_jU_{n-j+1,m}^{k+1/2}+\frac{a_2}{h_2^{b}}\sum_{j=0}^{m}q_jU_{n,m-j+1}^{k+1/2}+\frac{a_1d}{h_1^{b}}\sum_{j=0}^{n}q_jT_{n-j+1,m}^{k+1/2}+\frac{a_2d}{h_2^{b}}\sum_{j=0}^{m}q_jT_{n,m-j+1}^{k+1/2}.\qquad(28)$$

Отже, за (28) знаходимо множину розв’язку - $\left\{U_{n,m}^{k+1}:k=\overline{0,K-1};n=\overline{1,N};m=\overline{1,M}\right\}$, а із (27) отримаємо множину розв’язку - $\left\{T_{n,m}^{k+1}:k=\overline{0,K-1};n=\overline{1,N};m=\overline{1,M}\right\}$.

Алгоритмічні аспекти

Представимо основні кроки алгоритму для реалізації отриманих різницевих рівнянь за методом предиктор-коректор:

1. На часовому кроці $k=0$ реалізацією циклів по $n=1,...,N$ та $m=1,...,M$ з початкових умов (15) знайдемо значення функцій $T_{n,m}^{0},U_{n,m}^{0}$.

2. Для умови $0\le k<K$ здійснюємо такі операції:

2.1. РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ПРЕДИКТОР.

2.1.1. Для $n=1,...,N$; $m=1,...,M$ здійснюємо цикли для $k=k+1/4$;

2.1.2. Знаходимо з матричних рівнянь (24), (22) значення $T_{n,m}^{k+1/4}$, $U_{n,m}^{k+1/4}$;

2.1.3. Для $n=1,...,N$; $m=1,...,M$ здійснюємо цикли для $k=k+1/2$;

2.1.4. Знаходимо розв’язки $T_{n,m}^{k+1/2}$ та $U_{n,m}^{k+1/2}$ за рівняннями (25), (26);

2.2. РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ КОРЕКТОР.

2.2.1. Для $k=k+1$, $n=2,...,N-1$; $m=2,...,M-1$ у циклах знаходимо значення $U_{n,m}^{k+1}$ та $T_{n,m}^{k+1}$ з рівнянь (28) та (27);

2.2.2. Шукані значення $T_{N,m}^{k+1}$, $T_{1,m}^{k+1}$; $U_{N,m}^{k+1}$, $U_{1,m}^{k+1}$; $T_{n,M}^{k+1}$, $T_{n,1}^{k+1}$; $U_{n,M}^{k+1}$, $U_{n,1}^{k+1}$ знаходимо за граничними умовами (16).

3. Збільшуємо часовий крок на $k = k+1$ і для умови $0 \le k < K$ здійснюємо реалізацію підпунктів 2.1 – 2.2, тобто методу предиктор-коректор. У протилежному випадку, тобто якщо не виконується умова $0 \le k < K$, завершуємо реалізацію обчислень.

Умови стійкості

У працях, присвячених числовим методам розв'язання диференційних рівнянь дробового порядку, питання стійкості розглядалося з використанням класичних методів та з врахуванням властивостей дробового диференціювання. Однак поширення отримали деякі практичні підходи до дослідження стійкості різницевих схем тепломасоперенесення, які отримали теоретичне обгрунтування для часткових випадків. Для визначення умов стійкості отриманих різницевих рівнянь зв'язаного тепломасоперенесення скористаємось методом умовного задання деяких відомих функцій системи [13]. За таким підходом можна звести стійкість системи рівнянь до дослідження стійкості її окремих рівнянь. Оскільки предиктор реалізований за неявною схемою, а вона, свою чергою, є абсолютно стійкою, то питання стійкості різницевих рівнянь для числового розв'язання задачі (1)–(8) залежить від коректора, що реалізований за явною різницевою схемою.

Тому визначимо умови стійкості для явної схеми. Для цього перепишемо рівняння (28) у такому вигляді:

$$\frac{U_{n,m}^{k+1} - aU_{n,m}^{k}}{\Gamma(2-a)\Delta t^{a}} = \frac{a_1}{h_x^b}\sum_{j=0}^{n} q_j\left(U_{n-j+1,m}^{k+1/2} + dT_{n-j+1,m}^{k+1/2}\right) + \frac{a_2}{h_y^b}\sum_{j=0}^{m} q_j\left(U_{n,m-j+1}^{k+1/2} + dT_{n,m-j+1}^{k+1/2}\right). \tag{29}$$

Зведемо рівняння (29) до такого різницевого співвідношення:

$$\begin{aligned} W_{(opt)}{}_{n,m}^{k+1} - aW_{(opt)}{}_{n,m}^{k} = \frac{a_1\Gamma(2-a)\Delta t^{a}}{h_x^b}(1+d)\sum_{j=0}^{n} q_j W_{(opt)}{}_{n-j+1,m}^{k+1/2} + \\ + \frac{a_2\Gamma(2-a)\Delta t^{a}}{h_y^b}(1+d)\sum_{j=0}^{m} q_j W_{(opt)}{}_{n,m-j+1}^{k+1/2}, \end{aligned} \tag{30}$$

де $W_{(opt)} = U, T.$

Для знаходження необхідних умов стійкості рівняння (30) використаємо метод інтеграла Фур'є [13]. Розв'язок рівняння (30) запишемо у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить від часу, а друга – від просторових координат:

$$W_{(opt)}{}_{n,m}^{k} = x^k \exp\{iw_1 nh_1 + iw_2 mh_2\}, \tag{31}$$

де $i^2 = -1$, w_1, w_2 – деякі дійсні числа.

Після підстановки (31) в (30) та додавши до обидвох частин виразу a, отримаємо:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}} + a = a - \frac{a_1\Gamma(2-a)\Delta t^{a}}{h_1^b}(1+d)\left(4\sin^2\frac{w_1h_1}{2} + b - 2\right) - \\ - \frac{a_2\Gamma(2-a)\Delta t^{a}}{h_2^b}(1+d)\left(4\sin^2\frac{w_2h_2}{2} + b - 2\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Запишемо рівняння (32) у вигляді $\sqrt{x} - a/\sqrt{x} + a = l$. Тоді виконується таке співвідношення $|l| \le 1$, що і є необхідною умовою стійкості рівняння (30). А ця умова задовольняється, якщо:

$$\Delta t^{a}\left(\frac{(1+d)a_1}{h_1^b} + \frac{(1+d)a_2}{h_2^b}\right) \le \frac{(a+1)}{(2+b)\Gamma(2-a)} \tag{33}$$

Аналогічно рівняння (27) можна звести до різницевого співвідношення (30) та використовуючи метод інтеграла Фур'є отримати умову стійкості. Вона має такий вигляд

$$\Delta t^{a}\left(\frac{l_1}{(cr-er_0r)h_1^b}+\frac{l_2}{(cr-er_0r)h_2^b}\right)\le\frac{(a+1)}{(2+b)\Gamma(2-a)}. \tag{34}$$

Загальною умовою стійкості для рівнянь (27), (28) буде:

$$\Delta t^{a}\left(\frac{C_1}{h_1^b}+\frac{C_2}{h_2^b}\right)\le\frac{(a+1)C_3}{(2+b)\Gamma(2-a)}, \tag{35}$$

де $C_1=l_1,a_1;C_2=l_2,a_2;C_3=(cr-er_0r),(1+d)^{-1}$.

Порівнюючи отримані умови стійкості (33), (34) за такого підходу для різницевих схем системи диференційних рівнянь у частинних похідних (1), (2) із умовами стійкості, [4–7] для двовимірного диференційного рівняння у частинних похідних, можна зробити висновок про відповідність цих умов між собою. Однак відмінністю будуть різні значення біля $\frac{1}{h_1^b},\frac{1}{h_2^b}$. Це, своєю чергою, зумовлено тим, що в правій частині вихідних рівнянь біля дробових похідних порядку b знаходяться різні вирази, що містять в собі коефіцієнти теплопровідності (вологопровідності). Для $a=1,b=2$ отримаємо умови стійкості для класичних рівнянь теплопровідності [14].

Висновок

Синтезовано математичні моделі тепломасоперенесення в анізотропних середовищах з фрактальною структурою з врахуванням нелокальностей за часом і просторовою кореляцією. Отримано скінченно-різницеві апроксимації системи диференціальних рівнянь дробового порядку з граничними умовами третього роду. Розроблено явні та неявні різницеві схеми для реалізації математичної моделі неізотермічного вологоперенесення з похідними дробового порядку. Наведено алгоритмічні аспекти їх реалізації на основі використання методу предиктор-коректор та проаналізовано умови стійкості різницевих алгоритмів.

1. Учайкин В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. – Ульяновск: Издательство "Артишок", 2008. – 512с. 2. Podlubny I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999. – 340 s. 3. Васильев В. В. Дробное исчисление и аппроксимационные методи в моделировании динамических систем. Научное издание / В. В. Васильев, Л. А. Симак. – К., НАН Украины, 2008. – 256 с. 4. Бейбалаев В. Д. Численный метод решения краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка / В. Д. Бейбалаев, М. Р. Шабанова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – № 5 (21). – С. 244–251. 5. Бейбалаев В. Д. Математическая модель теплопереноса в середах с фрактальной структурой / В. Д. Бейбалаев // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21. – № 5. – С. 55–62. 6. Математичне моделювання тепломасообмінних процесів з використанням похідних дробового порядку / Я. І. Соколовський, М. В. Москвітіна, А. В. Нечепуренко, І. Б. Борецька, С. Б. Поберейко // X Міжнародна науково-практична конференція "Математичне та імітаційне моделювання систем" (МОДС 2015), Чернігів, 22–26 червня 2015 р. – С. 45–49. 7. Соколовський Я. І. Числовий метод дослідження теплообміну на підставі похідних дробового порядку / Я. І. Соколовський, М. В. Москвітіна // Технічні вісті. – 2015/1(41), 2(42). – С. 12–15. 8. Соколовський Я. І. Математична модель теплового перенесення та напружено-деформівного стану у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2012. – Вип. 16. – С. 133–141. 9. Соколовський Я. І. Двовимірна математична модель вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах із фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський // Інформаційні технології галузі: Науковий вісник НЛТУ України, 2011. – Вип. 21.2. – С. 341–347. 10. Соколовський Я. І. Фрактальна модель тепло- і *масоперенесення у капілярнопористих матеріалах / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – Львів: НУ “ЛП”, 2011. – № 694. – С. 424–428. 11. Баззаев А. К. Локально-одномерная разностная схема для III-й краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка в двумерной области // Сборник научных трудов Северо-Осетинского отделения Академии наук высшей школы Российской Федерации, 2008, №6. – С. 134−139. 12. Баззаев А. К. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода // Владикавказский математический журнал, 2011. – Т. 13. – Вып. 1. – С. 3−12. 13. Никитенко Н. И. Теория тепломассопереноса / Н. И. Никитенко. – К.: Наук. думка, 1983. – 352 с. 14. Никитенко Н. И. Сопряжение и обратные задачи тепломассопереноса / Н. И. Никитенко. – К.: Наук. думка, 1988. – 240 с.*

УДК 004.67

М. Приймак, Л. Дмитроца, М. Олійник
Тернопільський національний університет ім. Івана Пулюя,
кафедра комп’ютерних наук

АНАЛІТИЧНІ СПОСОБИ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЙ ІЗ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ВИЗНАЧЕННЯ ЇХ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР’Є

Наведено основні здобутки теорії функцій із змінним періодом та виділено задачі їх подальшого вивчення, зокрема задачу “наближення” функцій зі змінним періодом рядами Фур’є та створення відповідних інформаційних технологій їх аналізу. Щоб була можливість перевіряти методи дослідження функції зі змінним періодом, розроблено способи аналітичного задання таких функцій. Записано формули знаходження коефіцієнтів Фур’є та закладено для них основи теорії рядів Фур’є функцій зі змінним періодом.

Ключові слова: змінний період, функція зі змінним періодом, коефіцієнти Фур’є функції зі змінним періодом, ряд Фур’є функції зі змінним періодом, інформаційні технології аналізу функцій зі змінним періодом.

Main achievements of function theory with variable period are described. The tasks aimed at their further study, namely the task of functions with variable period “approximation” Fourier series, and development the appropriate information technologies of their analysis are emphasized. The ways of analytical definition of such functions have been developed to make possible the methods of function with variable period testing. Formulae of finding Fourier coefficients of the function with variable period have been written and the principles of Fourier series theory have been established.

Key words: variable period, function with variable period, Fourier coefficients of the function with variable period, Fourier series of the function with variable period, information technologies of functions with variable period investigation.

Вступ

Один із напрямків інформаційних технологій – це обробка інформації, точніше – інформаційних сигналів. Первинною задачею цього напрямку, очевидно, є вибір чи розроблення моделі сигналу. На основі моделі розробляються методи та алгоритми обробки. Нарешті алгоритми реалізують у вигляді програм для комп’ютерів чи інших обчислювальних засобів.