

Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – Спец. вип. № 5. – С. 284–290. 12. Дмитрах І. М., Панасюк В. В. Вплив корозійних середовищ на локальне руйнування металів біля концентраторів напружень. – Львів: Національна академія наук України; Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка, 1999. – 341 с. 13. Притула Н. М. Задачі оптимізації потокорозподілу в газотранспортних системах // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – 2007. – № 604. – С. 220–227. 14. Притула Н. М. Розрахунок параметрів потокорозподілу в газотранспортній системі (стаціонарний випадок) // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2007. – Вип. 5. – С. 146–157. 15. Притула Н. М., Притула М. Г., П’янило Я. Д. Розрахунок параметрів усталеного руху газу в магістральних газопроводах // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – 2006. – С. 139–143. 16. Про оптимальні режими роботи багато ниткових магістральних газопроводів / Н. Притула, М. Притула, В. Ямнич, А. Дацюк, С. Гладун, О. Химко // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – 2011. – № 719. – С. 256–261.

УДК 004.942

Я. Соколовський, О. Герасимчук
Національний лісотехнічний університет України

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВОГО ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ В АНІЗОТРОПНИХ КАПІЛЯРНО- ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛАХ

© Соколовський Я., Герасимчук О., 2016

Сформульовано тривимірну математичну модель неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з врахуванням анізотропії теплофізичних властивостей. Побудовано алгоритм методу скінченних елементів для реалізації математичної моделі зв’язаного тепломасоперенесення. У рамках об’єктно-орієнтованого підходу розроблено прикладне програмне забезпечення для чисельної реалізації та аналізу математичної моделі. Створений графічний інтерфейс дозволяє автоматизувати процес скінченно-елементного розбиття 3D-області та прогнозувати динаміку просторових полів тепловологоперенесення.

Ключові слова: математична модель, тепломасоперенесення, метод скінченних елементів, прикладне програмне забезпечення, дискретизація області.

We have formulated a three-dimensional mathematical model of non-isothermal moisture transfer in capillary-porous materials taking into account the anisotropy of thermal properties. The algorithm of finite element method for implementing a mathematical model linked isothermal heat and mass transfer is constructed. Within object-oriented approach software for numerical implementation and analysis of mathematical models is developed. Created GUI automates the process of finite-element splitting 3D-area and predicts the dynamics of temperature and humidity fields.

Key words: mathematical model, heat and mass transfer, finite element method, software, discretization.

Актуальність досліджень

З метою розроблення нових та вдосконалення існуючих технологій сушіння існує потреба проведення досліджень нестационарних взаємозв’язаних температурно-вологісних полів у висушуваних капілярно-пористих матеріалах. Сьогодні побудовано одновимірні, двовимірні лінійні та нелінійні математичні моделі тепловологоперенесення з врахуванням анізотропії теплофізичних

властивостей, проте дослідження просторового випадку неізотермічного вологоперенесення залишається актуальним. Така задача є доволі складною для аналітичного розв'язування. Застосування наближених методів не відображає адекватної картини взаємопов'язаних полів тепло- та вологоперенесення. Тому для аналізу процесу сушіння капілярно-пористих матеріалів актуальними є побудова адекватної тривимірної математичної моделі та вибір ефективного числового методу її реалізації. У практичному аспекті постає питання розроблення сучасних об'єктно-орієнтованих програмних засобів, які б відображали сутності реалізації чисельного методу та предметної області задачі.

Аналіз існуючих досліджень

У попередніх дослідженнях побудовані двовимірні лінійні математичні моделі вологоперенесення з врахування анізотропії теплофізичних характеристик матеріалу [1, 2] та двовимірні нелінійні математичні моделі неізотермічного вологоперенесення [3,4]. Ці моделі описують диференціальними рівняннями в частинних похідних з граничними умовами третього роду. Практична реалізація таких математичних моделей є настільки складною, що застосування аналітичних та наближених методів є неможливим, тому доводиться шукати числові методи. Протягом останніх десятиліть стрімко розвиваються та успішно конкурують між собою числові методи розв'язання нестационарних задач теорії поля, зокрема методи скінченних та граничних елементів. Вибір методу скінченних елементів має такі переваги, які є суттєвими для розв'язання реальних задач, а саме: можливість задавати досліджувану область в довільній формі; побудова більш густої сітки в місцях з великим градієнтом досліджуваної величини, та менш густої, де особливої точності не вимагається. Ці методи успішно застосовують для дослідження неоднорідних тіл, зокрема для врахування різного виду анізотропії капілярно-пористих матеріалів, а також для реалізації крайових задач зі змішаними граничними умовами [5, 6]. У результаті детальних математичних досліджень з'ясовано, що для негладких вхідних даних задачі збіжність методу скінченних елементів є більшою порівняно з іншими методами [7]. Наявність ефективних алгоритмів дискретизації досліджуваної області суттєво впливає на обчислювальну складність методу скінченних елементів [8]. Тому актуальною задачею є побудова математичної моделі просторового тепловологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з врахуванням анізотропії теплофізичних властивостей, а також створення об'єктно-орієнтованого програмного комплексу, який би включав реалізацію усіх етапів застосування методу скінченних елементів, зокрема автоматизацію дискретизації тривимірних областей з врахуванням зміни розмірів елементів сітки з метою згущення в підобластях різкої зміни шуканих функцій. Такі програмні пакети повинні мати зручний інтерфейс користувача з широкими можливостями графічної візуалізації скінченно-елементного розбиття та результатів розрахунків, ефективні методи зберігання та імпортування даних.

Математична модель

Тривимірні математичні моделі взаємозв'язаного тепломасоперенесення у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів з врахуванням анізотропії теплофізичних властивостей описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних:

$$r_0 c \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(l_x \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(l_y \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(l_z \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \right) + e r_0 r \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{m_x} \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{m_y} \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{m_z} \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{m_x} s \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{m_y} s \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{m_z} s \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \right) \quad (2)$$

з граничними умовами:

$$I_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x=S} + r_0(1-e)rb_n(U|_{x=S} - U_{p_n}) = a_n(T_c - T|_{x=S}); \quad (3)$$

$$\left(a_{m_n} \frac{\partial U}{\partial n} + a_{m_n} S \frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_{x=S} = b_n(U_{p_n} - U|_{x=S}); \quad \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(a_{m_n} \frac{\partial U}{\partial n} + a_{m_n} S \frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_{x=0} = 0$$

та початковими умовами для нерегулярного режиму видалення вологи:

$$T|_{t=0} = T_0(x, y, z); U|_{t=0} = U_0(x, y, z). \quad (4)$$

Для регулярного режиму, який характеризується відповідними значеннями критеріальних чисел Фур'є (Fo) і Біо (Bi), початкові умови задаються просторовими квадратичними функціями.

Тут введені такі позначення: $T(x, y, z, t)$, $U(x, y, z, t)$ – шукані функції в області

$V = \{(x, y, z) : x \in [0, R_1], y \in [0, R_2], z \in [0, R_3], t \in [0, t^*]\}$, R_1, R_2, R_3 – геометричні розміри (вважаємо, що осі анізотропії збігаються з геометричними осями координат), S – геометрична поверхня області V , t^* – час протікання процесу, c , r_0 – теплоємність і базова густина деревини, I_x, I_y, I_z – коефіцієнти теплопровідності в напрямках анізотропії, e – критерій фазового переходу, t – поточний час, r – питома теплота пароутворення, a_n – коефіцієнт теплообміну, $a_{m_x}, a_{m_y}, a_{m_z}$ – коефіцієнти вологопровідності в напрямках анізотропії, T_c – температура середовища, U_p – рівноважна вологість, b_n – коефіцієнт вологообміну, S – термоградієнтний коефіцієнт, n – вектор нормалі до поверхні.

Алгоритмічні аспекти методу скінченних елементів

Для числової реалізації математичної моделі (1) – (4) використано метод скінченних елементів (МСЕ). Для отримання еквівалентного варіаційного формулювання задачі прийнято допущення про те, що зміну вологовмісту можна подати у вигляді суми величин, зумовлених

градієнтами вологовмісту і температури $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial t}$. Тоді рівняння (2) можна записати:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{m_x} \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{m_y} \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{m_z} \frac{\partial U_1}{\partial z} \right); \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{m_x} S \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{m_y} S \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{m_z} S \frac{\partial T}{\partial z} \right); \quad (6)$$

Згідно з концепцією методу скінченних елементів [2, 3] реалізація математичної моделі з врахуванням вищенаведеного допущення зводиться до розв'язання еквівалентної варіаційної задачі на основі мінімізації таких функціоналів:

$$I = \int_V \frac{1}{2} \left[I_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + I_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + 2cr_0 \frac{\partial T}{\partial t} T - 2er_0 r \frac{\partial U}{\partial t} T \right] dV; \quad (7)$$

$$+ \int_S \left(\frac{a}{2} (T_c - T)^2 - r_0 r (1-e) b (U - U_p) T \right) dS$$

$$J_1 = \int_V \frac{1}{2} \left[a_{m_x} p_0 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)^2 + a_{m_y} p_0 \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)^2 + a_{m_z} p_0 \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} \right)^2 + 2Ur_0 \frac{\partial U_1}{\partial t} \right] dV + \int_S \frac{1}{2} r_0 b (U_1 - U_p)^2 dS; \quad (8)$$

$$J_2 = \int_V \frac{1}{2} \left[a_{m_x} p_0 S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + a_{m_y} p_0 S \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + a_{m_z} p_0 S \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + 2Tr_0 \frac{\partial U_2}{\partial t} \right] dV. \quad (9)$$

Оскільки неперервні величини температури T та вмісту вологи в деревині U апроксимуються на дискретній моделі, то для її побудови досліджувана область V розбивається на скінченне число елементів. Тоді вологовміст $\{\mathbf{U}^{(e)}\}$ та температура $\{\mathbf{T}^{(e)}\}$ визначаються для кожного елемента дискретизації:

$$\{\mathbf{T}^{(e)}\} = [\mathbf{N}^{(e)}]\{\mathbf{T}\}, \quad \{\mathbf{U}^{(e)}\} = [\mathbf{N}^{(e)}]\{\mathbf{U}\}.$$

Введемо позначення $\{\mathbf{g}_T^{(e)}\}^T = \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \right\}$, $\{\mathbf{g}_U^{(e)}\}^T = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \quad \frac{\partial U}{\partial y} \quad \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$, тоді $\{\mathbf{g}_T^{(e)}\}$ та $\{\mathbf{g}_U^{(e)}\}$ можна записати у вигляді:

$$\{\mathbf{g}_U^{(e)}\} = [\mathbf{B}^{(e)}]\{\mathbf{U}\}, \quad \{\mathbf{g}_T^{(e)}\} = [\mathbf{B}^{(e)}]\{\mathbf{T}\},$$

де $\{\mathbf{U}\}$ – вектор вологовмісту, $\{\mathbf{T}\}$ – вектор температури, k – кількість вузлів, $[\mathbf{N}^{(e)}]$ – матриця функцій форми елемента, $[\mathbf{B}^{(e)}]$ – матриця градієнтів елемента (похідні від функцій форми).

Як скінченний елемент обрано тетраедр першого порядку. Функції форми такого елемента мають вигляд [2, 3]:

$$N_i = \frac{1}{6V}(a_i - b_i x - c_i y - d_i z) \quad (10)$$

Коефіцієнти a_i, b_i, c_i, d_i визначають за співвідношеннями МСЕ циклічною перестановкою індексів i, j, k, l :

$$a_i = \det \begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{bmatrix} \quad b_i = -\det \begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{bmatrix} \quad c_i = -\det \begin{bmatrix} y_j & 1 & z_j \\ y_k & 1 & z_k \\ y_l & 1 & z_l \end{bmatrix} \quad d_i = -\det \begin{bmatrix} y_j & z_j & 1 \\ y_k & z_k & 1 \\ y_l & z_l & 1 \end{bmatrix}$$

Теплофізичні характеристики матеріалу подано у вигляді таких матриць для кожного елемента розбиття:

$$[\mathbf{D}^{(e)}] = \begin{bmatrix} a_{m_x} r_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{m_y} r_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{m_z} r_0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{P}^{(e)}] = \begin{bmatrix} a_{m_x} r_0 s & 0 & 0 \\ 0 & a_{m_y} r_0 s & 0 \\ 0 & 0 & a_{m_z} r_0 s \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{Q}^{(e)}] = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

Інтеграли у функціоналах (7) – (9) повинні бути розбиті на інтеграли для окремих елементів розбиття. Враховуючи вклад окремого елемента в I , J_1 та J_2 , функціонали (7)–(9) можна записати у вигляді:

$$I = \sum_{e=1}^n \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \left(\{\mathbf{T}^{(e)}\}^T [\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{Q}^{(e)}] [\mathbf{B}^{(e)}] \{\mathbf{T}^{(e)}\} + 2c r_0 [\mathbf{N}^{(e)}]^T \{\mathbf{T}^{(e)}\} [\mathbf{N}^{(e)}] \frac{\partial \{\mathbf{T}^{(e)}\}}{\partial t} - 2e r_0 r [\mathbf{N}^{(e)}]^T \{\mathbf{T}^{(e)}\} \frac{\partial \{\mathbf{U}^{(e)}\}}{\partial t} \right) dV^{(e)} + \quad (11)$$

$$+ \int_{S^{(e)}} \frac{1}{2} \left(a [\mathbf{N}^{(e)}]^T [\mathbf{N}^{(e)}] \{\mathbf{T}^{(e)}\} - 2a T_c [\mathbf{N}^{(e)}]^T \{\mathbf{T}^{(e)}\} + a T_c^2 - 2r_0 r (1-e) b (U - U_p) [\mathbf{N}^{(e)}]^T \{\mathbf{T}^{(e)}\} \right) dS^{(e)}$$

$$J_1 = \sum_{e=1}^n \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \left(\{\mathbf{U}^{(e)}\}^T [\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{D}^{(e)}] [\mathbf{B}^{(e)}] \{\mathbf{U}^{(e)}\} + 2r_0 [\mathbf{N}^{(e)}]^T \{\mathbf{U}^{(e)}\} [\mathbf{N}^{(e)}] \frac{\partial \{\mathbf{U}_1^{(e)}\}}{\partial t} \right) dV^{(e)} + \quad (12)$$

$$+ \int_{S^{(e)}} \frac{1}{2} \left(r_0 b \left(\{\mathbf{U}^{(e)}\}^T [\mathbf{N}^{(e)}]^T [\mathbf{N}^{(e)}] \{\mathbf{U}^{(e)}\} - 2U_p [\mathbf{N}^{(e)}]^T \{\mathbf{U}^{(e)}\} + U_p^2 \right) \right) dS^{(e)}$$

$$J_2 = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} \left(\{\mathbf{T}^{(e)}\}^T [\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{P}^{(e)}] [\mathbf{B}^{(e)}] \{\mathbf{T}^{(e)}\} + 2r_0 [\mathbf{N}^{(e)}]^T \{\mathbf{T}^{(e)}\} [\mathbf{N}^{(e)}] \frac{\partial \{\mathbf{U}_2^{(e)}\}}{\partial t} \right) dV^{(e)}, \quad (13)$$

де n – кількість елементів дискретизації області V .

Для досягнення мінімуму функціоналів продиференціюємо функціонали (11) – (13) за $\{\mathbf{U}\}$ та $\{\mathbf{T}\}$. Тоді отримаємо:

$$\frac{\partial I}{\partial \{T\}} = \sum_{e=1}^n \int_{V^{(e)}} \left([\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{Q}^{(e)}] [\mathbf{B}^{(e)}] \right) dV^{(e)} \{T^{(e)}\} + \int_{V^{(e)}} \left(c r_0 [\mathbf{N}^{(e)}]^T [\mathbf{N}^{(e)}] \right) dV^{(e)} \frac{\partial \{T^{(e)}\}}{\partial t} - \int_{V^{(e)}} \left(e r_0 r [\mathbf{N}^{(e)}]^T \right) dV^{(e)} \frac{\partial \{U^{(e)}\}}{\partial t} + ; \quad (14)$$

$$+ \int_{S^{(e)}} \left(a [\mathbf{N}^{(e)}]^T [\mathbf{N}^{(e)}] \right) dS^{(e)} \{T^{(e)}\} - \int_{S^{(e)}} \left(a T_c [\mathbf{N}^{(e)}]^T \right) dS^{(e)} - \int_{S^{(e)}} \left(r_0 r (1-e) b (U - U_p) [\mathbf{N}^{(e)}]^T \right) dS^{(e)}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial \{U\}} = \sum_{e=1}^n \int_{V^{(e)}} \left([\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{D}^{(e)}] [\mathbf{B}^{(e)}] \right) dV^{(e)} \{U^{(e)}\} + \int_{V^{(e)}} \left(r_0 [\mathbf{N}^{(e)}]^T [\mathbf{N}^{(e)}] \right) dV^{(e)} \frac{\partial \{U_1^{(e)}\}}{\partial t} + ; \quad (15)$$

$$\int_{S^{(e)}} \left(r_0 b [\mathbf{N}^{(e)}]^T [\mathbf{N}^{(e)}] \right) dS^{(e)} \{U^{(e)}\} - \int_{S^{(e)}} \left(r_0 b U_p [\mathbf{N}^{(e)}]^T \right) dS^{(e)}$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \{U\}} = \sum_{e=1}^n \int_{V^{(e)}} \left([\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{P}^{(e)}] [\mathbf{B}^{(e)}] \right) dV^{(e)} \{T^{(e)}\} + \int_{V^{(e)}} \left(r_0 [\mathbf{N}^{(e)}]^T [\mathbf{N}^{(e)}] \right) dV^{(e)} \frac{\partial \{U_2^{(e)}\}}{\partial t} . \quad (16)$$

Згрупувавши інтеграли, вводимо такі матриці:

$$[\mathbf{R}] = \sum_{e=1}^n \int_{V^{(e)}} \left(c r_0 [\mathbf{N}^{(e)}]^T [\mathbf{N}^{(e)}] \right) dV^{(e)} ;$$

$$[\mathbf{K}_1] = \sum_{e=1}^n \int_{V^{(e)}} \left([\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{Q}^{(e)}] [\mathbf{B}^{(e)}] \right) dV^{(e)} + \int_{S^{(e)}} \left(a [\mathbf{N}^{(e)}]^T [\mathbf{N}^{(e)}] \right) dS^{(e)} ;$$

$$[\mathbf{M}^r] = \sum_{e=1}^n \int_{V^{(e)}} \left(e r_0 r [\mathbf{N}^{(e)}]^T \right) dV^{(e)} \frac{\partial \{U^{(e)}\}}{\partial t} - \int_{S^{(e)}} \left(a T_c [\mathbf{N}^{(e)}]^T \right) dS^{(e)} - \int_{S^{(e)}} \left(r_0 r (1-e) b (U - U_p) [\mathbf{N}^{(e)}]^T \right) dS^{(e)} ;$$

$$[\mathbf{M}] = \sum_{e=1}^n \int_{V^{(e)}} \left(r_0 [\mathbf{N}^{(e)}]^T [\mathbf{N}^{(e)}] \right) dV^{(e)} ;$$

$$[\mathbf{K}] = \sum_{e=1}^n \int_{V^{(e)}} \left([\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{D}^{(e)}] [\mathbf{B}^{(e)}] \right) dV^{(e)} + \int_{S^{(e)}} \left(r_0 b [\mathbf{N}^{(e)}]^T [\mathbf{N}^{(e)}] \right) dS^{(e)} ;$$

$$[\mathbf{M}'] = \int_{V^{(e)}} \left([\mathbf{B}^{(e)}]^T [\mathbf{P}^{(e)}] [\mathbf{B}^{(e)}] \right) dV^{(e)} \{T^{(e)}\} - \int_{S^{(e)}} \left(r_0 b U_p [\mathbf{N}^{(e)}]^T \right) dS^{(e)} .$$

Прирівнявши до нуля співвідношення (14) – (16), отримаємо кінцеву систему матричних рівнянь МСЕ для реалізації математичної моделі (1) – (4):

$$[\mathbf{R}] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [\mathbf{K}_1] \{T\} + [\mathbf{M}^r] = 0, \quad [\mathbf{M}] \frac{\partial \{U\}}{\partial t} + [\mathbf{K}] \{U\} + [\mathbf{M}'] = 0. \quad (17)$$

Знаходження просторових функцій вологовмісту та температури в будь-якій точці часового інтервалу зводиться до пошуку розв'язку задачі Коші для системи диференціальних рівнянь (17) Для розв'язання системи використано алгоритм типу “предиктор-коректор” [9].

Алгоритмічні аспекти дискретизація 3D-області

Для дискретизації тривимірної області множиною тетраедрів реалізований алгоритм, який ґрунтується на початковій триангуляції на площині [10]. Тоді тривимірне розбиття будують нарощуванням шарів триангуляції, що були побудовані на початковому шарі. Формують тетраедри встановленням зв'язків між трикутними гранями. Для дискретизації обрано структуру даних “Тетраедри → трикутники → вузли”. Процес побудови тривимірної сітки розбито на такі кроки:

1. Побудова початкової триангуляція на площині.
2. Нарощення шарів початкової триангуляції та побудова трикутних призм, кожен з яких формують зіставленням трикутних граней двох сусідніх шарів.
3. Розбиття трикутних призм на три тетраедри.

Для триангуляції на площині був обраний ітераційний алгоритм “видаляй та будуй” з перевіркою критерію Делоне [11]. Суть алгоритму можна описати так. Нехай S_1 є множиною з l_1 відмінних вузлових точок на площині. Позицію вузлової точки визначають відповідно до декартової системи координат $\{x(i), y(i), z(i), i = \overline{1, l_1}\}$, де l_1 – кількість вузлів області. Початкова прямокутна область G складається з двох трикутників (T_0), достатньо великих, щоб вмістити усі

вузлові точки з S_1 . Алгоритм “видаляй та будуй” триангуляції Делоне ґрунтується на послідовному вставленні одним за одним усіх вузлів з S_1 в G . Кожен цикл вставки вузлової точки поділяють на три етапи [12]:

- для нової, вставленої вузлової точки в область G , визначають усі трикутники, в описані кола яких потрапила ця точка. Такі трикутники видаляються, і на їх місці утворюється порожнина, яка називається ядром;
- для забезпечення кінцевої арифметичної точності ребра видалених трикутників, які утворюють границю ядра, повинні бути верифіковані з перевіркою видимості і виправлені до того, як вони будуть з’єднані із вставленою вузловою точкою і утворять нові трикутники;
- встановлюються зв’язки суміжності між новоутвореними трикутниками та вже існуючими, які містять ребра з границі ядра.

Припустімо, що T_k є триангуляцією Делоне з k перших точок із множини, тоді

$$T_{k+1} = T_k - C_p + B_p,$$

де C_p – ядро з трикутників, що не задовольняють критерій Делоне після додавання нової точки p ; B_p – трикутники Делоне, що утворились з ребер границь ядра, з’єднаних з новою точкою p , T_k та T_{k+1} – триангуляція Делоне з перших k та $k+1$ точок множини S_1 .

Останній етап алгоритму передбачає формування трикутних елементів B_p з’єднанням ребер границі ядра з вузловою точкою p . Отже, якщо $\{B_i, B_i^2, i=1, m\}$ – граничні ребра ядра, то $\{(V_{N+i}^1 = B_i^1, V_{N+i}^2 = B_i^2, V_{N+i}^3 = p), i=1, m\}$ де N – кількість трикутників в триангуляції, m – кількість ребер границі ядра.

Використовуючи алгоритм триангуляції Делоне у 3D, не обов’язково можна отримати сітку з тетраедрів, елементи якої є коректними для скінченно-елементного аналізу. Для оцінювання якості побудованого тетраедра необхідно отримати значення коефіцієнта g [13], який визначається як відношення об’єму тетраедра до суми площ його граней:

$$g = \frac{12\sqrt{3}(AB \times AC) \times AD}{(AB^2 + BC^2 + CA^2 + AD^2 + BD^2 + CD^2)^{3/2}},$$

де A, B, C, D – вершини тетраедра. Нормуючим являється значення $12\sqrt{3}$, а максимальний об’єм рівностороннього тетраедра дорівнюватиме 1. Тетраедри, для яких $g=0$ вважаються виродженими і підлягають видаленню.

Програмне забезпечення

Для проектування програмного забезпечення сформульовано основні сутності методу скінченних елементів у контексті об’єктно-орієнтованого програмування. Програмне забезпечення для проведення скінченно-елементного розрахунку складається з трьох модулів, які відповідають за дискретизацію області, формування матриць системи та розв’язання системи рівнянь.

Для дискретизації тривимірної області було спроектовано ряд класів мовою C# в середовищі Microsoft Visual Studio, які відображають структуру даних “тетраедри-вузли”. Елементом дискретизації тривимірної сітки є об’єкт класу Tetrahedron. Він містить посилання на чотири вершини тетраедра, які представлені об’єктами класу Node. Кожен вузол характеризується координатами (x,y,z). Також до класу вузлів внесено поле GlobalIndex, яке зберігатиме “глобальний” індекс нумерації вузлів. Цей індекс використовуватиметься для перебору усіх вузлів області дискретизації, не враховуючи значень полів координат. Що стосується перевірки на рівність двох вузлів, то з метою уникнення потрапляння в область дискретизації під іншим індексом вузла з ідентичними координатами передбачений метод Equals(Node p), який проводить перевірку двох вузлів на основі використання стандартного інтерфейсу IComparable <T> платформи .NET Framework [14]. Тетраедр містить посилання на чотири грані – елементи класу Triangle. Об’єкт трикутної грані

складається з трьох вузлів, тобто екземплярів класу Node. Для побудови шарової рівномірно згущеної сітки використано ще один елемент – трикутну призму (клас Prism). На діаграмі класів наведено усі описані класи 3D-дискретизації.

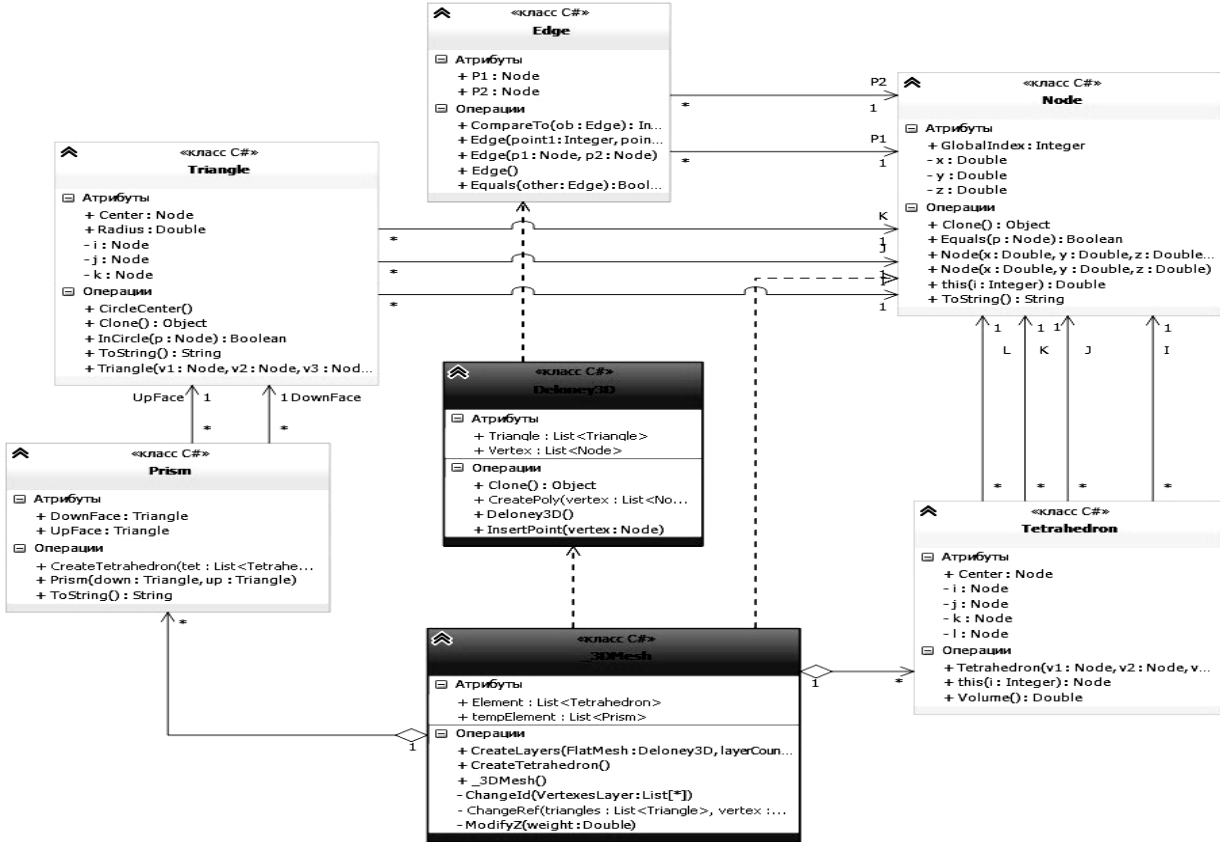


Рис. 1. Діаграма класів об’єктів дискретизації

У модулі, що відповідає за дискретизацію, окрім класів, які представляють структуру сітки, також розроблено класи для реалізації алгоритму триангуляції Делоне на тривимірному просторі, зокрема клас Deloney3D. Його атрибутами є список вузлів, що містять посилання на усі вузли сітки (List<Node> Vertex), та список трикутних граней на початковому шарі дискретизації (List<Triangle> Triangles). Для проведення триангуляції на початковому шарі необхідна присутність полігону, на якому будують сітку. Такий полігон будують за допомогою методу CreatePoly(). Результатом роботи методу буде початковий список вузлів, які розташовані на границі області триангуляції. Усі наступні вузли проходять обов’язкову перевірку на потрапляння в заданий полігон за допомогою методу InsertNode(Node vertex). Об’єкт Deloney3D є основою для організації тетраедралізації.

Після формування початкового шару з вузлами і трикутниками посилання на об’єкт Deloney3D передається в клас _3DMesh. У конструкторі класу задаються параметри, які відображають необхідну кількість шарів та розмір одного шару по координаті z. На основі цих параметрів будуються паралельні шари тривимірної сітки залежно від розміру шару (за координатами Z). Цей процес можливий завдяки реалізації інтерфейсу ICloneable у кожному із класів, що представляють структуру тетраедралізації. Цей інтерфейс дає змогу клонувати трикутні грані і вузли, руйнуючи посилання цих об’єктів на попередній шар, але залишаючи зв’язки між самими об’єктами трикутників та вузлами. У методі CreateLayer() класу _3DMesh формуються усі шари розбиття. Після формування шарів із трикутників будують трикутні призми за допомогою створення об’єктів класу Prism. Для створення об’єктів Tetrahedron на основі призм використовують перевантажений метод CreateTetrahedron().

Для візуального представлення тетраедралізації розроблено клас MeshVisualisation. Цей об'єкт містить поля списку тетраедрів та вузлів дискретизації. Важливим є посилання на об'єкт класу GeometryModel3D. Цей клас використовується для створення геометричної моделі представлення об'єкта сітки у проектах Windows Presentation Foundation. Конструктор класу MeshVisualisation як параметр приймає об'єкт _3DMesh, який містить усі побудовані елементи дискретизації (зокрема вузли і тетраедри). Потім викликається метод CreateGeometry(). Він повертає об'єкт геометрії для відображення у вікні програми.

Розроблений програмний засіб надає можливість отримати локальні та глобальні матриці функцій форми елементів. Для цього спроектовано два класи: LocalShapeFunctionMatrix та GlobalShapeFunctionMatrix. Після формування локальних матриць функцій форми можна отримати глобальну матрицю для всіх елементів та вузлів. Ця функціональність реалізується методом CreateMatrix() класу GlobalShapeFunctionMatrix.

Числовий експеримент

На основі розробленого програмного забезпечення математичних моделей (1) – (4) проведено числові експерименти дослідження динаміки просторового тепловологоперенесення у деревині в процесі сушіння. Для цього використано такі параметри зовнішнього середовища: $T_{cep} = 80^{\circ}C$, відносна вологість $j = 60\%$. Характеристики деревини сосни: $a_{m_x} = 0.97 \text{ см}^2 / \text{с}$, $a_{m_y} = 1.3 \text{ см}^2 / \text{с}$, $a_{m_z} = 1.8 \text{ см}^2 / \text{с}$; коефіцієнти теплопровідності і вологопровідності: $a = 23 \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К})$, $b = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м} / \text{с}$. Інші характеристики та необхідні емпіричні залежності отримані на основі експериментальних даних [15,16]. На рис. 2, 3 наведена динаміка зміни вологовмісту $U^* = (U - U_0) / U_0$ для різних значень часу сушіння у деревині $\rho_0 = 450 \text{ кг} / \text{м}^3$.

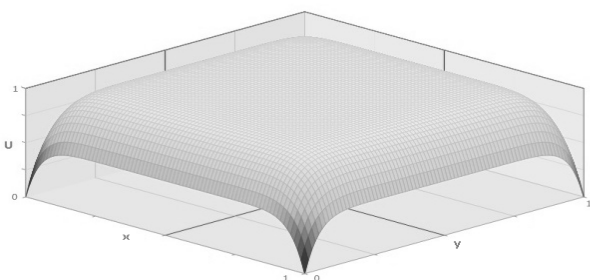


Рис. 2. Зміна вологовмісту для $t = 2$ год
($R_1 = R_2; R_3 = 0$)

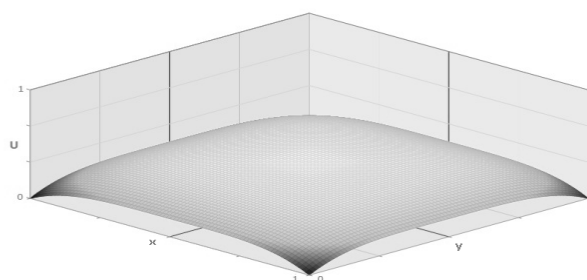


Рис. 3. Зміна вологовмісту для $t = 40$ год
($R_1 = R_2; R_3 = 0$)

Висновок

Наведено просторову математичну модель зв'язаного тепломасоперенесення в анізотропних капілярно-пористих матеріалах у вигляді системи диференціальних рівнянь з початковими та граничними умовами третього роду. Побудовано алгоритм та отримано визначальні співвідношення методу скінченних елементів. Для реалізації математичної моделі неізотермічного вологоперенесення у рамках об'єктно-орієнтованого підходу розроблено програмне забезпечення для дослідження фізичних процесів зв'язаного тепломасоперенесення та зручний графічний інтерфейс для апроксимації скінченно-елементного розбиття 3D-області. На основі чисельних експериментів виявлено закономірності впливу геометричних розмірів, структурної анізотропії, початкових значень температури, вологості та динаміки просторового неізотермічного вологоперенесення у деревині.

1. Соколовський Я. І. Математичне моделювання двовимірного вязкопружного стану деревини у процесі сушіння / Я. І. Соколовський, М. В. Дендюк // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Львів, 2008. – Вип.7. – С. 17–26. 2. Соколовський Я. І. Моделирование деформационно-релаксационных процессов в древесине во время сушки / Я. И. Соколовський, М. В. Дендюк, Б. П. Побережко // Известия ВУЗ России: “Лесной журнал”. – 2007. – № 1. –

С. 75–83. 3. Соколовський Я. І. Моделювання та оптимізація технологічних режимів сушіння деревини / Я. І. Соколовський, А. В. Бакалець // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2008. – Вип.629. – С. 105–111. 4. Соколовський Я. І. Математична модель теплового перенесення та напружено-деформівного стану у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”: Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2012. – Вип.16. – С. 133–141. 5. Соколовський Я. І. Математичне моделювання впливу зовнішнього середовища на напружено-деформівний стан деревини у процесі сушіння / Я. І. Соколовський, І. М. Крошній // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”: Комп’ютерні системи проектування. Теорія інформатики. – 2011. – № 711 – С. 72–82. 6. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. – Львів: Вид-во ЛНУ ім. Франка, 2004. – 222 с. 7. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 318 с. 8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. 9. Марчук Г. И. Методы расщепления. – М.: Наука, 1988. – 263 с. 10. Соколовський Я. І., Сикала О. П. Програмний комплекс автоматизації скінченно-елементної дискретизації двовимірних областей / Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Львів: Центр математичного моделювання інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вип. 19, 2014. – С. 176–188. 11. Скворцов А. В. Эффективнее алгоритмы построения триангуляции Делоне // Скворцов А. В., Костюк Ю. Л. // Геоинформатика. Теория и практика. Вып. 1. // Томск: Изд-во Томского ун-та, – 1998. – С. 22–47. 12. Borouchaki H., Lo SH. Fast Delaunay triangulation in three dimensions/ Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Issues 1–2, 153–167. 13. Liu A, Joe B. On the shape of tetrahedra from bisection // Mathematics of Computation / Issue 207, 1994 – p.141–154. 14. Троелсен Э. Язык программирования C# 5.0 и платформа .NET 4.5. – М.: Вильямс, 2013. – 1311 с. 15. Dedic A. D., Mujumdar A. S., Voronjic D. K. Three Dimensional Model for Heat and Mass Transfer in Convective Wood Drying // Drying Technology, 2004, №3 p. 1–15. 16. Siau I. F. Wood influence of moisture on physical properties, Virginia State University, – USA. – 1995, 236 p.