

М.В. Олексів

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра електронних обчислювальних машин

## ДОСЛІДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ РЕКУРСІЇ НИЗЬКОЧАСТОТНИХ ЦИФРОВИХ НІХ-ФІЛЬТРІВ, ОДЕРЖАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ АПАРАТНО-ОРІЄНТОВАНОГО МЕТОДУ РОЗРАХУНКУ

© Олексів М.В., 2013

Розглянуто дослідження характеристик коефіцієнтів рекурсії низькочастотних НІХ-фільтрів, що одержані за допомогою удосконаленого ітераційного методу розрахунку цифрових фільтрів з нескінченною імпульсною характеристикою.

**Ключові слова:** рекурсивні фільтри, цифрове опрацювання сигналів.

**The article is devoted to the research of the low-pass IIR filter's recursion coefficients characteristics, that are determined using advanced iterative method of digital IIR filter's coefficients determination.**

**Key words:** IIR filters, digital signal processing.

### Вступ

Класичними методами опрацювання сигналів засобами електронної обчислювальної техніки з метою вилучення, виділення або підсилення складових сигналів є використання цифрових фільтрів зі скінченною (СІХ) або нескінченною (НІХ) імпульсною характеристикою. Кожен з класів фільтрів має свої галузі застосування, свої переваги і недоліки. Беззаперечною перевагою НІХ-фільтрів є швидкодія, оскільки для їх реалізації не використовується операція згортки, яка вимагає багатьох обчислювальних затрат. Проте розрахунок НІХ-фільтрів є складнішим, ніж СІХ-фільтрів. При цьому існує мало методів, що орієнтовані на апаратну реалізацію цих фільтрів, а існуючі, орієнтовані на фазу апаратної реалізації, а не на фазу розрахунку коефіцієнтів. Отже, актуальним є розроблення методу розрахунку коефіцієнтів НІХ-фільтрів, який уможливить зменшити кількість задіяної елементної бази для реалізації НІХ-фільтрів порівняно з існуючими методами. При цьому збереже їх точність та швидкодію на високому рівні. Тож у цій роботі розглядається апаратно-орієнтований метод розрахунку цифрових НІХ-фільтрів в частині розрахунку низькочастотних фільтрів і результати його застосування для розрахунку коефіцієнтів низькочастотних фільтрів.

### Аналіз літературних джерел

Класичні методи проектування цифрових фільтрів з нескінченною імпульсною характеристикою можна класифікувати так: ітеративні, в просторовій області, в частотній області, в z-області з використанням S-області, спеціальні методи проектування каскадних фільтрів, з використанням штучних нейронних мереж [1–3, 5–12]. Популярними і простими у використанні під час проектування НІХ-фільтрів є ітеративні методи, підмножиною яких є градієнтні методи. До їх переваг належать:

- простота реалізації;
- можливість реалізації частотної характеристики з довільною кількістю полюсів та нулів;
- відсутність багатьох обмежень та труднощів у розрахунках, що існують в розроблених аналітичних методах обчислення коефіцієнтів НІХ-фільтрів.

Градієнтний підхід також використовують у технологіях штучного інтелекту. Існує кілька алгоритмів навчання штучних нейронних мереж (ШНМ), що мають у своїй основі градієнтний

підхід до обчислення величини зміни ваг нейронів ШНМ [23]. Об'єднання елементів математичного апарата ШНМ і проектування НІХ-фільтрів дає змогу розробляти нові методи проектування НІХ-фільтрів [21].

Недоліками цих методів розрахунку НІХ-фільтрів, зокрема і розглянутого у [22], є їх неефективність з погляду використання розрахованих коефіцієнтів за апаратної реалізації НІХ-фільтрів. Неефективність пояснюється тим, що методи не гарантують, що серед усіх розрахованих коефіцієнтів фільтра є такі, що дорівнюють 0, або кратні степеню числа 2, або більші за мінімально можливе представлення у цільовій розрядній сітці проектованого апаратного НІХ-фільтра.

Наявність нульових коефіцієнтів дає змогу збільшити точність обчислень зменшенням накопичуваної похибки квантування, зменшити кількість апаратних помножувачів і зв'язків між елементами затримки і суматорами, спростити структуру суматорів або зменшити їх кількість, оскільки результат множення числа на 0 дорівнює 0. Наявність коефіцієнтів, що кратні степеню числа 2, уможливує спростити апаратні помножувачі, оскільки в цьому випадку операцію множення можна замінити операцією арифметичного зсуву. Зменшення кількості задіяних елементів призводить до зменшення накопичуваної похибки квантування, збільшення надійності, швидкості функціонування, здешевлення апаратних НІХ-фільтрів, а також збільшення їх максимальної кількості на кристалі ПЛІС і на друкованій платі.

Отже, розраховані коефіцієнти за допомогою відомих методів [1–3, 5–12] є непридатними для ефективною реалізації апаратних НІХ-фільтрів.

### Постановка задачі

Для усунення зазначених недоліків ставиться завдання розробити метод розрахунку цифрових фільтрів з нескінченною імпульсною характеристикою, за якого множина розрахованих методом коефіцієнтів НІХ-фільтра характеризується:

- присутністю коефіцієнтів, які дорівнюють 0;
- усі коефіцієнти більші, ніж мінімально можливе представлення розрядною сіткою регістрів коефіцієнтів цільового апаратного НІХ-фільтра;
- достатньою для коректного функціонування НІХ-фільтра точністю апроксимації амплітудної складової АЧХ.

А також дослідити характеристики коефіцієнтів рекурсії для розрахованих за допомогою удосконаленого методу низькочастотних фільтрів.

### Базовий метод розрахунку коефіцієнтів НІХ-фільтрів

Для розв'язання поставленої задачі як базовий використано ітераційний метод розрахунку коефіцієнтів НІХ-фільтрів, що реалізується за три кроки [22]. На першому кроці обчислюється градієнт похибок у частотній області для кожного зі значень коефіцієнтів біля нулів фільтра  $A_{i-1}$ , де  $i$  – лічильник ітерацій (в початковий момент  $i = 0$ , на першій ітерації  $i = 1$ ,  $i_{\max}$  – максимальна кількість ітерацій методу). Для цього значенню  $A_{i-1}[j]$  (лічильник елементів  $j = 0$  на початку виконання першого кроку,  $j \in [0; NP]$ ,  $NP$  – кількість полюсів фільтра) надається малий приріст  $d$ :

$$A_{i-1}[j] = A_{i-1}[j] + d.$$

За граничних умов  $A_0$  дорівнює:

$$A_0[j] = \begin{cases} 0, & j \in [1; NP] \\ 1, & j = 0 \end{cases}.$$

Для  $A_{i-1}[j]$  обчислюється імпульсна характеристика НІХ-фільтра ( $h$ ) подачею на його вхід зміщеного в часі на  $NP+4$  одиничного імпульсу:

$$h[k] = \begin{cases} \sum_{p=0}^{NP} (A_{i-1}[p] \delta[k - NP - 4] + B_{i-1}[p] h[k - p]), & k \in [NP + 4; N - 1] \\ 0, & k \in [0; NP + 3] \end{cases},$$

де  $\delta[k - NP - 4]$  – зміщений на  $NP+4$  відліків одиничний імпульс;  $V_i$  – значення коефіцієнтів біля полюсів фільтра, розраховані на  $i$ -й ітерації;  $N$  – кількість відліків сигналу. Обчислюється амплітудна складова АЧХ НІХ-фільтра ( $H$ ):

$$H[k] = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-i2\pi kn/N} \right|.$$

Обчислюється середньоквадратична похибка (ERA) між розрахованою ( $H$ ) і очікуваною амплітудною складовою АЧХ НІХ фільтра ( $O$ ):

$$ERA = \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{N/2} (H[k] - O[k])^2}}{(N/2 + 1)}.$$

Обчислюється градієнт похибки:

$$SA[j] = (ERA - ER_{i-1}) / d,$$

де  $ER_i$  – значення середньоквадратичної похибки на  $i$ -й ітерації,  $ER_0 = 0$ . Після чого відновлюється початкове значення  $A_{i-1}[j]$ :

$$A_{i-1}[j] = A_{i-1}[j] - d,$$

змінюється лічильник елементів  $j = j + 1$  і повторюється перший крок, поки  $j \leq NP$ .

На другому кроці обчислюється градієнт похибок у частотній області для кожного зі значень коефіцієнтів біля полюсів фільтра  $V_{i-1}$ . Для цього значенню  $V_{i-1}[j]$  ( $j = 1$  на початку виконання другого кроку,  $j \in [1; NP]$ ) надається малий приріст  $d$ :

$$B_{i-1}[j] = B_{i-1}[j] + d.$$

За граничних умов  $V_0$  дорівнює:

$$B_0[j] = 0, j \in [0; NP];$$

Обчислюється імпульсна характеристика НІХ-фільтра ( $h$ ) для зміненого значення  $V_{i-1}[j]$  подачею на його вхід зміщеного в часі на  $NP+4$  одиничного імпульсу:

$$h[k] = \begin{cases} \sum_{p=0}^{NP} (A_{i-1}[p] \delta[k - NP - 4] + B_{i-1}[p] h[k - p]), & k \in [NP + 4; N - 1] \\ 0, & k \in [0; NP + 3] \end{cases}.$$

Обчислюється амплітудна складова АЧХ НІХ-фільтра:

$$H[k] = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-i2\pi kn/N} \right|.$$

Обчислюється середньоквадратична похибка (ERB) між розрахованою ( $H$ ) і очікуваною амплітудною складовою АЧХ НІХ-фільтра ( $O$ ):

$$ERB = \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{N/2} (H[k] - O[k])^2}}{(N/2 + 1)}.$$

Обчислюється градієнт похибки:

$$SB[j] = (ERB - ER_{i-1}) / d.$$

Після чого відновлюється початкове значення  $V_{i-1}[j]$ :

$$B_{i-1}[j] = B_{i-1}[j] - d.$$

Змінюється лічильник елементів  $j = j + 1$  і повторюється другий крок, поки  $j \leq NP$ .

На третьому кроці здійснюється модифікація значень  $A_i$  і  $V_i$ :

$$A_i[j] = A_{i-1}[j] - SA[j] MU_{i-1}, j \in [0; NP];$$

$$B_i[j] = B_{i-1}[j] - SB[j] MU_{i-1}, j \in [0; NP],$$

де  $MU_i$  – змінний розмір кроку ітерації. Обчислюється імпульсна характеристика НІХ фільтра ( $h$ ) для  $A_i$  і  $B_i$  подачею на його вхід зміщеного в часі на  $NP+4$  одиничного імпульсу:

$$h[k] = \begin{cases} \sum_{p=0}^{NP} (A_i[p]\delta[k - NP - 4] + B_i[p]h[k - p]), & k \in [NP + 4; N - 1] \\ 0, & k \in [0; NP + 3] \end{cases}$$

Обчислюється амплітудна складова АЧХ НІХ-фільтра:

$$H[k] = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-i2\pi kn/N} \right|$$

Обчислюється середньоквадратична похибка на  $i$ -й ітерації ( $ER_i$ ) між розрахованою ( $H$ ) і очікуваною амплітудною складовою АЧХ НІХ фільтра ( $O$ ):

$$ER_i = \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{N/2} (H[k] - O[k])^2}}{(N/2 + 1)}$$

Обчислюється зміна кроку ітерації:

$$MU_i = \begin{cases} MU_{i-1} / 2, & ER_i > ER_{i-1} \\ MU_{i-1}, & ER_i \leq ER_{i-1} \end{cases}$$

Збільшується лічильник ітерацій:  $i = i + 1$ . Якщо  $i \neq i_{\max}$ , то здійснюється перехід до першого кроку, інакше – завершується обрахунок коефіцієнтів.

### Модифікований метод розрахунку коефіцієнтів НІХ-фільтрів

Для усунення недоліків базового методу і розв'язання поставленої задачі пропонується здійснити модифікацію третього кроку базового алгоритму. При цьому під час проектування низькочастотних фільтрів модифікація коефіцієнтів здійснюється за виразами:

$$A_i[j] = \begin{cases} A_{i-1}[j] - SA[j]MU_{i-1}, & A_{i-1}[j] - SA[j]MU_{i-1} \geq mval, j \in [0; NP], mval > 0 \\ 0, & A_{i-1}[j] - SA[j]MU_{i-1} < mval, j \in [0; NP], mval > 0 \end{cases},$$

$$B_i[j] = \begin{cases} B_{i-1}[j] - SB[j]MU_{i-1}, & B_{i-1}[j] - SB[j]MU_{i-1} \geq mval, j \in [0; NP], mval > 0 \\ 0, & B_{i-1}[j] - SB[j]MU_{i-1} < mval, j \in [0; NP], mval > 0 \end{cases},$$

де  $mval$  – мінімальне додатне значення, яке може бути представлене розрядною сіткою регістрів коефіцієнтів цільового НІХ-фільтра. У такий спосіб гарантується, що коефіцієнти  $A$  і  $B$  є додатними числами. Це дає змогу здійснювати обчислення у беззнаковій арифметиці. При цьому апаратна складність вузлів апаратного НІХ-фільтра зменшується порівняно з апаратною складністю вузлів, що оперують знаковими числами, та відпадає необхідність у використанні вузлів перетворення чисел у доповнюючий код. У випадку, коли деяка кількість коефіцієнтів дорівнюватиме нулю, відбудеться зменшення кількості необхідних для реалізації НІХ-фільтра апаратних помножувачів, суматорів і зв'язків між апаратними компонентами фільтра. А це, своєю чергою, призведе до зменшення накопичуваної похибки квантування під час обчислень та потенційно може призвести до пришвидшення обчислень.

Оскільки метод ґрунтується на алгоритмі навчання ШНМ-методом найшвидшого спуску зі змінним параметром навчання, то умови їх сходимості однакові. Такою умовою є мале значення параметра  $MU$ . При цьому за малих значень  $MU$ -метод працює повільно, а траєкторія зміни значень є гладкою. За великих значень  $MU$ -метод працює швидше, а траєкторія зміни значень стає зигзагоподібною. За деякого критичного значення  $MU$ -метод стає нестабільним (розходить) [23].

### Реалізація модифікованого методу

Для реалізації модифікованого методу необхідно задати початкові значення константи  $d$  у межах  $0 < d < 1$  і змінного розміру кроку ітерації  $MU_0$  в діапазоні  $0 < MU_0 < 1$  так, щоб під час виконання спосіб сходився, наприклад,  $d = 0.00001$ ,  $MU_0 = 0.01$ . Задати кількість полюсів проектованого фільтра  $NP$  ( $NP \in [2; +\infty)$ ); кількість точок ДПФ ( $N$ ); кількість ітерацій  $i_{\max}$ . Встановити початкове значення лічильника ітерацій  $i = 1$ . Задати очікувану амплітудну складову АЧХ НІХ-фільтра

(O) на проміжку нормованих частот  $[0; 0.5]$ , що задаються значеннями на проміжку відліків  $[0; N/2]$ . Цей проміжок вибраний, зважаючи на те, що отримана за допомогою перетворення Фур'є амплітудна складова АЧХ є симетричною. Ініціалізувати А і В згідно з граничними умовами для низькочастотного фільтра. Задати мінімальне значення  $mval$ , яке дорівнює мінімальному числу, яке можна подати розрядною сіткою регістрів коефіцієнтів цільового НІХ-фільтра.  $mval$  розраховується відповідно до технічного завдання на проектування апаратного НІХ-фільтра. Розпочати виконання модифікованого методу. Після завершення виконання методу А і В міститимуть розраховані коефіцієнти нулів і полюсів НІХ-фільтра. Використовуючи ці коефіцієнти, реалізують за математичною моделлю (форма 1 або 2) апаратний чи програмний НІХ-фільтр.

#### Дослідження модифікованого методу

Дослідження модифікованого методу проводились для низькочастотних НІХ-фільтрів Баттерворта з кількістю полюсів від 2 до 10 з кроком 2, оскільки фільтри з більшою кількістю полюсів часто є нестабільними [21] та нормованими частотами зрізу 0.05 та від 0.1 до 0.5 з кроком 0.1. Для цих фільтрів досліджувалася середньоквадратична похибка  $ER_{i_{max}}$  (СКП) між бажаною (ідеальною) і одержаними АЧХ-фільтрами, кількість нульових і наявність додатних коефіцієнтів. Дослідження проводились за таких умов: використовувався універсальний комп'ютер з тактовою частотою 3,3 ГГц; кількість ітерацій методу –  $i = 5\ 000$ ; очікувана амплітудна складова АЧХ (O) задана 2049 точками, що відповідають нормованим частотам:  $[0; 0.5]$ ,  $d = 0.00001$ ,  $MU_0 = 0.01$ ,  $mval = 0.0000000023$ , що відповідає  $2^{-32}$  (таблиця).

#### Результати досліджень, розраховані модифікованим методом низькочастотних фільтрів

Нормована частота зрізу	Кількість полюсів (одн.)	СКП (%)	Кількість нульових коефіцієнтів (одн.)	Усі коефіцієнти додатні
0.05	2	2.79	0	Так
0.1	2	1.19	0	Так
0.2	2	0.5	0	Так
0.3	2	0.42	0	Так
0.4	2	0.5	0	Так
0.5	2	0.89	2	Так
0.05	4	1.31	0	Так
0.1	4	0.42	0	Так
0.2	4	0.14	0	Так
0.3	4	0.29	1	Так
0.4	4	0.44	2	Так
0.5	4	0.58	4	Так
0.05	6	0.71	0	Так
0.1	6	0.13	0	Так
0.2	6	0.09	0	Так
0.3	6	0.2	2	Так
0.4	6	0.38	4	Так
0.5	6	0.53	6	Так
0.05	8	0.39	0	Так
0.1	8	0.05	0	Так
0.2	8	0.07	8	Так
0.3	8	0.18	4	Так
0.4	8	0.36	6	Так
0.5	8	0.52	8	Так
0.05	10	0.22	0	Так
0.1	10	0.02	3	Так
0.2	10	0.07	3	Так
0.3	10	0.17	6	Так
0.4	10	0.36	8	Так
0.5	10	0.51	10	Так

Аналізуючи отримані результати досліджень з таблиці, бачимо, що низькочастотні фільтри розраховані за модифікованим методом. Гарантується, що усі коефіцієнти є додатними і більшими за мінімально можливе представлення розрядною сіткою цільового апаратного НІХ-фільтра. Це дає можливість відмовитися від використання знакової арифметики і зменшити апаратні затрати на зберігання чисел і здійснення операцій з ними у доповнювальному коді. Наявність коефіцієнтів, що дорівнюють нулю, дає змогу відмовитися від здійснення будь-яких операцій над множенням і коефіцієнтом. Це значно зменшує апаратні затрати. Ціною за зменшення апаратних затрат є незначне спотворення отриманої амплітудної складової АЧХ-фільтра.

### Висновок

У результаті проведеного дослідження вказано, що удосконалений метод розрахунку низькочастотних НІХ-фільтрів є апаратно-орієнтованим і забезпечує зменшення апаратної складності апаратних низькочастотних НІХ-фільтрів ціною невеликого збільшення похибки між очікуваною і отриманою амплітудною складовою АЧХ-фільтра.

20. Кестер У. Проектирование систем цифровой и смешанной обработки сигналов. – М.: Техносфера, 2010. – 328 с. 21. Смит С. Цифровая обработка сигналов: практ. руководство для инженеров и научных работников (+CD) / Стивен Смит; пер. с англ. А. Ю. Линовича, С. В. Витязева, И. С. Гусинского. – М.: Додэка-XXI, 2008. – 720 с. – (Серия “Схемотехника”). 22. Смит С. Цифровая обработка сигналов: практ. руководство для инженеров и научных работников (+CD) / Стивен Смит; пер. с англ. А. Ю. Линовича, С. В. Витязева, И. С. Гусинского. – М.: Додэка-XXI, 2008. – С.528–533. – (Серия “Схемотехника”). 23. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. – 2-е изд.; пер. с англ. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2006. – 1104 с. 24. Chen Yen-Liang, Chen Chun-Yu, Jheng Kai-Yuan, Wu An-Yeu. A universal look-ahead algorithm for pipelining IIR filters. *IEEE International Symposium on VLSI Design, Automation and Test*, 2008. – P. 259–262. 25. Dudgeon D. E., Russell M. M. *Multidimensional Digital Signal Processing*. Prentice Hall, 1990. – 448 p. 26. Edmonson W. W., Srinivasan K. A Simplified Global Least Mean Square Algorithm for Adaptive IIR Filtering. // *Proceedings of 1996 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP-96)*. – Vol. 3. – P. 1822–1825. 27. Jackson L.B. Frequency-domain Steiglitz-McBride method for least-squares IIR filter design, ARMA modeling, and periodogram smoothing. // *Signal Processing Letters, IEEE*. – Vol. 15. – P. 49–52. 28. Konopacki J., Moscinska K. A Simplified Method for IIR Filter Design with Quasi-Equiripple Passband and Least-Squares Stopband // *Proceedings of the 14th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems*, 2007. – P. 302–305. 29. Kwan, H. K., Tao, L. Adaptive IIR Digital Filtering Using an Analog Neural Network. // *Proceedings of the 1999 IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, Shaw Conference Center, Edmonton, Alberta, Canada, May 9–12 1999*. – Vol.2. – P. 827–830 30. Ran Yang, Shiyang Qiu, Guoli Wang. Periodic Look Ahead Filter Design for Pipelining 2-D IIR Digital Filters // *2007 IEEE International Conference on Control and Automation, Guangzhou, CHINA*. – May 30 to June 1, 2007. – P. 308–312. 31. Vargas R.A., Burrus C.S. Iterative Design of lp FIR and IIR Digital Filters // *IEEE 13th Digital Signal Processing Workshop and 5th IEEE Signal Processing Education Workshop*, 2009. – P. 468–473.