

## МЕТРОЛОГІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ АЛГОРИТМІЧНИХ СУМО-РІЗНИЦЕВИХ МЕТОДІВ ВИМІРЮВАННЯ ФАЗОВИХ ЗСУВІВ

© Бучма І.М., Винничек Ю.Г., 2013

Дано порівняльну характеристику алгоритмічних методів вимірювання малих зсувів фаз між гармонічними інфранизькочастотними сигналами. Показано, що метод обчислення відношення амплітуд різницевого та сумарного сигналів є найуніверсальнішим і йому потрібно надати перевагу під час застосування.

**Ключові слова:** вимірювання фази, похибки, інфранизькі частоти, амплітудні похибки вимірювання фази.

The comparative characteristics of algorithmic methods for measuring small phase shift between the signals of low frequency harmonic are given. It is shown that the method is based on calculating the ratio of the amplitudes difference and the summary signals is the most universal and it should be given preference when applying.

**Key words:** Measuring phase, low frequency, harmonic signals, sumo-difference methods, errors, inequality of the amplitudes of signals.

### Вступ

Вимірювання фазових зсувів між гармонічними сигналами в інфранизькочастотному діапазоні дає змогу виконувати технічні завдання в багатьох галузях [1, 2], зокрема і завдання діагностування вихрострумивим методом корозійного стану сталевих листових конструкцій за одностороннього доступу до них [3, 4]. При цьому для вимірюванні фазового зсуву використовують алгоритмічні методи бінарної дискретизації [1, 2] з використанням цифрових методів обробки сигналів. Метод бінарної дискретизації відомий також під назвою періодичного порівняння з частотою, набагато більшою, ніж частота порівнюваних сигналів [3, 4]. Прийемо тут назву методу “бінарна дискретизація”.

### Огляд літературних джерел

Методи бінарної дискретизації мають ту перевагу, що уможливають в інфранизькочастотному діапазоні зменшити вплив корельованих фліккер-шумів на кілька порядків [5–7].

Однак методи бінарної дискретизації сигналів під час вимірювання фазового зсуву між ними вимагають, щоб амплітуди цих сигналів були рівними. А це, фактично, виконати важко. Така сама вимога ставиться і в алгоритмічних сумо-різницевих методах вимірювання фазового зсуву без бінарної дискретизації [1].

### Постановка завдання

У роботі порівняємо між собою алгоритмічні сумо-різницеві методи за чутливістю і точністю, визначимо, які з них придатніші для вимірювання малих зсувів фаз. Ці результати можна буде використати для аналізу методів бінарної дискретизації.

Розглянемо два гармонічні сигнали з рівними амплітудами [1] (рисунок):

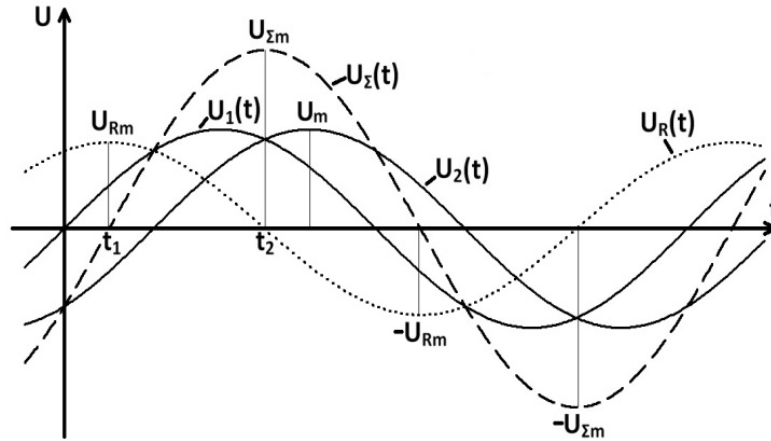
$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_m \sin \omega t, \\ u_2(t) &= U_m \sin(\omega t + \varphi_x), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $U_m$  і  $\varphi_x$  – відповідно амплітуда і фазовий зсув між сигналами.

Запишемо вирази для суми  $u_{\Sigma}(t)$  та різниці  $u_R(t)$  сигналів (1):

$$u_{\Sigma}(t) = u_2(t) + u_1(t) = U_m \sin \omega t + U_m \sin(\omega t + \varphi_x) = 2U_m \cos\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_x}{2}\right); \quad (2)$$

$$u_R(t) = u_2(t) - u_1(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_x) - U_m \sin \omega t = 2U_m \sin \frac{\varphi_x}{2} \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_x}{2}\right). \quad (3)$$



Гармонічні сигнали з рівними амплітудами, їх сума та різниця

Визначимо момент  $t_1$  переходу сумарного сигналу (2) через нуль, прирівнявши вираз (2) до нуля. Звідси отримаємо, що  $(\omega t_1 + \frac{\varphi_x}{2}) = 0$ . Або

$$t_1 = -\frac{\varphi_x}{2\omega}.$$

Підставимо  $t_1$  у вираз (3) і знайдемо, що різницевий сигнал у цей момент дорівнюватиме амплітудному значенню, тобто

$$u_R(t_1) = U_{Rm} = 2U_m \sin \frac{\varphi_x}{2}. \quad (4)$$

Звідси отримаємо, що

$$\varphi_x = 2 \arcsin \frac{U_{Rm}}{2U_m} \quad (5)$$

Отже, вимірявши амплітуду порівнюваних сигналів  $U_m$  та амплітуду їх різниці, можна за виразом (5) обчислити зсув фаз між порівнюваними сигналами.

Тепер визначимо момент  $t_2$  переходу різницевого сигналу через нуль, прирівнявши вираз (3) до нуля. Звідси отримаємо, що  $(\omega t_2 + \frac{\varphi_x}{2}) = \frac{\pi}{2}$ . Або

$$t_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_x}{2}\right) / \omega.$$

Підставимо  $t_2$  у вираз (2), знайдемо, що сумарний сигнал у цей момент дорівнюватиме амплітудному значенню, тобто

$$u_{\Sigma}(t) = U_{\Sigma m} = 2U_m \cos \frac{\varphi_x}{2}.$$

Звідси отримаємо, що

$$\varphi_x = 2 \arccos \frac{U_{\Sigma}}{2U_m}. \quad (6)$$

Отже, вимірявши амплітуду порівнюваних сигналів  $U_m$  та амплітуду їх суми  $U_{\Sigma m}$ , можна за виразом (6) обчислити зсув фаз між порівнюваними сигналами.

А взявши відношення амплітуд різницевого та сумарного сигналів, отримаємо

$$\frac{U_{Rm}}{U_{\Sigma m}} = \frac{2U_m \sin \frac{\varphi_x}{2}}{2U_m \cos \frac{\varphi_x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_x}{2}$$

або

$$\frac{U_{\Sigma m}}{U_{Rm}} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi_x}{2}.$$

Звідси знайдемо ще два вирази для підрахунку фазового зсуву між двома сигналами [1]:

$$\varphi_x = 2 \operatorname{arctg} \frac{U_{Rm}}{U_{\Sigma m}}, \quad \varphi_x = 2 \operatorname{arcctg} \frac{U_{\Sigma m}}{U_{Rm}}. \quad (7)$$

### Результати досліджень

Тепер порівняємо між собою методи, що відповідають виразам (5–7), за чутливістю і точністю під час їх застосування у вимірюванні малих значень фазових зсувів.

Для малих значень фазових зсувів (не більших, ніж  $10^\circ$ ) вираз (5) можна спростити, тобто

$$\varphi_x = 2 \operatorname{arcsin} \frac{U_{Rm}}{2U_m} \approx \frac{U_{Rm}}{U_m}. \quad (8)$$

Отже, фазовий зсув можна обчислити за допомогою вимірювання амплітуди порівнюваних сигналів та амплітуди різниці цих сигналів.

Визначимо чутливість методу до фазового зсуву:

$$S_1 = \frac{d \frac{U_{Rm}}{U_m}}{d \varphi_x}. \quad (9)$$

А тепер запишемо вираз для абсолютної похибки вимірювання цим методом:

$$\Delta \varphi_x = \frac{U_{Rm} + \Delta U_{Rm}}{U_m + \Delta U_m} - \frac{U_{Rm}}{U_m},$$

де  $\Delta U_{Rm}$  та  $\Delta U_m$  – відповідно абсолютні похибки вимірювання амплітуди різниці сигналів  $U_{Rm}$  та амплітуди порівнюваних сигналів  $U_m$ .

Відносну похибку можна знайти за таким виразом:

$$\delta \varphi_x = \frac{\Delta \varphi_x}{\varphi_x} = \frac{\frac{U_{Rm} (1 + \frac{\Delta U_{Rm}}{U_{Rm}})}{U_m (1 + \frac{\Delta U_m}{U_m})} - \frac{U_{Rm}}{U_m}}{\frac{U_{Rm}}{U_m}} = \frac{1 + \frac{\Delta U_{Rm}}{U_{Rm}}}{1 + \frac{\Delta U_m}{U_m}} - 1 = \delta U_{Rm} - \delta U_m,$$

де  $\delta U_{Rm}$  та  $\delta U_m$  – відповідно відносні похибки вимірювання амплітуд.

Оскільки знаки похибок  $\delta U_{Rm}$  та  $\delta U_m$  не відомі, то максимальну відносну похибку подамо таким записом:

$$\delta \varphi_{x \max} = |\delta U_{Rm}| + |\delta U_m|.$$

За наявності адитивної складової похибки  $\delta U_{Rm} \gg \delta U_m$ , тобто

$$\varphi_{x \max} \approx \delta U_{Rm}. \quad (10)$$

Аналізуючи другий метод, використаємо розклад у ряд функції  $\arccos x$  за  $|x| < 1$  та обмежимося двома членами ряду, тобто подамо вираз (6) у такий спосіб:

$$\varphi_x = 2 \arccos \frac{U_{\Sigma m}}{2U_m} \approx 2 \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{U_{\Sigma m}}{2U_m} \right] = \pi - \frac{U_{\Sigma m}}{U_m}. \quad (11)$$

Знайдемо чутливість цього методу до фазового зсуву. Для цього продиференціюємо вираз (11):

$$d\varphi_x = -d \left( \frac{U_{\Sigma m}}{U_m} \right). \quad (12)$$

Враховавши, що  $U_{\Sigma m}$  набагато більше ніж  $U_{Rm}$ , подамо  $U_{\Sigma m}$  для конкретного виміру виразом:

$$U_{\Sigma m} = NU_{Rm}, \quad (13)$$

де  $N$  – число, що визначає, у скільки разів амплітуда  $U_{\Sigma m}$  більша, ніж  $U_{Rm}$ .

З врахуванням цього співвідношення, запишемо вираз (12) у такому вигляді:

$$d\varphi_x = -Nd \frac{U_{Rm}}{U_m}.$$

Звідси отримаємо вираз для чутливості другого методу:

$$\frac{-Nd \frac{U_{Rm}}{U_m}}{d\varphi_x} = -NS_2. \quad (14)$$

Отже, чутливість другого методу є від'ємною і в  $N$  разів меншою, ніж першого методу.

Оцінімо похибку вимірювання фазового зсуву другим методом. Для цього запишемо такий вираз:

$$\varphi_x + \Delta\varphi_x \approx 2 \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{U_{\Sigma m} + \Delta U_{\Sigma m}}{2(U_m + \Delta U_m)} \right].$$

Тоді абсолютна похибка буде

$$\Delta\varphi_x = 2 \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{U_{\Sigma m} + \Delta U_{\Sigma m}}{2(U_m + \Delta U_m)} \right] - 2 \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{U_{\Sigma m}}{2U_m} \right].$$

Звідси за аналогією, як і для першого методу, знайдемо відносну похибку:

$$\delta\varphi_x \approx -\delta U_{\Sigma m} + \delta U_m.$$

Максимальна похибка дорівнюватиме сумі абсолютних значень складових похибки вимірювання:

$$\delta\varphi_{x\max} \approx |\delta U_{\Sigma m}| + |\delta U_m|. \quad (15)$$

Порівнюючи між собою вирази (10) і (15) та враховуючи (13), можна сказати, що за наявності адитивної складової похибки, відносна похибка  $\delta U_{Rm}$  буде в  $N$  разів більшою, ніж похибка  $\delta U_{\Sigma m}$ , та приблизно в  $\frac{N}{2}$  рази більшою від похибки  $\delta U_m$ , оскільки  $U_{Rm} \ll U_{\Sigma m}$  чи  $U_m$ .

Для третього методу за малих кутів фазового зсуву  $\varphi_x$  його можна подати таким виразом:

$$\varphi_x = 2 \arctg \frac{U_{Rm}}{U_{\Sigma m}} \approx 2 \frac{U_{Rm}}{U_{\Sigma m}}. \quad (16)$$

Враховуючи, що  $U_{\Sigma m} \approx 2U_m$ , вираз (16) подамо так:

$$\varphi_x \approx \frac{U_{Rm}}{U_m}. \quad (17)$$

Чутливість третього методу до фазового зсуву буде

$$S_3 = \frac{d \frac{U_{Rm}}{U_m}}{d\varphi_x} = S_1. \quad (18)$$

Порівнюючи між собою вирази (9) і (18), бачимо, що за чутливістю перший та третій методи однакові.

І відповідно максимальна відносна похибка з врахуванням міркувань, викладених вище, становитиме

$$\delta\varphi_x \approx \delta U_{Rm}. \quad (19)$$

Аналізуючи четвертий метод, не можемо використати розклад у ряд функції  $\arctg x$  для  $|x| > 1$ , оскільки такого розкладу немає. Але враховуючи, що

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi_x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_x}{2}} = \frac{U_{\Sigma m}}{U_{Rm}},$$

отримаємо

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{\frac{U_{\Sigma m}}{U_{Rm}}} = \frac{\varphi_x}{2}.$$

Тобто

$$\varphi_x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\frac{U_{\Sigma m}}{U_{Rm}}}.$$

Тепер скориставшись розкладом функції  $\operatorname{arctg} x$  для  $x < 1$  в ряд і обмежившись двома членами ряду, отримаємо

$$\varphi_x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\frac{U_{\Sigma m}}{U_{Rm}}} = 2 \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{U_{Rm}}{U_{\Sigma m}} \right] \approx \pi - \frac{U_{Rm}}{U_m}.$$

Після диференціювання отримаємо

$$d\varphi_x = -d \frac{U_{Rm}}{U_m}.$$

Звідси чутливість буде

$$S_4 = -\frac{d \frac{U_{Rm}}{U_m}}{d\varphi_x} = -S_1.$$

І відповідно максимальну відносну похибку вимірювання за четвертим методом подамо таким виразом:

$$\delta\varphi_x \approx |\delta U_{Rm}| + |\delta U_{\Sigma m}| \approx \delta U_{Rm}. \quad (20)$$

Що стосується різницевого сигналу  $u_R(t)$  з малою амплітудою, який описується виразом (3), то його можна підсилити, наприклад, у  $K$  разів. Для підсиленого сигналу можна на підставі виразу (3) записати

$$u_R'(t) = K 2U_m \sin \frac{\varphi_x}{2} \cos(\omega t + \frac{\varphi_x}{2}).$$

Тоді згідно з виразом (4):

$$u_R'(t_1) = U_{Rm}' = 2KU_m \sin \frac{\varphi_x}{2}.$$

Звідси

$$\varphi_x = 2 \arcsin \frac{U'_{Rm}}{2KU_m}.$$

Для малих  $\varphi_x$  також справедливим буде такий вираз:

$$\varphi_x \approx \frac{U'_{Rm}}{KU_m}. \quad (21)$$

У цьому випадку чутливість методу визначиться так:

$$S = \frac{d \frac{U'_{Rm}}{U_m}}{d\varphi_x} = KS_1.$$

Тобто чутливість для першого методу для дуже малих кутів можна збільшити у  $K$  разів. Також можна збільшити в аналогічний спосіб чутливість третього методу.

Якщо ж вираз (21) застосувати не можна, то потрібно використати розклад  $\arcsin x$  в ряд для  $x < 1$  за визначення  $\varphi_x$ .

### Висновки

Отже, перший, третій і четвертий методи як за точністю, так і за абсолютними значеннями чутливості, є рівнозначними. Єдина відмінність полягає у тому, що чутливість четвертого методу є від'ємною. Другий метод характеризується в  $N$  разів більшою від'ємною чутливістю, і за точністю має перевагу. Проте чутливість першого і третього методів можна збільшити у  $K$  разів, підсиливши у стільки ж разів різницевий сигнал. За підсилення різницевого сигналу і використання третього методу для обчислення  $\varphi_x$  можна, залежно від ситуації, використати розклад у ряд функції  $\arctg x$  для  $x < 1$  або для  $x > 1$ . Тому третій метод можна вважати універсальнішим та рекомендувати його для використання.

1. Кондратов В.Т. Алгоритмические методы измерения мгновенных значений фазового сдвига инфранизкочастотных сигналов: Препринт 04-47. – Киев, 1984. – 40 с. 2. Кондратов В.Т., Скрипник Ю.А. Построение инфранизкочастотных фазометров // Проблемы технической электродинамики. – 1977. – Вып. 61. – С.55–59. 3. Бучма І.М., Репетило Т.М. Підвищення точності вимірювання малих різниць амплітуд та зсувів фаз наднизькочастотних сигналів у системах вихрострумової діагностики // Методи та прилади контролю якості. – 2010. – №24. – С.23–28. 4. Igor Buchta. Rozwój badań nieniszczących konstrukcji ze stali arkuszowej metodą wiroprowadową. Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna „GRE-2008”, Orle Gniazdo Szczyrk 19–21 maja 2008. – Opole: Politechnika Opolska. – S.59–62. 5. Бучма І., Вжуцак М. Моделі математичного подання флікер-шуму // Комп'ютерні технології друкарства. – 2004. – № 11. – С.115–118. 6. Бучма І., Вжуцак М. Вплив флікер-шуму в тракці несучої частоти низькочастотного каналу товщиноміра сталевих листових конструкцій // Методи та прилади контролю якості. – 2003. – №10. – С.24–27. 7. Бучма І.М., Ферчук К.В. Зниження порогу чутливості низькочастотного одноканального тракту товщиноміра сталевих листових конструкцій // Методи і прилади контролю якості. – 2003. – № 10. – С.22–23.