

П. В. Тимощук

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра систем автоматизованого проектування

РОБОЧИ РЕЖИМИ ІМПУЛЬСНОЇ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ ТИПУ “K-WINNERS-TAKE-ALL”

© Тимощук П. В., 2018

Описано нейронну мережу (НМ) неперервного часу типу “K-winners-take-all” (KWTA), яка ідентифікує K найбільші з-поміж N входів, де керуючий сигнал $1 \leq K < N$. Мережа описується рівнянням стану із розривною правою частиною і вихідним рівнянням. Рівняння стану містить шлейф імпульсів, які описуються сумою дельта-функцій Дірака. Проаналізовано існування та єдиність робочих режимів мережі. Головною перевагою мережі порівняно з іншими близькими аналогами є розширення обмежень на швидкість збіжності до робочих режимів. Отримані теоретичні результати ілюструються прикладом комп’ютерного моделювання, який демонструє ефективність мережі.

Ключові слова: мережа неперервного часу, нейронна мережа (НМ) типу “K-winners-take-all” (KWTA), рівняння стану з розривною правою частиною, шлейф імпульсів, дельта-функція Дірака, існування та єдиність.

P. Tymoshchuk

L’viv Polytechnic National University,
Department of Computer-Aided Design Systems

WORK MODES OF IMPULSE K-WINNERS-TAKE-ALL NEURAL NETWORK

© Tymoshchuk P., 2018

A continuous-time network of K-winners-take-all (KWTA) neural circuit (NC) which is capable of identifying the largest K of N inputs, where a command signal $1 \leq K < N$ is described. The network is described by a state equation with a discontinuous right-hand side and by an output equation. The state equation contains an impulse train defined by a sum of Dirac delta functions. Existence and uniqueness of the network work modes is analyzed. The main advantage of the network comparatively to other close analogs is widening convergence speed limitations to working modes. Theoretical results are derived and illustrated with computer simulation examples that demonstrate the network’s performance.

Keywords: Continuous-time network, K-winners-take-all (KWTA) neural circuit (NC), state equation with a discontinuous right-hand side, impulse train, Dirac delta function, existence and uniqueness.

Вступ

“K-winners-take-all” (KWTA) – нейронні мережі (НМ) вибирають K максимальних з-поміж N входів, де $1 \leq K < N$ – позитивне ціле число [1–3]. У випадку, коли $K = 1$, KWTA-мережа є “winner-takes-all” (WTA)-мережею [4, 5].

KWTA-нейронні мережі мають численні застосування, зокрема в обробці даних і сигналів, прийнятті рішень, для розпізнавання образів, у конкуруючому навчанні і сортуванні. Їх використовують у телекомунікаціях, системах технічного бачення, для фільтрування, декодування, обробки зображень, кластеризації, класифікації, навігації мобільних роботів і розпізнавання ознак. KWTA-мережі застосовують для розпізнавання явищ та в імпульсних НМ [6].

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Існує багато WTA- і KWTA- нейронних мереж. Наприклад, опис проектування, виготовлення і тестування WTA-функції на основі серійних КМОН-інтегральних схем можна знайти в [7]. KWTA НМ неперервного часу, реалізовані в аналоговому апаратному забезпеченні, мають вищу швидкодію, є більш компактними і енергоефективними порівняно з цифровими реалізаціями [8, 9].

Нейрони можна описувати, використовуючи імпульси [10]. Імпульс може моделюватись за допомогою експоненціальної затримки або дельта-функції Дірака. Експоненціальні затримки і дельта-функції Дірака застосовують для опису потенціалу мембрани нейрона. Суми дельта-функцій та експоненціальних затримок між імпульсами використовуються для моделювання рівня активності нейрона, що усереднює впливи післясинаптичних імпульсів на нейрон. Нейрони із сигналами у формі імпульсів застосовують для моделювання психофізичних даних у пластичних мережах кори головного мозку. Обчислення, які ґрунтуються на імпульсах центральної нервової системи, порівняно з традиційними методами можуть мати значні переваги в ефективності під час розв'язання специфічних задач великої розмірності.

У статті в KWTA НМ неперервного часу діє шлейф імпульсів, що визначається сумою дельта-функцій Дірака. Тому, на відміну від інших аналогів, для яких траєкторія змінної стану мережі до KWTA-режиму має неперервну лінійну, кусково-лінійну або нелінійну форми, траєкторія змінної стану такої мережі до KWTA-режиму має ступінчасту форму. В результаті цього, коли період формування імпульсів прямує до нуля, теоретична швидкість збіжності траєкторій змінної стану мережі до WTA-режиму прямує до безмежності. Тому така мережа здатна дуже швидко, майже без перехідної динаміки ідентифікувати K найбільших серед N входів. Це є основною перевагою мережі. Аналізується існування та єдиність робочих режимів мережі. Наведено результати комп'ютерного моделювання, яке підтверджує та ілюструє теоретичні положення.

Постановка задачі

Нехай задано вхідний вектор $\mathbf{a} = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_N})^T \in \mathfrak{R}^n$, $1 < N < \infty$ із невідомими елементами зі скінченними значеннями. Входи є такими, що їх можна розрізнити і впорядкувати за спаданням величини згідно з такими нерівностями:

$$\infty > a_{n_1} > a_{n_2} > \dots > a_{n_N} > -\infty, \quad (1)$$

де n_1, n_2, \dots, n_N – невідомі номери першого найбільшого входу, другого найбільшого входу і т. д. аж до N -го найбільшого входу. Необхідно дослідити існування та єдиність робочих режимів траєкторій станів мережі KWTA-мережі, яка здатна миттєво, без перехідної динаміки ідентифікувати K найбільших із цих входів, які називаються переможцями. Мережа повинна обробляти вхідний вектор \mathbf{a} так, щоби отримувати такий вихідний вектор $\mathbf{b} = (b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_N})^T$, щоби задовольнялась така KWTA-властивість [1, 6]:

$$b_{n_i} > 0, i = 1, 2, \dots, K; \quad b_{n_j} < 0, j = K + 1, K + 2, \dots, N. \quad (2)$$

Окрім цього, має бути можливість отримання вихідних сигналів НМ у такій формі [11]:

$$d_{n_i} = 1, i = 1, 2, \dots, K; \quad d_{n_j} = 0, j = K + 1, K + 2, \dots, N. \quad (3)$$

У випадку використання вихідних сигналів мережі (3) ідентифікуватимуться лише K переможців серед N входів. Інформації стосовно впорядкування входів за величиною, яка може бути використана надалі, наприклад, для розв'язання задач класифікації, кластеризації та ін., отримано не буде [6].

Імпульсна мережа неперервного часу

Розглянемо аналогову КВТА-мережу неперервного часу, представлену в [6], яка описується таким рівнянням стану:

$$\frac{dx}{dt} = rD(x) \sum_{l=0}^m d(t-t_l) \quad (4)$$

і вихідним рівнянням

$$b_{n_k} = a_{n_k} - x, k = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

де

$$D(x) = \sum_{k=1}^N S_k(x) - K \quad (6)$$

– функція різниці між отриманою і необхідною кількістю позитивних виходів,

$$S_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } a_{n_k} - x > 0; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

– ступінчаста функція,

$$d(t-t_l) = \begin{cases} +\infty, & \text{if } t = t_l; \\ 0, & \text{if } t \neq t_l \end{cases} \quad (8)$$

– імпульс у формі дельта-функції Дірака; $\sum_{l=1}^m d(t-t_l)$ – шлейф імпульсів; t_l – стала часу

формування імпульсів; m – кількість імпульсів, необхідних для досягнення збіжності пошукового процесу до КВТА-режиму; r – роздільна здатність мережі.

На відміну від інших аналогів з неперервною нелінійною траєкторією змінної стану x , мережа має ступінчасту траєкторію змінної стану x . Тому вона спроможна досягати теоретично будь-якої скінченної швидкості обробки входів, яка визначається періодом формування імпульсів. Якщо цей період прямує до нуля, час обробки мережею входів також прямує до нуля. Це – головна перевага мережі. Практична швидкість обробки входів такою мережею обмежуються її програмною або апаратною реалізацією. Зокрема, програмна реалізація мережі характеризується обмеженою точністю обчислень. У випадку апаратної реалізації обмеженнями є скінченна швидкодія компаратора, неідеальності інтегратора, неузгодженість та ін.

Існування та єдиність робочих режимів мережі

Проаналізуємо існування та єдиність розв'язків робочих КВТА-режимів рівняння станів (4). Інтегруванням обох частин цього рівняння отримуємо:

$$x(t) = \int_{t_0}^t rD(x) \sum_{l=0}^m d(t-t_l) dt = x_0 + r \sum_{l=0}^m D(x_l) H(t-t_l), \quad (9)$$

де

$$H(t-t_l) = \begin{cases} 1, & \text{if } t-t_l > 0; \\ [0,1], & \text{if } t-t_l = 0; \\ 0, & \text{if } t-t_l < 0 \end{cases} \quad (10)$$

– ступінчаста функція Хевісайда. Оскільки члени $x_0, r, D(x_l)$ і $H(t-t_l)$ розв'язку (9) є скінченними, $x(t)$ і – також скінченне. У робочих КВТА-режимах розв'язок (9) повинен задовольняти нерівності

$$a_{k+1} \leq x_0 + r \sum_{l=0}^m D(x_l) H(t-t_l) < a_k. \quad (11)$$

Запишемо нерівності (11) у такій формі:

$$a_{k+1} \leq x_0 + rI < a_k, \quad (12)$$

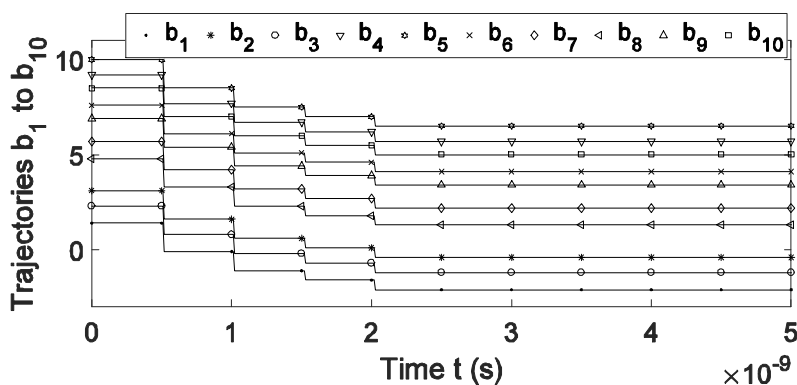
де $I = \sum_{l=0}^m D(x_l)H(t-t_l)$ – ціле число. Існує ціле I таке, що задовольняються нерівності (12) при обмеженні $0 < r \leq \min |a_{n_i} - a_{n_j}|$, $i \neq j = 1, 2, \dots, N$ для будь-яких входів, які можна розрізнити (1) і для довільної скінченної початкової умови x_0 . Це означає, що існує постійне число $x^* \in \mathfrak{R}$ таке, що $a_{k+1} \leq x^* < a_k$. Для x^* рівність $D(x^*) = \sum_{k=1}^N S_k(x^*) - K = 0$ означає, що x^* є розв'язком робочого режиму рівняння (4). З (2) і (5) випливає, що існують КВТА-виходи робочого режиму $b_{n_k} = a_{n_k} - x^*$, $k=1, 2, 3, \dots, N$ мережі (4), (5). Це означає, що x^* є КВТА-розв'язком робочого режиму рівняння стану (4).

Розв'язок робочого режиму рівняння стану (4) може набувати довільного скінченного значення у діапазоні $a_{k+1} \leq x^* < a_k$, задовольняючи рівність $D(x^*) = \sum_{k=1}^N S_k(x^*) - K = 0$. Розв'язок x^* не є єдиним, оскільки ця рівність справедлива для кожного $x^* \in [a_{k+1}, a_k]$. Отже, виходи $b_{n_k} = a_{n_k} - x^*$, $k=1, 2, \dots, N$ – також неєдині. Однак, КВТА-властивість (2) мережі (4), (5) визначається знаками виходів b_{n_k} , а не їхніми значеннями. Ці знаки – єдині для довільного $a_{k+1} \leq x^* < a_k$. Тому мережа (4), (5) володіє єдиною КВТА-властивістю (2).

Результати комп'ютерного моделювання

Розглянемо конкретний приклад із відповідним комп'ютерним моделюванням, яке ілюструє ефективність вищеописаної імпульсної мережі. Задамо вхідний вектор $a = (1.4, 3.1, 2.3, 9.2, 10, 7.6, 5.7, 4.8, 6.9, 8.5)^T$ тобто $N=10$, $K=7$, $r=0.5 < \min |a_{n_i} - a_{n_j}|$, $i \neq j = 1, 2, \dots, 10$ і початкове значення змінної стану $x_0 = 0$. Використаємо 1.81 ГГц ПК і розв'язувач нежорстких звичайних диференційних рівнянь Ейлера (ODE1) із фіксованим кроком 1×10^{-11} у середовищі Simulink програми Matlab. Джерело імпульсів реалізуємо за допомогою послідовного з'єднання генератора імпульсів, диференціатора і блоків абсолютного значення. Імпульси формуються з періодом $t = 0.5$ нс.

На рисунку показано динаміку елементів вихідного вектора b імпульсної мережі, яка описується рівняннями станів (4) і вихідним рівнянням (5). Як видно з цього рисунка, траєкторії виходів мережі прямують до єдиного робочого КВТА-режиму протягом 2 нс, починаючи зі своїх початкових значень у результаті використання чотирьох імпульсів.



Траєкторії елементів вихідного вектора b імпульсної мережі, яка описується рівняннями станів (4) і вихідним рівнянням (5) для $t = 0.5$ нс

Висновки

Описано аналогову імпульсну КВТА НМ неперервного часу. Мережа спроможна вибрати K максимальних серед будь-яких N невідомих входів із скінченними значеннями, які можна розрізнити, розміщеними у невідомому діапазоні, де $1 \leq K < N$. Проаналізовано існування та єдиність робочих режимів мережі. На відміну від інших аналогів, траєкторії змінної станів мережі мають кусково-постійну, тобто ступінчасту форму. Тому робочі КВТА-режими у мережі можуть отримуватись дуже швидко, якщо період формування імпульсів прямує до нуля. Отже, така мережа може ідентифікувати K найбільших серед N входів майже миттєво без перехідної динаміки.

1. E. Majani, R. Erlanson, and Y. Abu-Mostafa, "On the k -winners-take-all network," in *Advances in Neural Information Processing Systems 1*, R. P. Lippmann, J. E. Moody, and D. S. Touretzky, Eds. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 1989, pp. 634–642. 2. J. Wang, "Analysis and design of a k -winners-take-all network with a single state variable and the Heaviside step activation function," *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 21, no. 9, pp. 1496–1506, Sept. 2010. 3. P. V. Tymoshchuk, "A simplified continuous-time model of analogue K -winners-take-all neural circuit", in *Proc. XI Int. Conf. "The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics"*, Polyana-Svalyava, Ukraine, February 23–25, 2011, pp. 121–125. 4. R. P. Lippmann, "An introduction to computing with neural nets," *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing Magazine*, vol. 3, no. 4, pp. 4–22, Apr. 1987. 5. P. Tymoshchuk and E. Kaszkurewicz, "A winner-take all circuit using neural networks as building blocks," *Neurocomputing*, vol. 64, pp. 375–396, Mar. 2005. 6. P. Tymoshchuk, "Parallel rank-order filtering based on impulse K -winners-take-all neural network," *Computer Systems and Networks*, No 881, pp. 160–165, 2017. 7. J. Lazzaro, S. Ryckebusch, M. A. Mahowald, and C. A. Mead, "Winner-take-all networks of $O(N)$ complexity," in *Advances in Neural Information Processing Systems 1*, R. P. Lippmann, J. E. Moody, and D. S. Touretzky, Eds. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 1989, pp. 703–711. 8. B. Sekerir and U. Cilingiroglu, "A CMOS K -winners-take-all circuits with $O(N)$ complexity," *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol. 46, no. 1, pp. 1–5, Jan. 1999. 9. A. Cichocki and R. Unbehauen, *Neural Networks for Optimization and Signal Processing*. New York, NY, USA: Wiley, 1993. 10. R. C. O'Reilly and Y. Munakata, *Computational Explorations in Cognitive Neuroscience: Understanding the Mind by Simulating the Brain*. Cambridge, MA: MIT Press, 2000. 11. W. Maass, "Neural computation with winner-take-all as the only nonlinear operation," in *Advances in Information Processing Systems*, vol. 12. S. A. Solla, T. K. Leen, and K.-R. Mueller, Eds. Cambridge, MA: MIT Press, 2000, pp. 293–299.