

Я. М. Литвиняк

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра технології машинобудування

ДОПОВНЕННЯ ДО КІНЕМАТИЧНОГО СПОСОБУ СИНТЕЗУ ПРОФІЛЮ ЗУБЦІВ ПЛОЩИННОГО ЗУБЧАСТОГО ЗАЧЕПЛЕННЯ

© Литвиняк Я. М., 2014

Запропоновані теоретичні положення для синтезу профілів зубців зубчастих коліс у площинному зачепленні, що доповнюють кінематичний спосіб визначення рівняння зачеплення. Новизна полягає у тому, що вираз, який у нерухомій системі координат описує лінію зачеплення профілів, отримують шляхом визначення найменшої відстані від миттєвого центра швидкостей (полюса зачеплення) до точки контакту профілів. Записуючи лінію точок контакту у відповідній рухомій системі координат, визначають шуканий профіль зубців колеса або рейки.

Ключові слова: синтез профілю зубців, миттєвий центр швидкостей, лінія зачеплення, виготовлення зубчастих коліс.

The offered theoretical positions are for the synthesis indents profiles of gear-wheels in the plane hooking. A novelty consists in determination of the least distance from the instantaneous speeds center to the profiles contact point for hooking profiles line description. Writing down the contact points line in the corresponding movable coordinates system determine the sought after indents profile of wheel or rail.

Key words: synthesis profiles gearing, instantaneous speeds center, contact point line, manufacturing gearing.

Постановка проблеми. Функціональні, експлуатаційні та економічні показники значної кількості сучасних транспортних, енергетичних, виробничих машин визначають зубчасті передачі, що входять до складу їх приводу. Своєю чергою, навантажувальна здатність, надійність, шумові характеристики зубчастих передач, зокрема найпоширеніших циліндричних, залежать безпосередньо від зачеплення утвореного боковими активними поверхнями зубців коліс. Тому вдосконалення зубчастих передач належить до актуальних науково-технічних завдань, які можна виконати шляхом синтезу профілю робочих поверхонь зубців. Завдання синтезу профілю зубців є достатньо важливим не тільки для зубчастих зачеплень у передачах, але також для забезпечення технологічних процесів, спрямованих на формоутворення зубчастих елементів деталей, які згодом використовують для утворення передач чи зубчастих з'єднань. У цьому випадку актуальними стають завдання, що сприяють якісному, надійному проектуванню робочих профілів різальних інструментів, які застосовують на технологічних операціях нарізання зубців на відповідних деталях (наприклад, циліндричних зубчастих колесах, зубчастих рейках, шліцьових валах, храпових зубчастих колесах, зірочках ланцюгів тощо) під час реалізації методу обкочування або способів зубонарізання, у яких використовують безперервне обертання заготовки [3, 4].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Синтез та аналіз площинних зубчастих зачеплень здебільшого супроводжується розв'язанням таких основних задач: визначення профілю зубця спряженого заданому (встановлюють огинаючу до сукупності положень первинного профілю зубця ведучого колеса чи рейки) та встановлення рівняння лінії зачеплення спряжених профілів [2, 3].

Методика визначення взаємоогиаючих профілів зубчастих деталей у їх відносному русі на площині включає розгляд процесу кочення без ковзання їх центроїд. Наприклад, для зубчастого зачеплення двох коліс розглядають кочення центроїди ведучого колеса 1 по центроїді веденого колеса 2. З колесами 1 та 2 зв'язують системи координат відповідно $S_1(x_1, y_1)$ та $S_2(x_2, y_2)$. Колесам 1 та 2 надають рухи обертання, за якими вони повертаються, відповідно, на кути φ_1 та φ_2 . Величини цих кутів пов'язані між собою передавальним відношенням $i_{12} = \varphi_1 / \varphi_2$. Якщо в системі координат S_1 заданий профіль зубця за допомогою рівняння $F_1(x_1, y_1) = 0$, тоді згідно з виразами переходу від системи координат S_1 до системи S_2 , отримують в системі S_2 рівняння сукупності положень заданого профілю у вигляді рівняння $F_2(x_2, y_2, \varphi_1) = 0$, в якому розташування сукупності цих профілів залежить від параметра φ_1 . Згідно з відповідними положеннями диференціальної геометрії, огиаюча до згаданої сукупності профілів може бути встановлена після виключення параметра φ_1 із системи рівнянь:

$$F_2(x_2, y_2, \varphi_1) = 0; (\partial F_2 / \partial x_2) \cdot (\partial x_2 / \partial \varphi_1) + (\partial F_2 / \partial y_2) \cdot (\partial y_2 / \partial \varphi_1) = 0. \quad (1)$$

Отримані вирази дозволяють отримати координати множини точок контакту профілів зубців коліс, які можуть бути використані для визначення рівняння лінії контакту або рівняння лінії зачеплення (для процесів нарізання зубців рівняння лінії профілювання або характеристичне рівняння) для певного значення кута повороту ведучого колеса φ_1 (веденого колеса φ_2), якщо записати отримані вирази в нерухомій системі координат $S(x, y)$. Своєю чергою, профіль зубця веденого колеса 2 визначають в рухомій системі координат S_2 , використовуючи формули зв'язку між згаданими системами координат.

Кінематичний спосіб визначення рівняння зачеплення ґрунтується на тому, що, беручи до уваги залежність кутів повороту φ_1 та φ_2 від загального параметра, яким може бути час t , виконують відповідні дії щодо диференціювання складних функцій і згодом отримують почленний добуток координат вектора загальної нормалі \vec{N}_i до спряжених профілів зубців та координат вектора відносної швидкості руху \vec{v}_i точок контакту на профілях. Скалярний добуток векторів загальної нормалі \vec{N}_i та відносної швидкості \vec{v}_i визначає для кінематичного способу основну умову контакту спряжених профілів використовуючи властивість перпендикулярних векторів [3]:

$$\vec{N}_i \cdot \vec{v}_i = 0. \quad (2)$$

Наведене рівняння надає можливість визначити координати сукупності точок контакту в різні моменти часу, а відтак дозволяє отримати вирази, що визначають лінію зачеплення та профіль зубця веденого колеса відповідно в нерухомій S та рухомій S_2 системах координат.

Наведені методики є основними, постійно вживаними під час аналізу зачеплення, визначення профілю спряжених зубців або профілювання зубонарізних інструментів, які використовують для реалізації методу обкату при виготовленні деталей із зубцями певного профілю. Однак, процедура досягнення потрібного остаточного результату супроводжується достатньо складними математичними викладеннями, необхідністю здійснювати як диференціювання складних функцій, так і визначати необхідні параметри із здебільшого трансцендентного рівняння контакту. Все це спонукає до пошуку шляхів з удосконалення методик синтезу та аналізу площинних зубчастих зачеплень.

Формулювання мети досліджень. Розроблення теоретичних положень із удосконалення кінематичного методу синтезу зубчастих зачеплень та профілювання металорізальних інструментів для нарізання зубців на деталях методом обкату.

Викладення основного матеріалу дослідження. Розглядаючи площинне зубчасте зачеплення (див. рис. 1), утворене двома прямозубими зубчастими колесами осі яких паралельні, необхідно взяти до уваги декілька основних умов, дотримання яких забезпечує існування самого зубчастого зачеплення [1, 2, 3], а також дозволяють здійснити заплановані дослідження.

Обертний рух навколо центрів O_1 та O_2 від одного зубчастого колеса до іншого супроводжується взаємним коченням без проковзування центроїд цих коліс, що є колами з радіусами R_1 та R_2 величина яких обернено пропорційна кутовим швидкостям ω_1 та ω_2 цих коліс. Центроїди коліс торкаються в точці P , що лежить на міжцентровій віддалі і є миттєвим центром обертання (полюсом зачеплення).

Профілі зубців у площинному зачепленні повинні належати до взаємоогиначаючих. Для цього, згідно з теоремою Вілліса, у точці E контакту профілів двох зубців загальна нормаль \vec{N}_i повинна проходити через миттєвий полюс зачеплення P (миттєвий центр обертання). Точка контакту E профілів, в певний момент часу, утворена поєднанням двох точок (наприклад E_1 та E_2), кожна з яких належить відповідно профілю зуба колеса 1 та 2.

Вектор відносної швидкості \vec{v}_i точки контакту E_2 профілю зубця другого колеса відносно точки контакту E_1 профілю зубця першого колеса повинен бути спрямований вздовж загальної дотичної в точці контакту E до профілів зубців коліс (перпендикулярно до вектора загальної нормалі \vec{N}_i), що дозволить уникнути візання або відходу профілів зубців один від одного.

Крім цього, згідно з відповідною теоремою теоретичної механіки, кінцеве переміщення плоского профілю у своїй площині можна здійснити за допомогою лише одного обертання на деякий кут навколо миттєвого центра обертання (у нашому випадку профілю зубця навколо полюса зачеплення P із відповідною миттєвою відносною кутовою швидкістю ω_{12}).

Отже, величина відносної швидкості \vec{v}_i у точці контакту E профілів зубців дорівнює добутку миттєвої кутової швидкості ω_{12} на радіус обертання PE миттєвого обертального руху. Це дозволяє зробити висновок про те, що миттєвий радіус обертання PE знаходиться на загальній нормалі \vec{N}_i до профілів зубців у миттєвій точці контакту E .

З геометричного погляду миттєвий радіус обертання PE – це радіус кола, центр якого збігається з миттєвим центром обертання P (полюсом зачеплення), а відстань від миттєвого центра обертання P до точки контакту профілів E – найменша серед множини усіх відстаней від центра обертання P до інших точок профілів зубців. Попереднє твердження доповнює та не суперечить основному співвідношенню кінематичного способу аналізу зубчастих зачеплень – $\vec{N}_i \cdot \vec{v}_i = 0$, оскільки, відстань від миттєвого центра обертання P до точки контакту профілів E встановлюється тільки вздовж спільної нормалі \vec{N}_i до точки контакту профілів, а вектор миттєвої відносної швидкості \vec{v}_i у точці контакту E миттєвого обертального руху профілю зубців навколо миттєвого центра обертання P – перпендикулярний вектору спільної нормалі \vec{N}_i .

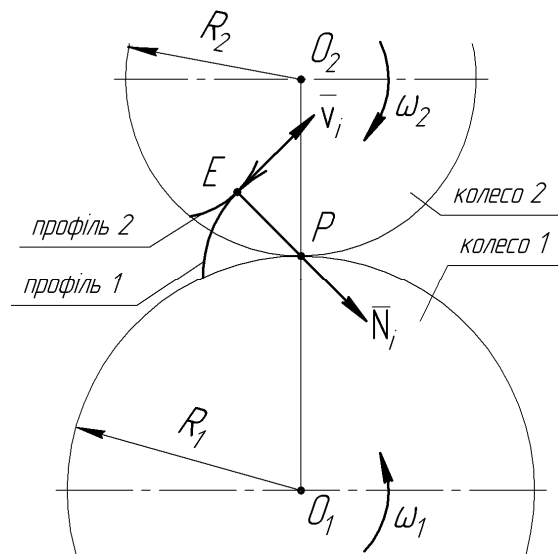


Рис. 1. Загальна схема площинного зачеплення двох зубчастих коліс

Розташовуючи нерухому систему координат S так, що її початок співпадає з миттєвим центром обертання P , можна значно спростити вирази для визначення відстані від миттєвого центра обертання P до точки контакту профілів E , оскільки координати точки P дорівнюють нулю ($x_P = y_P = 0$).

Проведений аналіз дозволив встановити, що для профілів, які використовуються у площинному зубчастому зачепленні, справджується таке правило: *у площинному зачепленні, для певного миттєвого положення взаємоогинаючих профілів зубців, відстань від миттєвого центра швидкостей (полюса зачеплення) до спільної точки контакту профілів є мінімальною.*

Використовуючи наведене правило, пропонуємо методику синтезу (аналізу) площинного зубчатого зачеплення, яка відображена у такому алгоритмі:

1. Розробити схему розташування систем координат рухомих (зв'язаних із зубчастими колесами S_1, S_2 чи рейкою S_3) і нерухомої S .

2. Записати в рухомій системі координат (наприклад S_1 чи S_3) відоме рівняння профілю зубця (наприклад, $F_1(x_1, y_1) = 0$ чи $F_3(x_3, y_3) = 0$).

3. Встановити центроїди рейки, коліс (кола з радіусами R_1 та R_2) та розташування миттєвого центра обертання P (полюса зачеплення).

4. Визначити взаємні співвідношення між координатами точок в системах координат S, S_1, S_2 чи S_3 , враховуючи їх взаємне обертання чи поступальне переміщення залежно від кутів повороту φ_1 та φ_2 .

5. Записати в нерухомій системі координат S рівняння заданого профілю зубця (наприклад, $F_{01}(x, y) = 0$ чи $F_{03}(x, y) = 0$ або $y = f_{01}(x)$ чи $y_0 = f_{03}(x)$).

6. Записати вираз, що визначає квадрат відстані від миттєвого центра обертання P (полюса зачеплення) до точки E на заданому профілю:

$$r_E^2 = (x_E - x_P)^2 + (y_E - y_P)^2, \quad (3)$$

де r_E^2 – квадрат довжини вектора \vec{r}_E ; (x_E, y_E) ; (x_P, y_P) – відповідні координати точок E та P .

7. У нерухомій системі координат S для певного значення кута повороту φ_1 або φ_2 встановити найменшу відстань між точками P та E здійснивши диференціювання виразу (3):

$$d(r_E^2)/d(x_E) = 0, \quad (4)$$

8. Встановити рівняння лінії зачеплення в нерухомій системі координат S шляхом визначення координат точки контакту профілів $E(x_E, y_E)$.

9. Визначити рівняння профілю зуба в рухомій системі координат (S_2 або S_3), використовуючи рівняння лінії зачеплення в нерухомій системі координат S , застосовуючи співвідношення між координатами точок у системах координат S, S_1, S_2 чи S_3 .

Застосування пропонованої методики для синтезу площинного зачеплення проведемо для наступного прикладу.

Приклад. Визначити рівняння профілю зубців довбача для нарізання методом обкату прямобічних зубців шліцевого вала (рис. 2).

1. Використовуємо три системи координат – дві рухомі (S_1 та S_2 , що зв'язані відповідно із шліцевим валом та інструментом – довбачем) одна нерухома – S .

2. Рівняння профілю зубця шліцевого валау в рухомій системі координат S_1 :

$$F_1(x_1, y_1) = x_1 - h = 0. \quad (5)$$

3. Центроїди шліцевого вала та довбача – кола радіусами відповідно R_1 та R_2 , центр обертання (полюс зачеплення) розташований у точці P .

4. Залежності зв'язку між координатами точок у прийнятих системах координат:

- перехід від рухомої $S_1(x_1, y_1)$ до нерухомої системи $S(x, y)$ координат:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cdot \cos \varphi_1 + y \cdot \sin \varphi_1 + R_1 \cdot \sin \varphi_1; \\ y_1 &= -x \cdot \sin \varphi_1 + y \cdot \cos \varphi_1 + R_1 \cdot \cos \varphi_1. \end{aligned} \quad (6)$$

- перехід від нерухомої $S(x, y)$ до рухомої системи $S_2(x_2, y_2)$ координат:

$$\begin{aligned} x_2 &= x \cdot \cos \varphi_2 - y \cdot \sin \varphi_2 + R_2 \cdot \sin \varphi_2; \\ y_2 &= x \cdot \sin \varphi_2 + y \cdot \cos \varphi_2 - R_2 \cdot \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (7)$$

5. Рівняння заданого профілю зубця шліцевого вала в нерухомій системі координат S (використовуємо (5)):

$$\begin{aligned} x \cdot \cos \varphi_1 + y \cdot \sin \varphi_1 + R_1 \cdot \sin \varphi_1 - h &= 0; \\ y &= \frac{h}{\sin \varphi_1} - R_1 - x \cdot \operatorname{ctg} \varphi_1. \end{aligned} \quad (8)$$

6. Квадрат відстані від миттєвого центра обертання $P(x_P, y_P)$ до точки $E(x_E, y_E)$ на заданому профілі в нерухомій системі координат S , якщо $x_P = y_P = 0$:

$$\begin{aligned} r_E^2 &= (x_E - x_P)^2 + (y_E - y_P)^2; \\ r_E^2 &= (x_E)^2 + \left(\frac{h}{\sin \varphi_1} - R_1 - x_E \cdot \operatorname{ctg} \varphi_1 \right)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

7. Найменша відстань між точками P та E (здійснюємо диференціювання виразу (9) в системі координат S , використовуючи (4)):

$$\begin{aligned} \frac{d(r_E^2)}{d x_E} &= 2x_E + 2 \cdot \left(\frac{h}{\sin \varphi_1} - R_1 - x_E \cdot \operatorname{ctg} \varphi_1 \right) \cdot \operatorname{ctg} \varphi_1; \\ x_E \cdot (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_1) + \frac{h}{\sin \varphi_1} - R_1 &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

8. Рівняння лінії зачеплення в нерухомій системі координат S (визначаємо координати x_E, y_E точки контакту E , використовуючи (10), (8)):

$$\begin{aligned} x_E &= \left(R_1 - \frac{h}{\sin \varphi_1} \right) \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_1} \right); \\ y_E &= - \left(R_1 - \frac{h}{\sin \varphi_1} \right) \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_1} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

9. Рівняння профілю зуба в рухомій системі координат S_2 (застосовуємо (7), підставляючи (11)):

$$\begin{aligned} x_2 &= x_E \cdot \cos \varphi_2 - y_E \cdot \sin \varphi_2 + R_2 \cdot \sin \varphi_2; \\ x_2 &= x_E \cdot \sin \varphi_2 + y_E \cdot \cos \varphi_2 - R_2 \cdot \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (12)$$

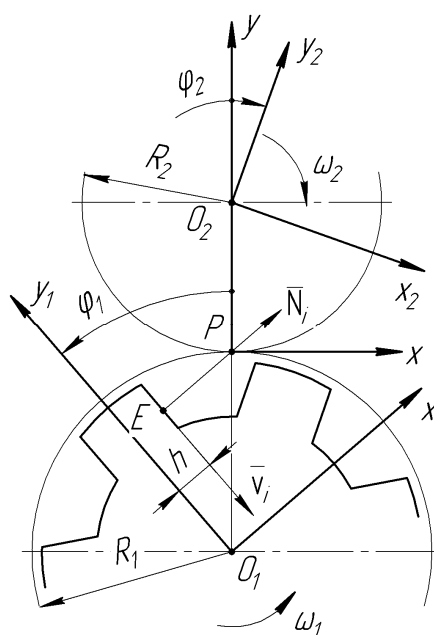


Рис. 2. Схема визначення профілю зубця довбача під час нарізання методом обкату прямобічних зубців шліцевого вала

Висновки. Запропоновано нову методику синтезу (аналізу) площинного зубчастого зачеплення, яка полягає у тому, що для зубчастого зачеплення встановлюють миттєвий центр обертання і визначають мінімальну віддаль від нього до точки контакту вздовж спільної нормалі, що забезпечує отримання, на основі заданого рівняння профілю зубця одного колеса (рейки), рівняння лінії зачеплення у нерухомій системі координат, а згодом використати його для визначення спряженого профілю зубця парного колеса. Отримані прості співвідношення, які дозволяють уникнути складних процедур кінематичного аналізу для визначення координат миттєвих векторів спільної нормалі та відносної швидкості у площинному зубчатому зачепленні.

1. Кузьо І. В. Теоретична механіка. Статика. Кінематика: Посібник / І. В. Кузьо, Т.-Н. М. Ванькович, Я. А. Зінько. – Львів: Вид-во “Растр-7”, 2010. – 324 с. 2. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584 с. 3. Родин П. Р. Основы формообразования поверхностей резанием. – К.: Вища школа, 1977. – 192 с. 4. Литвиняк Я. М. Кінематичні особливості процесу радіально-колового формоутворення зубців циліндричних коліс. Литвиняк Я. М. // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2013. – № 760: Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – С. 19–25.