

## ДИСПЕРСІЙНЕ РІВНЯННЯ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ МОДОВОГО СПЕКТРА ХВИЛЬ У ВІДКРИТИХ БАГАТОШАРОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ДІЕЛЕКТРИЧНИХ ХВИЛЕВОДАХ

© Павликевич М.Й., 2013

M.Yo. Pavlykevych

Lviv Polytechnic National University

## THE DISPERSION EQUATION FOR MODE SPECTRA EVALUATION IN OPENED LAYERED CYLINDRICAL DIELECTRIC WAVEGUIDES

© Pavlykevych M.Yo., 2013

This paper is devoted to the solving an eigenvalue problem for opened layered cylindrical waveguide structure with arbitrary finite number coaxial magnetodielectric layers. Classical method of separation of variables for analytical solution to a boundary value problem for second order non-self-adjoint differential operator is applied. A general solution for electromagnetic field components, its boundary and infinity conditions are applied to obtain the complex transcendental dispersion equation. The dispersion equation has form a condition of nontrivial solving for system of homogeneous linear equation, that is a condition of singularity for a matrix  $D$  of the system linear equation, for example  $\det(D)=0$ . For  $l$ -layered waveguide structure this is a square  $4(l+1)$ -matrix, which rank not exceed  $4l+3$ . If a rank of matrix  $D$  is equal  $4l+3$ , then simple roots of dispersion equation exist, else multiplicity of roots to appear. The matrix  $D$  can be represented in block form respectively to vectors of unknown complex amplitude coefficients. Blocks of submatrices are bidiagonal.

The dispersion equation solutions for the particular waveguide structure represents the longitudinal wavenumber values of wave modes and a variety of wavenumber values represent discrete mode spectra: surface modes and leaky modes. In general this is hybrid modes excepting a case of axial symmetrical field distribution. For this case the dispersion equation is decomposed to two equation – for TE-modes and for TM-modes and the matrix  $D$  obtain a block diagonal form.

**Key words:** mode spectrum, eigenvalue problem, multilayer waveguide, cylindrical dielectric waveguide, dispersion equation.

Класичним методом розділення змінних отримано дисперсійне рівняння для визначення спектра мод хвиль у відкритому багатошаровому циліндричному діелектричному хвилеводі з довільною кількістю коаксіальних шарів магнітодіелектриків. Це спектральна задача для несамоспряженого диференційного оператора другого порядку із змінними, які розділяються, і з однорідними граничними умовами на границях шарів. Загальні розв'язки рівнянь для складових полів разом з граничними умовами та умовами на безмежності приводять до комплексного трансцендентного дисперсійного рівняння для поздовжніх хвильових чисел власних хвиль (мод) з дискретним спектром.

**Ключові слова:** модовий спектр, проблема власних значень, багатошаровий хвилевід, циліндричний діелектричний хвилевід, дисперсійне рівняння.

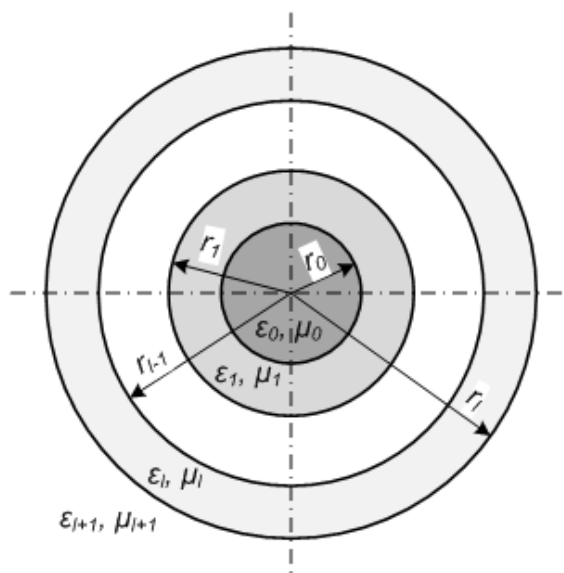
### Вступ

Відкриті багатошарові хвилеводні структури тривалий час є основою для побудови передавальних ліній та елементів пристроїв у мікрохвильовому та оптичному діапазонах довжин хвиль.

Тому дослідження особливостей поширення хвиль у таких структурах – це актуальна задача, розв’язання якої в строгій електродинамічній постановці створює надійну основу для побудови математичних моделей, орієнтованих на дослідження конкретних явищ або особливостей поведінки параметрів хвилеводної структури. Таким дослідженням присвячено фундаментальні праці, наприклад, монографії [1], [2], а також публікації у науковій періодиці [3–6]. Значна частина цих праць використовує підхід, базований на спектральному методі аналізу хвильових процесів у багатошарових хвилевідних структурах. У роботі запропоновано підхід, який дає змогу отримати дисперсійне рівняння для визначення модового спектра хвиль у циліндричному хвилеводі, утвореному довільною обмеженою кількістю коаксіальних шарів магнітодіелектриків (включно з реальними провідниками).

### Постановка задачі

Досліджувана структура (рисунок), утворена циліндричною центральною областю із зовнішнім радіусом  $r_0$ , яка може вважатися ідеально провідною або бути реальним магнітодіелектриком (включно з випадком реального провідника) з відносними комплексними проникностями  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ;  $l$  шарами ізотропних магнітодіелектриків з відносними комплексними проникностями  $\epsilon_j$ ,  $\mu_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , при цьому границі шарів є співвісними (коаксіальними) циліндрами із зовнішніми радіусами  $r_1, r_2, \dots, r_l$ . Шари оточені зовнішнім середовищем, яке можна трактувати як ідеально провідне або як реальний ізотропний магнітодіелектрик з параметрами  $\epsilon_{l+1}$ ,  $\mu_{l+1}$ . Для такої структури ставиться задача про знаходження дискретного спектра власних хвиль (мод) для довільної частоти, кількості шарів при заданих їх електромагнітних параметрах, а також про розрахунок електромагнітного поля окремо взятої власної хвилі (моди) та щільності потоку електромагнітної потужності (вектора Пойнтінга). Ця задача полягає у знаходженні розв’язків рівняння Гельмгольца за заданих граничних умов на границях шарів та границях з внутрішнім та зовнішнім середовищами. Завдяки гладкості циліндричних границь задача дозволяє одну постановку як для закритих, так і для відкритих хвилеводних структур.



Поперечний переріз відкритої багатошарової циліндричної хвилеводної структури

Відомо, що електромагнітне поле в циліндричній багатошаровій хвилеводній структурі можна описати за допомогою тільки повздовжніх (у напрямку осі  $z$  циліндричної системи координат) компонент векторних електродинамічних потенціалів  $\mathbf{A}_z^m = \mathbf{z}^0 A_z^m = \mathbf{z}^0 \left[ R^m(r) \Phi^m(j) Z^m(z) \right]$  та

$A_z^e = \mathbf{z}^0 A_z^e = \mathbf{z}^0 [R^e(r) \Phi^e(j) Z^e(z)]$ , які є функціями циліндричних координат  $r, j, z$  та задовольняють однорідні скалярні рівняння Гельмгольца. Електромагнітне поле можна виразити через ці потенціали як

$$E_r = -\frac{i}{\omega \epsilon^0 \epsilon} \frac{dR^e}{dr} \Phi^e \frac{dZ^e}{dz} - \frac{1}{r} R^m \frac{d\Phi^m}{dj} Z^m \quad (1) \quad H_r = -\frac{i}{\omega m^0 m} \frac{dR^m}{dr} \Phi^m \frac{dZ^m}{dz} - \frac{1}{r} R^e \frac{d\Phi^e}{dj} Z^e \quad (2)$$

$$E_j = -\frac{i}{\omega \epsilon^0 \epsilon} \frac{1}{r} R^e \frac{d\Phi^e}{dj} \frac{dZ^e}{dz} + \frac{dR^m}{dr} \Phi^m Z^m \quad (3) \quad H_j = -\frac{i}{\omega m^0 m} \frac{1}{r} R^m \frac{d\Phi^m}{dj} \frac{dZ^m}{dz} + \frac{dR^e}{dr} \Phi^e Z^e \quad (4)$$

$$E_z = -\frac{i}{\omega \epsilon^0 \epsilon} R^e \Phi^e \left[ k^2 Z^e + \frac{d^2 Z^e}{dz^2} \right] \quad (5) \quad H_z = -\frac{i}{\omega m^0 m} R^m \Phi^m \left[ k^2 Z^m + \frac{d^2 Z^m}{dz^2} \right] \quad (6)$$

Загальні розв'язки рівнянь Гельмгольца для функцій, які описують залежності потенціалів  $A_z^e$  і  $A_z^m$  від координат  $r, j, z$ , тобто, для  $R^e(r), \Phi^e(j), Z^e(z)$  та  $R^m(r), \Phi^m(j), Z^m(z)$  можна записати у такому вигляді:

$$R^e(r) = \begin{cases} G J_n(kr) + S N_n(kr), \\ G H_n^{(1)}(kr) + S H_n^{(2)}(kr), \end{cases} \quad (7) \quad R^m(r) = \begin{cases} A J_n(kr) + B N_n(kr), \\ A H_n^{(1)}(kr) + B H_n^{(2)}(kr), \end{cases} \quad (8)$$

$$\Phi^e(j) = K \cos(nj) + L \sin(nj), \quad (9) \quad \Phi^m(j) = C \cos(nj) + D \sin(nj), \quad (10)$$

$$Z^e(z) = M \exp(-ik_z z) + P \exp(ik_z z), \quad (11) \quad Z^m(z) = E \exp(-ik_z z) + P \exp(ik_z z), \quad (12)$$

де  $J_n(kr)$  – функція Бесселя  $n$ -го порядку,  
 $N_n(kr)$  – функція Нойманна  $n$ -го порядку,  
 $H_n^{(1)}(kr), H_n^{(2)}(kr)$  – функції Ганкеля  $n$ -го порядку,  
 $n, k, k_z$  – константи розділення змінних.

Зауважимо, що  $k$  та  $k_z$  мають сенс поперечного та поздовжнього хвильових чисел відповідно; ці хвильові числа пов'язані співвідношенням

$$k^2 = k^2 + k_z^2, \quad (13)$$

де  $k^2 = \omega^2 \epsilon^0 m^0 \epsilon m$  – хвильове число для середовища з відносними проникностями  $\epsilon$  та  $\mu$ ;  $\epsilon^0$  і  $m^0$  – це абсолютні відповідно електрична і магнітна сталі. Константа  $n$  є цілим числом :  $n=0, 1, 2 \dots$

Для знаходження конкретних розв'язків необхідно задовольнити граничні умови на границях розділу шарів (середовищ) для складових повного поля, дотичних до конкретної границі розділу  $j$ -го та  $j+1$ -го шару (середовища),  $j=0, \dots, l$ ; крім того, необхідно задовольнити умову обмеженості поля при  $r=0$ , а також визначити бажану поведінку поля окремої моди на безмежності. Підставивши в граничні умови вирази (8), (9), (11), (12) для складових полів, отримаємо на границі  $j$ -го та  $j+1$ -го шару (середовища):

$$1) \text{ для } E_j : -\frac{i}{\omega \epsilon^0} \frac{1}{r_j} \left[ \frac{1}{\epsilon_j} R_j^e(r_j) - \frac{1}{\epsilon_{j+1}} R_{j+1}^e(r_j) \right] \frac{d\Phi^e}{dj} \frac{dZ^e}{dz} + \left[ \frac{dR_j^m}{dr} - \frac{dR_{j+1}^m}{dr} \right] \Phi^m Z^m = 0 \quad (14)$$

$$2) \text{ для } E_z : \left[ \frac{k_j^2}{\epsilon_j} R_j^e(r_j) - \frac{k_{j+1}^2}{\epsilon_{j+1}} R_{j+1}^e(r_j) \right] Z^e + \left[ \frac{1}{\epsilon_j} R_j^e(r_j) - \frac{1}{\epsilon_{j+1}} R_{j+1}^e(r_j) \right] \frac{d^2 Z^e}{dz^2} = 0 \quad (15)$$

$$3) \text{ для } H_j : \frac{i}{\omega m^0} \frac{1}{r_j} \left[ \frac{1}{m_j} R_j^m(r_j) - \frac{1}{m_{j+1}} R_{j+1}^m(r_j) \right] \frac{d\Phi^m}{dj} \frac{dZ^m}{dz} - \left[ \frac{dR_j^e}{dr} - \frac{dR_{j+1}^e}{dr} \right] \Phi^e Z^e = 0 \quad (16)$$

$$4) \text{ для } H_z : \left[ \frac{k_j^2}{m_j} R_j^m(r_j) - \frac{k_{j+1}^2}{m_{j+1}} R_{j+1}^m(r_j) \right] Z^m - \left[ \frac{1}{m_j} R_j^m(r_j) - \frac{1}{m_{j+1}} R_{j+1}^m(r_j) \right] \frac{d^2 Z^m}{dz^2} = 0 \quad (17)$$

при всіх  $j=0, 1, \dots, l$ .

Граничні умови (14)–(17) повинні задовольнятися для всіх значень координат  $\phi$  або  $z$ , тому коефіцієнти у виразах (9)–(12), а також повздовжнє хвильове число  $k_z$  мусять бути однаковими для всіх середовищ. Навпаки, коефіцієнти у виразах (7) і (8) різні у різних шарах.

Обмеженість поля в початку координат вимагає використання для опису радіальної залежності потенціалів та поля в центральній області структури ( $0 < r < r_0$ ) тільки функції Бесселя першого роду:

$$R_o^e = G_0 J_n(k_0 r) \quad (18) \quad R_o^m = A_0 J_n(k_0 r) \quad (19)$$

тобто для цієї області потрібно прийняти, що  $S_0 = B_0 = 0$ . У зовнішній області ( $r_l < r < \infty$ ) потенціали та поля бажано описувати безпосередньо функціями Ганкеля, бо серед всіх функцій Бесселя вони єдині прямують до нуля при безмежних значеннях комплексного аргументу, а саме функція Ганкеля першого порядку  $H_n^{(1)}(k_l r)$ , якщо уявна частина комплексного аргументу  $k_l r$  додатна, і функція Ганкеля другого порядку  $H_n^{(2)}(k_l r)$ , якщо уявна частина комплексного аргументу  $k_l r$  від'ємна. Такий опис відповідатиме поверхневим хвилям у досліджуваних структурах. При протилежних комбінаціях порядку та знака в аргументі значення функцій нарастають до безмежності, що відповідатиме антиповерхневим хвилям. Тому для опису поведінки потенціалів або полів поверхневих хвиль у зовнішній області достатньо вибрати одну з функцій:  $H_n^{(1)}(k_l r)$  або  $H_n^{(2)}(k_l r)$ , тобто

$$R^e(k_{l+1} r) = G_{l+1} H_n^{(p)}(k_l r) \quad (20) \quad R^m(k_{l+1} r) = A_{l+1} H_n^{(p)}(k_l r) \quad (21)$$

де  $p=1, 2$  – порядок функції Ганкеля. Вибір форми опису радіальної залежності потенціалів всередині шарів через функції Бесселя першого та другого роду або через функції Ганкеля, як це наведено у виразах (7) і (8), рівнозначний. У цій роботі застосована перша із вказаних двох форм.

Отже, функції та похідні, які входять до граничних умов (14)–(17), мають такий вигляд:

1) для центральної області [шару] ( $j=0, 0 \leq r \leq r_0$ ):

$$R_0^e(r) = G_0 J_n(k_0 r) \quad (22) \quad \frac{dR_0^e(r)}{dr} = k_0 G_0 J_n'(k_0 r) \quad (23)$$

$$R_0^m(r) = A_0 J_n(k_0 r) \quad (24) \quad \frac{dR_0^m(r)}{dr} = k_0 A_0 J_n'(k_0 r) \quad (25)$$

2) для  $j$ -го шару ( $j = \overline{1, l}, r_{j-1} \leq r \leq r_j$ ):

$$R_j^e(r) = G_j J_n(kr) + S_j N_n(kr) \quad (26) \quad \frac{dR_j^e(r)}{dr} = k_j [G_j J_n'(k_j r) + S_j N_n'(k_j r)] \quad (27)$$

$$R_j^m(r) = A_j J_n(kr) + B_j N_n(kr) \quad (28) \quad \frac{dR_j^m(r)}{dr} = k_j [A_j J_n'(k_j r) + B_j N_n'(k_j r)] \quad (29)$$

3) для зовнішньої області ( $j=l+1, r_l \leq r < \infty$ ):

$$R_{l+1}^e(r) = G_{l+1} H_n^{(p)}(k_{l+1} r) \quad (30) \quad \frac{dR_{l+1}^e(r)}{dr} = k_{l+1} G_{l+1} H_n^{(p)'}(k_{l+1} r) \quad (31)$$

$$R_{l+1}^m(r) = A_{l+1} H_n^{(p)}(k_{l+1} r) \quad (32) \quad \frac{dR_{l+1}^m(r)}{dr} = k_{l+1} A_{l+1} H_n^{(p)'}(k_{l+1} r) \quad (33)$$

4) для всіх шарів (областей) :

$$\Phi^e(j) = K \cos(nj) + L \sin(nj) \quad (34) \quad \frac{d\Phi^e}{dj} = n[-K \sin(nj) + L \cos(nj)] \quad (35)$$

$$\Phi^m(j) = C \cos(nj) + D \sin(nj) \quad (36) \quad \frac{d\Phi^m}{dj} = n[-K \sin(nj) + L \cos(nj)] \quad (37)$$

$$Z^e(z) = M \exp(-ik_z z) + P \exp(ik_z z) \quad (38) \quad \frac{dZ^e}{dz} = ik_z [-M \exp(-ik_z z) + P \exp(ik_z z)] \quad (39)$$

$$\frac{d^2 Z^e}{dz^2} = -k_z^2 Z^e \quad (40) \quad Z^m(z) = E \exp(-ik_z z) + F \exp(ik_z z) \quad (41)$$

$$\frac{dZ^m}{dz} = ik_z [-E \exp(-ik_z z) + F \exp(ik_z z)] \quad (42) \quad \frac{d^2 Z^m}{dz^2} = -k_z^2 Z^m \quad (43)$$

Підставивши отримані вирази для функцій та їх похідних у граничні умови (14)–(17), отримаємо:

1) для  $E_j$  при  $r = r_0$  :

$$\begin{aligned} & \frac{nk_z}{we^0} \frac{1}{r_0} \left\{ \frac{1}{e_0} G_0 J_n(k_0 r_0) - \frac{1}{e_1} [G_1 J_n(k_1 r_0) + S_1 N_n(k_1 r_0)] \right\} \cdot [-K \sin(nj) + L \cos(nj)] \times \\ & \times [-M \exp(-ik_z z) + P \exp(ik_z z)] + \{k_0 A_0 J'_n(k_0 r_0) - k_1 [A_1 J'_n(k_1 r_0) + B_1 N'_n(k_1 r_0)]\} \times \\ & \times [C \cos(nj) + D \sin(nj)] \cdot [E \exp(-ik_z z) + F \exp(ik_z z)] = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

2) для  $E_j$  при  $r = r_j$ ,  $j = \overline{1, l-1}$  :

$$\begin{aligned} & \frac{nk_z}{we^0} \frac{1}{r_j} \left\{ \frac{1}{e_j} [G_j J_n(k_j r_j) + S_j N_n(k_j r_j)] - \frac{1}{e_{j+1}} [G_{j+1} J_n(k_{j+1} r_j) + S_{j+1} N_n(k_{j+1} r_j)] \right\} \times \\ & \times [-K \sin(nj) + L \cos(nj)] \cdot [-M \exp(-ik_z z) + N \exp(ik_z z)] - \\ & - \{k_j [A_j J'_n(k_j r_j) + B_j N'_n(k_j r_j)] - k_{j+1} [A_{j+1} J'_n(k_{j+1} r_j) + B_{j+1} N'_n(k_{j+1} r_j)]\} \times \\ & \times [C \cos(nj) + D \sin(nj)] \cdot [E \exp(-ik_z z) + F \exp(ik_z z)] = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

3) для  $E_j$  при  $r = r_l$  :

$$\begin{aligned} & \frac{nk_z}{we^0} \frac{1}{r_l} \left\{ \frac{1}{e_l} [G_l J_n(k_l r_l) + S_l N_n(k_l r_l)] - \frac{1}{e_{l+1}} G_{l+1} H_n^{(p)}(k_{l+1} r_l) \right\} [-K \sin(nj) + L \cos(nj)] \times \\ & \times [-M \exp(-ik_z z) + P \exp(ik_z z)] + \left\{ k_l [A_l J'_n(k_l r_l) + B_l N'_n(k_l r_l)] - k_{l+1} A_{l+1} H_n^{(p)'}(k_{l+1} r_l) \right\} \times \\ & \times [C \cos(nj) + D \sin(nj)] \cdot [E \exp(-ik_z z) + F \exp(ik_z z)] = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

$$4) \text{ для } E_z \text{ при } r = r_0: \quad \frac{k_0^2}{e_0} G_0 J_n(k_0 r_0) - \frac{k_1^2}{e_1} [G_1 J_n(k_1 r_0) + S_1 N_n(k_1 r_0)] = 0 \quad (47)$$

5) для  $E_z$  при  $r = r_j$ ,  $j = \overline{1, l-1}$ :

$$\frac{k_j^2}{e_j} [G_j J_n(k_j r_j) + S_j N_n(k_j r_j)] - \frac{k_{j+1}^2}{e_{j+1}} [G_{j+1} J_n(k_{j+1} r_j) + S_{j+1} N_n(k_{j+1} r_j)] = 0 \quad (48)$$

$$6) \text{ для } E_z \text{ при } r = r_l: \quad \frac{k_l^2}{e_l} [G_l J_n(k_l r_l) + S_l N_n(k_l r_l)] - \frac{k_{l+1}^2}{e_{l+1}} G_{l+1} H_n^{(p)}(k_{l+1} r_l) = 0 \quad (49)$$

7) для  $H_j$  при  $r = r_0$  :

$$\begin{aligned} & \frac{nk_z}{\omega m^0} \frac{1}{r_0} \left\{ \frac{1}{m_0} A_0 J_n(k_0 r_0) - \frac{1}{m_1} [A_1 J_n(k_1 r_0) + B_1 N_n(k_1 r_0)] \right\} \cdot [-C \sin(nj) + D \cos(nj)] \times \\ & \times [-E \exp(-ik_z z) + F \exp(ik_z z)] + \{k_0 A_0 J'_n(k_0 r_0) - k_1 [A_1 J'_n(k_1 r_0) + B_1 N'_n(k_1 r_0)]\} \times \\ & \times [K \cos(nj) + L \sin(nj)] \cdot [M \exp(-ik_z z) + P \exp(ik_z z)] = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

8) для  $H_j$  при  $r = r_j$ ,  $j = \overline{1, l-1}$  :

$$\begin{aligned} & \frac{nk_z}{\omega m^0} \frac{1}{r_j} \left\{ \frac{1}{m_j} [A_j J_n(k_j r_j) + B_j N_n(k_j r_j)] - \frac{1}{m_{j+1}} [A_{j+1} J_n(k_{j+1} r_j) + B_{j+1} N_n(k_{j+1} r_j)] \right\} \times \\ & \times [-C \sin(nj) + D \cos(nj)] \cdot [-E \exp(-ik_z z) + F \exp(ik_z z)] - \\ & - \{k_j [G_j J'_n(k_j r_j) + S_j N'_n(k_j r_j)] - k_{j+1} [G_{j+1} J'_n(k_{j+1} r_j) + S_{j+1} N'_n(k_{j+1} r_j)]\} \times \\ & \times [K \cos(nj) + L \sin(nj)] \cdot [M \exp(-ik_z z) + P \exp(ik_z z)] = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

9) для  $H_j$  при  $r = r_l$  :

$$\begin{aligned} & \frac{nk_z}{\omega m^0} \frac{1}{r_l} \left\{ \frac{1}{m_l} [A_l J_n(k_l r_l) + B_l N_n(k_l r_l)] - \frac{1}{m_{l+1}} A_{l+1} H_n^{(p)}(k_{l+1} r_l) \right\} \cdot [-C \sin(nj) + D \cos(nj)] \times \\ & \times [-E \exp(-ik_z z) + F \exp(ik_z z)] + \left\{ k_l [G_l J'_n(k_l r_l) + S_l N'_n(k_l r_l)] - k_{l+1} G_{l+1} H_n^{(p)'}(k_{l+1} r_l) \right\} \times \\ & \times \left[ k_l [G_l J'_n(k_l r_l) + S_l N'_n(k_l r_l)] - k_{l+1} G_{l+1} H_n^{(p)'}(k_{l+1} r_l) \right] \cdot [M \exp(-ik_z z) + P \exp(ik_z z)] = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

$$10) \text{ для } H_z \text{ при } r = r_0 : \quad \frac{k_0^2}{m_0} A_0 J_n(k_0 r_0) - \frac{k_1^2}{m_1} [A_1 J_n(k_1 r_0) + B_1 N_n(k_1 r_0)] = 0 \quad (53)$$

11) для  $H_z$  при  $r = r_j$ ,  $j = \overline{1, l-1}$  :

$$\frac{k_j^2}{m_j} [A_j J_n(k_j r_j) + B_j N_n(k_j r_j)] - \frac{k_{j+1}^2}{m_{j+1}} [A_{j+1} J_n(k_{j+1} r_j) + B_{j+1} N_n(k_{j+1} r_j)] = 0 \quad (54)$$

$$12) \text{ для } H_z \text{ при } r = r_l : \quad \frac{k_l^2}{m_l} \left\{ [A_l J_n(k_l r_l) + B_l N_n(k_l r_l)] - \frac{k_{l+1}^2}{m_{l+1}} A_{l+1} H_n^{(p)}(k_{l+1} r_l) \right\} = 0. \quad (55)$$

### Узгодження полів на границях розділу шарів

Постановка електродинамічної задачі про знаходження дискретного спектра власних хвиль у багат шаровій циліндричній структурі привела до необхідності знаходження розв'язків системи рівнянь (44)–(55), яка описує поведінку компонент поля на границях шарів з врахуванням специфіки опису поля в центральній та зовнішній областях структури. Невідомими є повздовжнє хвильве число  $k_z$  і поперечні хвильові числа  $k_j$ , пов'язані з ним співвідношенням (13), та коефіцієнти  $A_j, B_j, G_j, S_j$  радіальних функцій, коефіцієнти  $C, D, K, L$  азимутальних функцій, коефіцієнти  $E, F, M, P$  аксіальних функцій. Визначення невідомих коефіцієнтів на підставі вказаних вище граничних умов дозволяє узгодити описи полів у різних шарах (середовищах) за їх значеннями на відповідних границях.

Тепер задача полягає у тому, щоб привести систему рівнянь (44)–(55) до вигляду, який дозволить знайти шукані розв'язки через окремі системи рівнянь для функцій  $R^{e,m}(r)$ ,  $\Phi^{e,m}(j)$ ,  $Z^{e,m}(z)$ . Система рівнянь (44)–(55) повинна мати розв'язки для всіх значень координат  $\varphi$  та  $z$ . Це можливе тільки за умов, що

$$\begin{bmatrix} \cos(nj) & \sin(nj) \\ -\sin(nj) & \cos(nj) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C-L \\ D+K \end{bmatrix} = 0, \quad (56) \quad \begin{bmatrix} \exp(-ik_z z) & \exp(+ik_z z) \\ \exp(-ik_z z) & -\exp(+ik_z z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E+M \\ F-P \end{bmatrix} = 0. \quad (57)$$

Співвідношення (56) і (57) визначають системи однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для визначення невідомих коефіцієнтів при азимутальних та аксіальних функціях. Оскільки детермінанти СЛАР (56) і (57) не дорівнюють нулю, то існують тільки тривіальні розв'язки, тобто шукані коефіцієнти задовільняють такі рівності:

$$C=L, D=-K, E=-M, F=P \quad (58)$$

При виконанні умов (58) вирази, які описують залежності від координат  $\varphi$  та  $z$  в рівняннях (44)–(47) та (50)–(52), скорочуються.

Отже, функції  $\Phi^e(j)$ ,  $Z^e(z)$ ,  $\Phi^m(j)$ ,  $Z^m(z)$  та похідні від них набувають такого вигляду:

$$\Phi^e = -D \cos(nj) + C \sin(nj) \quad (59) \quad \frac{d\Phi^e}{dj} = n \cdot [D \sin(nj) + C \cos(nj)] = n\Phi^m \quad (60)$$

$$\Phi^m = C \cos(nj) + D \sin(nj) \quad (61) \quad \frac{d\Phi^m}{dj} = n \cdot [-C \sin(nj) + D \cos(nj)] = -n\Phi^e \quad (62)$$

$$Z^e = -E \exp(-ik_z z) + F \exp(ik_z z) \quad (63) \quad \frac{dZ^e}{dz} = ik_z [E \exp(-ik_z z) + F \exp(ik_z z)] = ik_z Z^m \quad (64)$$

$$Z^m = E \exp(-ik_z z) + F \exp(ik_z z) \quad (65) \quad \frac{dZ^m}{dz} = ik_z \cdot [-E \exp(-ik_z z) + F \exp(ik_z z)] = ik_z Z^e \quad (66)$$

Співвідношення між коефіцієнтами, що входять у кожен із цих виразів, довільні. Тому, вибираючи відношення між коефіцієнтами  $C$  та  $D$ , можемо встановити потрібний вид поляризації хвилі, а відношенням між коефіцієнтами  $E$  та  $F$  – потрібне співвідношення між прямою та зворотною хвилями. Наголосимо, що істотним є співвідношення між вказаними коефіцієнтами, а не самі їх значення.

Після визначення коефіцієнтів при азимутальних та аксіальних функціях система рівнянь (45)–(54) зводиться до такого вигляду :

1) для  $E_j$  при  $r = r_0$  :

$$\frac{nk_z}{we^0} \frac{1}{r_0} \left\{ \frac{1}{e_0} G_0 J_n(k_0 r_0) - \frac{1}{e_1} [G_1 J_n(k_1 r_0) + S_1 N_n(k_1 r_0)] \right\} + \{k_0 A_0 J'_n(k_0 r_0) - k_1 [A_1 J'_n(k_1 r_0) + B_1 N'_n(k_1 r_0)]\} = 0 \quad (67)$$

2) для  $E_j$  при  $r = r_j$ ,  $j = \overline{1, l-1}$  :

$$\frac{nk_z}{we^0} \frac{1}{r_j} \left\{ \frac{1}{e_j} [G_j J_n(k_j r_j) + S_j N_n(k_j r_j)] - \frac{1}{e_{j+1}} [G_{j+1} J_n(k_{j+1} r_j) + S_{j+1} N_n(k_{j+1} r_j)] \right\} + \{k_j [A_j J'_n(k_j r_j) + B_j N'_n(k_j r_j)] - k_{j+1} [A_{j+1} J'_n(k_{j+1} r_j) + B_{j+1} N'_n(k_{j+1} r_j)]\} = 0 \quad (68)$$

3) для  $E_j$  при  $r = r_l$  :

$$\frac{nk_z}{we^0} \frac{1}{r_l} \left\{ \frac{1}{e_l} [G_l J_n(k_l r_l) + S_l N_n(k_l r_l)] - \frac{1}{e_{l+1}} G_{l+1} H_n^{(p)}(k_{l+1} r_l) \right\} + \{k_l [A_l J'_n(k_l r_l) + B_l N'_n(k_l r_l)] - k_{l+1} A_{l+1} H_n^{(p)'}(k_{l+1} r_l)\} = 0 \quad (69)$$

$$4) \text{ для } E_z \text{ при } r = r_0: \quad \frac{k_0^2}{e_0} G_0 J_n(k_0 r_0) - \frac{k_1^2}{e_1} [G_1 J_n(k_1 r_0) + S_1 N_n(k_1 r_0)] = 0 \quad (70)$$

5) для  $E_z$  при  $r = r_j$ ,  $j = \overline{1, l-1}$ :

$$\frac{k_j^2}{e_j} [G_j J_n(k_j r_j) + S_j N_n(k_j r_j)] - \frac{k_{j+1}^2}{e_{j+1}} [G_{j+1} J_n(k_{j+1} r_j) + S_{j+1} N_n(k_{j+1} r_j)] = 0 \quad (71)$$

$$6) \text{ для } E_z \text{ при } r = r_l: \quad \frac{k_l^2}{e_l} \left\{ [G_l J_n(k_l r_l) + S_l N_n(k_l r_l)] - \frac{k_{l+1}^2}{e_{l+1}} G_{l+1} H_n^{(p)}(k_{l+1} r_l) \right\} = 0 \quad (72)$$

7) для  $H_j$  при  $r = r_0$ :

$$\frac{nk_z}{\omega m^0} \frac{1}{r_0} \left\{ \frac{1}{m_0} A_0 J_n(k_0 r_0) - \frac{1}{m_1} [A_1 J_n(k_1 r_0) + B_1 N_n(k_1 r_0)] \right\} + \{k_0 A_0 J'_n(k_0 r_0) - k_1 [A_1 J'_n(k_1 r_0) + B_1 N'_n(k_1 r_0)]\} = 0 \quad (73)$$

8) для  $H_j$  при  $r = r_j$ ,  $j = \overline{1, l-1}$ :

$$\frac{nk_z}{\omega m^0} \frac{1}{r_j} \left\{ \frac{1}{m_j} [A_j J_n(k_j r_j) + B_j N_n(k_j r_j)] - \frac{1}{m_{j+1}} [A_{j+1} J_n(k_{j+1} r_j) + B_{j+1} N_n(k_{j+1} r_j)] \right\} + \{k_j [G_j J'_n(k_j r_j) + S_j N'_n(k_j r_j)] - k_{j+1} [G_{j+1} J'_n(k_{j+1} r_j) + S_{j+1} N'_n(k_{j+1} r_j)]\} = 0 \quad (74)$$

9) для  $H_j$  при  $r = r_l$ :

$$\frac{nk_z}{\omega m^0} \frac{1}{r_l} \left\{ \frac{1}{m_l} [A_l J_n(k_l r_l) + B_l N_n(k_l r_l)] - \frac{1}{m_{l+1}} A_{l+1} H_n^{(p)}(k_{l+1} r_l) \right\} + \left\{ k_l [G_l J'_n(k_l r_l) + S_l N'_n(k_l r_l)] - k_{l+1} G_{l+1} H_n^{(p)'}(k_{l+1} r_l) \right\} = 0 \quad (75)$$

10) для  $H_z$  при  $r = r_0$ :

$$\frac{k_0^2}{m_0} A_0 J_n(k_0 r_0) - \frac{k_1^2}{m_1} [A_1 J_n(k_1 r_0) + B_1 N_n(k_1 r_0)] = 0 \quad (76)$$

11) для  $H_z$  при  $r = r_j$ ,  $j = \overline{1, l-1}$ :

$$\frac{k_j^2}{m_j} [A_j J_n(k_j r_j) + B_j N_n(k_j r_j)] - \frac{k_{j+1}^2}{m_{j+1}} [A_{j+1} J_n(k_{j+1} r_j) + B_{j+1} N_n(k_{j+1} r_j)] = 0 \quad (77)$$

12) для  $H_z$  при  $r = r_l$ :

$$\frac{k_l^2}{m_l} \left\{ [A_l J_n(k_l r_l) + B_l N_n(k_l r_l)] - \frac{k_{l+1}^2}{m_{l+1}} A_{l+1} H_n^{(p)}(k_{l+1} r_l) \right\} = 0 \quad (78)$$

### Дисперсійне рівняння

Рівняння (67)–(78) разом з рівняннями (48) і (54) визначають однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для знаходження невідомих амплітудних коефіцієнтів при радіальних функціях  $R^e(r)$  та  $R^m(r)$ . Для однозначності термінів обумовимо, що надалі у цьому підрозділі терміном “невідомі” окреслені амплітудні коефіцієнти  $A_j, B_j, G_j, S_j$  ( $j = \overline{0, l+1}$ ), які утворюють



вектор невідомих у СЛАР, а терміном “коефіцієнти” – відповідні множники при них у рівняннях (48), (54), (67)–(76), з яких можна сформувати матрицю коефіцієнтів СЛАР.

Позначимо вказані коефіцієнти малими літерами відповідно до невідомих, на які вони домножуються. Тоді отримаємо такі вирази для коефіцієнтів СЛАР:

1) для невідомих  $A_j$  ( $j = \overline{0, l-1}$ ):

$$a'_{jj} = k_j J'_n(k_j r_j), \quad (79) \quad a'_{jj+1} = -k_{j+1} J'_n(k_{j+1} r_j), \quad (80)$$

$$a''_{jj} = \frac{k_j^2}{m_j} J_n(k_j r_j), \quad (81) \quad a''_{jj+1} = -\frac{k_{j+1}^2}{m_{j+1}} J_n(k_{j+1} r_j), \quad (82)$$

$$a^H_{jj} = \frac{nk_z}{wm^0} \frac{1}{r_j} \frac{1}{m_j} J_n(k_j r_j), \quad (83) \quad a^H_{jj+1} = -\frac{nk_z}{wm^0} \frac{1}{r_j} \frac{1}{m_{j+1}} J_n(k_{j+1} r_j), \quad (84)$$

2) для невідомих  $B_j$  ( $j = \overline{0, l-1}$ ):

$$b'_{jj} = k_j N'_n(k_j r_j), \quad (85) \quad b'_{jj+1} = -k_{j+1} N'_n(k_{j+1} r_j), \quad (86)$$

$$b''_{jj} = \frac{k_j^2}{m_j} N_n(k_j r_j), \quad (87) \quad b''_{jj+1} = -\frac{k_{j+1}^2}{m_{j+1}} N_n(k_{j+1} r_j), \quad (88)$$

$$b^H_{jj} = \frac{nk_z}{wm^0} \frac{1}{r_j} \frac{1}{m_j} N_n(k_j r_j), \quad (89) \quad b^H_{jj+1} = -\frac{nk_z}{wm^0} \frac{1}{r_j} \frac{1}{m_{j+1}} N_n(k_{j+1} r_j), \quad (90)$$

3) для невідомих  $G_j$  ( $j = \overline{0, l-1}$ ):

$$g^H_{jj} = \frac{nk_z}{we^0} \frac{1}{r_j} \frac{1}{e_j} J_n(k_j r_j), \quad (91) \quad g^H_{jj+1} = -\frac{nk_z}{we^0} \frac{1}{r_j} \frac{1}{e_{j+1}} J_n(k_{j+1} r_j), \quad (92)$$

$$g'_{jj} = k_j J'_n(k_j r_j), \quad (93) \quad g'_{jj+1} = -k_{j+1} J'_n(k_{j+1} r_j), \quad (94)$$

$$g''_{jj} = \frac{k_j^2}{e_j} J_n(k_j r_j), \quad (95) \quad g''_{jj+1} = -\frac{k_{j+1}^2}{e_{j+1}} J_n(k_{j+1} r_j), \quad (96)$$

4) для невідомих  $S_j$  ( $j = \overline{0, l-1}$ ):

$$s^H_{jj} = \frac{nk_z}{we^0} \frac{1}{r_j} \frac{1}{e_j} N_n(k_j r_j), \quad (97) \quad s^H_{jj+1} = -\frac{nk_z}{we^0} \frac{1}{r_j} \frac{1}{e_{j+1}} N_n(k_{j+1} r_j), \quad (98)$$

$$s'_{jj} = k_j N'_n(k_j r_j), \quad (99) \quad s'_{jj+1} = -k_{j+1} N'_n(k_{j+1} r_j), \quad (100)$$

$$s''_{jj} = \frac{k_j^2}{e_j} N_n(k_j r_j), \quad (101) \quad s''_{jj+1} = -\frac{k_{j+1}^2}{e_{j+1}} N_n(k_{j+1} r_j). \quad (102)$$

Зауважимо, що у СЛАР відсутні невідомі  $B_0, S_0$  та відповідні коефіцієнти  $b'_{00}, b''_{00}, b^H_{00}, s'_{00}, s''_{00}, s^H_{00}$ , а також невідомі  $B_{l+1}, S_{l+1}$  та їх коефіцієнти  $b'_{ll+1}, b''_{ll+1}, b^H_{ll+1}, s'_{ll+1}, s''_{ll+1}, s^H_{ll+1}$ . Коефіцієнти  $a'_{ll}, a''_{ll}, a^H_{ll}, b'_{ll}, b''_{ll}, b^H_{ll}, g'_{ll}, g''_{ll}, g^H_{ll}, s'_{ll}, s''_{ll}, s^H_{ll}$  можна обчислити за наведеними вище формулами при  $j=l$ . Нарешті, коефіцієнти при невідомих  $A_{l+1}, G_{l+1}$  згідно з рівняннями (46), (49), (52), (55) визначені такими формулами:

$$a'_{ll+1} = -k_{l+1} H_n^{(p)'}(k_{l+1} r_l), \quad (103) \quad g'_{ll+1} = -k_{l+1} H_n^{(p)'}(k_{j+1} r_l), \quad (104)$$

$$a''_{ll+1} = -\frac{k_{l+1}^2}{m_{l+1}} H_n^{(p)}(k_{l+1} r_l), \quad (105) \quad g''_{ll+1} = -\frac{k_{l+1}^2}{e_{l+1}} H_n^{(p)}(k_{l+1} r_l) \quad (106)$$



Отже, сформована однорідна СЛАР у формі (109) або (116) для знаходження невідомих амплітудних множників при радіальних функціях  $R^m(r)$  та  $R^e(r)$ . Квадратна матриця  $\mathbf{D}$  коефіцієнтів СЛАР для загального випадку гібридних хвиль має порядок  $4(l+1)$ , а для часткових випадків Н- та Е-хвиль ділиться на дві квадратні матриці  $\mathbf{D}_{11}$  та  $\mathbf{D}_{22}$ , кожна з яких має порядок  $2(l+1)$ . Як СЛАР (116) для гібридних хвиль, так і рівняння (117) і (118) для Н- та Е-хвиль мають нетривіальні розв'язки тільки в тих випадках, коли ранг відповідних матриць коефіцієнтів СЛАР є меншим від їх порядку.

На відміну від рівнянь (56) та (57), тривіальні (нульові) розв'язки для невідомих амплітудних коефіцієнтів при радіальних функціях  $R^m(r)$  та  $R^e(r)$  тут не становлять інтересу, бо, як видно з виразів (110)–(113), всі невідомі входять до СЛАР безпосередньо, а не у формі сум або різниць. Тому нульові розв'язки означали б відсутність поля в досліджуваній структурі.

Умову нетривіальності розв'язку однорідної СЛАР (116) можна сформулювати в довільній адекватній формі, наприклад, у класичному вигляді

$$\det \mathbf{D} = 0, \quad (119)$$

і вона зумовлює додаткове рівняння, яке накладає певні вимоги щодо конкретних значень коефіцієнтів СЛАР. У нашому випадку це рівняння дозволяє, наприклад, визначити повздовжнє хвильове число  $k_z$  у досліджуваній багат шаровій структурі. На підставі співвідношення (13) це визначає всі поперечні хвильові числа в структурі при відомих частоті та електромагнітних параметрах середовищ і, тим самим, коефіцієнти СЛАР. Тому рівняння, отримане на підставі умови (119) або іншої адекватної умови, є дисперсійним рівнянням багат шарової структури.

Після знаходження потрібних розв'язків дисперсійного рівняння можна обчислити невідомі амплітудні коефіцієнти вибраного конкретного розв'язку. Складові векторів поля в усіх шарах, центральній та зовнішній областях досліджуваної структури можна обчислити за формулами (7)–(12).

1. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Слоистые металлодиэлектрические волноводы. – М.: Радио и связь, 1988. 248 с. 2. Снайдер А., Лав Дж., Теория оптических волноводов. Пер. с. англ., – М.: – Радио и связь, 1987, 656 с. 3. А.Ф. Чаплин, М.И. Павликевич. Модовый анализ и конструктивный синтез плоских слоистых диэлектрических структур. Радиотехника и электроника. Т.37, №9, 1992. – С. 1629 – 1637. 4. Т. Tanaka, Y. Suematsu. An Exact Analysis of Cylindrical Fiber with Index Distribution by Matrix Method and Its Application to Focusing Fiber. PIEICE Trans., (1976–1990), Vol.E59,No.11. p.p. 1–8. 5. D M Shyroki, A V Lavrinenko. Dielectric multilayer waveguides for TE and TM mode matching. J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 5 (2003) p.p. 192–198. 6. M. Ibanescu, S. G. Johnson, M. Soljačić., J. D. Joannopoulos, Y. Fink. Analysis of mode structure in hollow dielectric waveguide fibers. Phys. Rev. E 67, 046608 (2003).