

ТЕОРІЯ КІЛ ТА ОБРОБКА СИГНАЛІВ

УДК 621.372.061

Ю.І. Шаповалов, Б.А. Мандзій, Д.Р. Бачик
Національний університет “Львівська політехніка”

ПРО ЗМЕНШЕННЯ ГРОМІЗДКОСТІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЛІНІЙНОГО ПАРАМЕТРИЧНОГО КОЛА

© Шаповалов Ю.І., Мандзій Б.А., Бачик Д.Р., 2014

Досліджено вплив вибору змінних диференціального рівняння, що описує лінійне параметричне коло у часовій області, на зменшення громіздкості такого рівняння. Запропоновано правила формування системи лінійних диференціальних рівнянь кола, що забезпечують її прийнятну громіздкість.

Ключові слова: лінійне параметричне коло, частотний символічний метод.

Yu.I. Shapovalov, B.A. Mandziy, D.R. Bachyk
Lviv Polytechnic National University

ABOUT THE DECREASE BULKINESS OF MATHEMATICAL MODEL OF LINEAR PERIODICALLY TIME-VARIABLE CIRCUIT

© Shapovalov Yu.I., Mandziy B.A., Bachyk D.R., 2014

In this paper are investigated the influence of variables the differential equation describing the linear periodically time-variable circuits in the time domain on decrease of bulkiness such equation. Rules of forming a system of linear differential equations of circuit that provide its acceptable bulkiness are proposed. Communication of voltages and currents on elements of an electric circuit looks like algebraic, differential and integral equations. As showed computer experiments, on the bulkiness of system of the equations, that describe in particular LPTV circuit and its further transformation in time domain, essentially influences presence of integrated expressions in this system. Since the input and output variables are usually given you must to choose such method of formation of system of equations, which would provide absence in it integral expressions. The first rule of formation of the system of equations of circuit is as follows: to provide absence the integral expressions in the system of equations describing a circle in the time domain, as variables in it need to choose the voltage on the capacitor and current in the inductor. One of the perspective methods of forming of equations is the tabular method. By the tabular method in system of equations as variables are selected nodal voltages, currents and voltages on the elements of the circuit, and the equations themselves may be formulated so that the integral expressions were absent. It follows the second rule of formation of system of differential equations which is as follows: in the absence of other requirements, mathematical model of circuit in the time domain advisable to form by the tabular method that provides absence the integral expressions in equations without additional action to remove them. In addition, the tabular method does not impose restrictions on the structure and elements of circuit. Under condition of performance of the presented two rules the system of the equations describing a circuit less bulky than without it. Normally in such systems variables which do not interest the researcher further are eliminated, and the equation in which there are only two variables is formed. Bulkiness of the last equation too can

be different, and it depends on what variables left in it. The third rule of forming a differential equation that describes a circle in the time domain and that provides acceptable bulkiness is as follows: despite the fact which variables of circuit is an output variables, in a mathematical model of circuit that was formed by a rule 2, we eliminate all variables, except what correspond to an input signal and a parametric element. If sources of input signal or parametric elements in the circuit a few then such equations necessary to form few - one for each pair of "input - parametric element." The differential equation that formed by the three rules using method L.A. Zadeh is transferred into the frequency domain and is solved by the frequency symbolic method. As a result we receive symbolic parametric transfer functions which are a basis for formation of a frequency symbolic model of each parametric element. Such models in turn are a basis for creation of frequency symbolic model of circuit as a whole. Such frequency symbolic model of circuit contains or determines output signals. Values of output signals of circuit may be are converted to the time domain.

Key words: linear periodically time-variable circuits, frequency symbolic method.

Вступ. Сьогодні моделювання та аналіз лінійних параметричних кіл за допомогою символічних методів є актуальним завданням [1, 2, 4]. Проте часто виникає проблема громіздкості символічних обчислень.

Основна частина. Зв'язок напруг та струмів на елементах електричного кола має вигляд алгебраїчних, диференціальних чи інтегральних рівнянь. Як показали комп'ютерні експерименти, на громіздкість системи рівнянь, що описує, зокрема, лінійне параметричне коло, та її подальше перетворення (наприклад, виключення внутрішніх змінних) у часовій області суттєво впливає наявність інтегральних виразів у цій системі. Оскільки вхідні та вихідні змінні зазвичай задані, то потрібно вибирати такий метод формування системи рівнянь, який би забезпечував відсутність у ній інтегральних виразів. Наприклад, якщо у колі є параметрична ємність, у системі рівнянь краще мати вираз $c(t) \cdot u_c'(t) + c'(t) \cdot u_c(t)$, а не $\frac{1}{c(t)} \int i_c(t) dt$, а якщо параметрична індуктивність – $L(t) \cdot i_L'(t) + L'(t) \cdot i_L(t)$, а не $\frac{1}{L(t)} \int u_L(t) dt$. Якщо ця умова не буде виконана, то наявні інтегральні вирази приводять до необхідності диференціювати окремі рівняння системи або усю систему. Це і призводить до зростання громіздкості результуючих виразів. Крім цього, треба пам'ятати, що безпосереднє диференціювання не завжди позбавляє систему рівнянь від інтегральних виразів. Так, диференціювання виразу $\frac{1}{c(t)} \int i_c(t) dt$ не приводить до зникнення інтеграла у ньому. В цьому випадку необхідно спочатку окремі рівняння помножити на $c(t)$ і тільки потім диференціювати. Якщо у колі є більше ніж один параметричний елемент, то необхідно помножити рівняння на спільний знаменник для усіх інтегральних виразів, а це додатково збільшує громіздкість рівнянь. Зрозуміло, що такі дії призводять до зростання громіздкості цих систем. Отже, можемо сформулювати перше правило формування системи рівнянь кола, яке забезпечує відсутність у ній інтегральних виразів.

Правило 1. Для забезпечення відсутності інтегральних виразів у системі рівнянь, що описує коло у часовій області, змінними у ній доцільно вибирати напруги на конденсаторах та струми в котушках індуктивності.

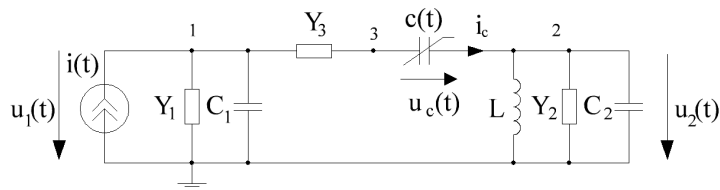
Проблема вибору змінних не така гостра, але існує і для резисторів. Якщо параметр резистора задано виразом для змінного опору $r(t)$, то резистор доцільно представити опором, і навпаки. Звідси впливає висновок про те, що задане коло доцільно подати системою рівнянь, яка б не обмежувала вибір змінних у розглянутому сенсі. Зрозуміло, що за методом вузлових напруг індуктивність завжди матиме вигляд інтегральної залежності. Одним з перспективних методів формування рівнянь, який забезпечує відсутність вказаних вище недоліків, є табличний метод [3].

За табличним методом у системі рівнянь змінними вибирають вузлові напруги, струми та напруги на елементах кола, а самі рівняння можуть бути складені так, щоб інтегральні вирази в них були відсутні. Останнє й забезпечить найменшу громіздкість та найбільшу простоту цих рівнянь. Більший порядок системи, складеної за табличним методом, зазвичай компенсується великою кількістю у відповідних матрицях нульових елементів. Звідси випливає друге правило формування системи диференціальних рівнянь, що описує коло у часовій області.

Правило 2. За відсутності інших вимог математичну модель кола у часовій області доцільно формувати табличним методом, який забезпечує відсутність у рівняннях інтегральних виразів без додаткових дій для їх усунення. Крім цього, табличний метод не накладає обмежень на структуру та елементи кола.

За умови виконання поданих двох правил сформована система рівнянь, що описує коло, менш громіздка, ніж без цього. Зазвичай у таких системах надалі виключають змінні, які не цікавлять дослідника, та формують рівняння, у яке входять тільки дві змінні. Громіздкість останнього рівняння теж може бути різною, і це залежить від того, які змінні залишені у ньому. Ця залежність суттєва. Покажемо це на прикладі.

Приклад. Оцінити громіздкість (об'єм комп'ютерної пам'яті для зберігання) усіх можливих диференціальних рівнянь, що отримані з системи рівнянь, яка складена за табличним методом, і які попарно зв'язують вхідний сигнал з іншими змінними параметричного балансного модулятора, наведеного на рис. 1.



*Рис.1. Параметричний балансний модулятор
 $i(t) = I_m \cdot \cos(\omega_c \cdot t + \phi)$, $c(t) = c_0 \cdot (1 + m \cdot \cos(\Omega \cdot t))$*

Для ілюстрації проблеми громіздкості диференціальних рівнянь лінійного параметричного кола на рис. 2 наведено об'єми диференціальних рівнянь параметричного балансного модулятора, що зв'язують вхідний сигнал з іншими змінними цього модулятора (темно-сірий фон). Для порівняння на цьому ж рисунку чорним позначено громіздкість диференціальних рівнянь тієї самої схеми, за умови, що параметр параметричного елемента $c(t)$ прийнято постійним.

Об'єм комп'ютерної пам'яті, байт

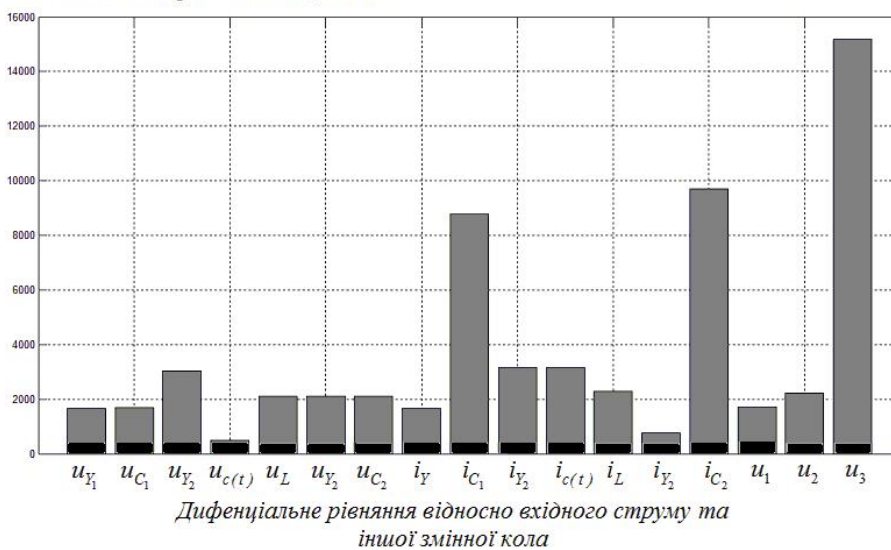


Рис.2. Порівняльна гістограма об'ємів диференціальних рівнянь у символічному вигляді, визначених з системи, що складена за табличним методом

Як бачимо, диференціальні рівняння параметричного кола істотно громіздкіші, ніж відповідні диференціальні рівняння цього ж кола з постійними параметрами. З рис. 2 також випливає, що громіздкість диференціальних рівнянь, що зв'язують вхідний сигнал $i(t)$ з іншими змінними параметричного балансного модулятора, на відміну від кола з постійними параметрами, є суттєво різною і відрізняється у 5–30 разів.

Рис. 2 переконує, а це підтверджується й експериментами, проведеними для інших лінійних параметричних кіл, що найменший об'єм пам'яті займає диференціальне рівняння, складене відносно вхідного сигналу та змінної, що належить параметричному елементу (за правилом 1 це напруга на параметричному конденсаторі чи струм у параметричній котушці). Отже, третє правило формування диференціального рівняння, що описує коло у часовій області й забезпечує його прийнятну громіздкість, таке:

Правило 3. Незважаючи на те, які змінні кола задано вихідними, у математичній моделі кола, що сформована за правилом 2, виключаємо усі змінні, крім тих, які відповідають вхідному сигналу та параметричному елементу. Якщо джерел вхідних сигналів чи параметричних елементів у колі декілька, то й таких рівнянь потрібно сформуувати декілька – по одному для кожної пари “вхід – параметричний елемент”.

Згідно з поданими правилами та рис. 2 параметричний балансний модулятор з рис. 1 описуємо диференціальним рівнянням, яке зв'язує вхідний струм $i(t)$ з напругою на параметричному конденсаторі $u_c(t)$. Це рівняння таке:

$$\begin{aligned} & [(Y_1 + Y_3) \frac{1}{L} c'(t) + \left(Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 + \frac{C_1}{L} \right) c''(t) + ((Y_1 + Y_3) C_2 + (Y_2 + Y_3) C_1) c'''(t) + C_1 C_2 c''''(t) + \\ & + Y_1 Y_3 \frac{1}{L} +] u_c(t) + \left[\left(Y_1 Y_2 + \frac{C_1}{L} \right) Y_3 + (Y_1 + Y_3) + \frac{1}{L} c(t) + 3((Y_1 + Y_3) C_2 + (Y_2 + Y_3) C_1) c''(t) + \right. \\ & + 2 \left(Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 + \frac{C_1}{L} \right) c'(t) + 4 C_1 C_2 c'''(t) \cdot u_c'(t) + [(Y_1 C_2 + Y_2 C_1) Y_3 + (Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 + \\ & + \frac{C_1}{L}) c(t) + 3((Y_1 + Y_3) C_2 + (Y_2 + Y_3) C_1) c'(t) + 6 C_1 C_2 c''(t) \cdot u_c''(t) + [Y_3 C_1 C_2 + ((Y_1 + Y_3) C_2 + (Y_2 + \\ & + Y_3) C_1) c(t) + 4 C_1 C_2 c'(t) \cdot u_c'''(t) + C_1 C_2 c(t) u_c''''(t) = \frac{1}{L} Y_3 i(t) + Y_3 Y_2 i'(t) + Y_3 C_2 i''(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Сформоване за поданими трьома правилами диференціальне рівняння (1) за методом Л.А. Заде переводиться у частотну область та розв'язується ЧС-методом [4, 5]. У результаті отримуємо символічні параметричні передавальні функції, які є основою для формування ЧС-моделі кожного параметричного елемента [5–7]. Такі ЧС-моделі, своєю чергою, є основою для побудови ЧС-моделі лінійного параметричного кола загалом [5–7]. ЧС-модель параметричного балансного модулятора зображено на рис. 3, а відповідна математична ЧС-модель, складена за методом вузлових напруг, є такою:

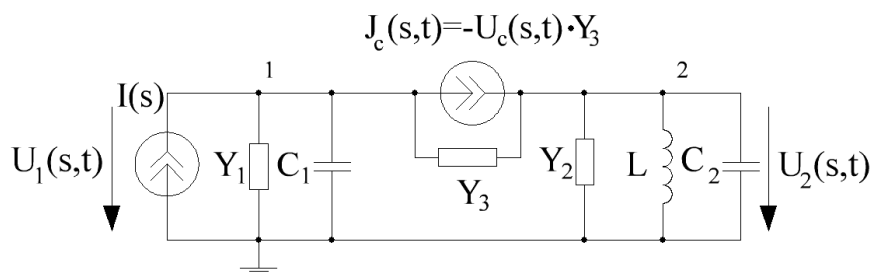


Рис. 3. Еквівалентна схема модулятора з рис. 1, у якому параметрична сміність замінена джерелом струму

$$\begin{bmatrix} (Y_1 + Y_3 + s_i C_1) & -Y_3 \\ -Y_3 & \left(Y_3 + Y_2 + s_i C_2 + \frac{1}{s_i L} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s,t) \\ U_2(s,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(s) - J_c(s,t) \\ + J_c(s,t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Така ЧС-модель у частотній області визначає усі вузлові напруги кола, за якими можна визначити задані вихідні та необхідні інші змінні кола. Так, наприклад, з ЧС моделі (2) параметрична передавальна функція $Z_2(s,t) = \frac{U(s,t)}{I(s)}$ має вигляд:

$$Z_2(s,t) = \frac{Y_3 - Z(s,t) \cdot Y_3 \cdot Y_1 - Z(s,t) \cdot Y_3 \cdot s_i C_1}{(s_i C_1 + Y_1) \cdot \left(Y_3 + Y_2 + s_i C_2 + \frac{1}{s_i L} \right) + Y_3 \left(Y_2 + s_i C_2 + \frac{1}{s_i L} \right)}, \quad (3)$$

де $Z(s,t)$ визначає частотну модель параметричної ємності $c(t)$ у вигляді незалежного джерела струму $J_c(s,t) = -Z(s,t) \cdot Y_3 \cdot I(s)$.

Висновки

1. Запропоновані правила 1 та 2 формування системи рівнянь лінійного параметричного кола забезпечують відсутність інтегральних виразів у ній та, як наслідок, дають можливість спрощення подальших обчислень.

2. За правилом 3 найменший об'єм пам'яті займає часове диференціальне рівняння, складене відносно вхідного сигналу та змінної, що належить параметричному елементу.

3. Задані вихідні змінні кола визначаються так:

а) за правилом 3 визначається диференціальне рівняння кола у часовій області;

б) за ним визначається функція передавання вхідного сигналу в сигнал на параметричному елементі;

в) формується частотна символна модель параметричного елемента;

г) на основі ЧС-моделі параметричного елемента формується (у частотній області) алгебраїчна частотна символна модель кола, яка містить чи визначає зображення заданих вихідних сигналів;

д) за частотною символною моделлю кола визначаються (у частотній області) необхідні передавальні функції та вихідні сигнали;

е) за необхідності значення вихідних сигналів кола переводяться у часову область.

1. Vanassche P. *Symbolic Modeling of Periodically Time-Varying Systems Using Harmonic Transfer Matrices* / P. Vanassche, G. Gielen, W. Sansen // *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*. – 2002. – Vol.21, No.29. – P. 1011–1024. 2. Vanassche P. *Systematic Modeling and Analysis of Telecom Frontends and their Building Blocks* / P. Vanassche, G. Gielen, W. Sansen // *Springer*. – 2005. – 230 p. 3. Петренко А. И. *Табличные методы анализа электронных схем* / А. И. Петренко, А. П. Тимченко, А.И. Власов – К.: Высшая школа, 1977. – 192 с. 4. Шаповалов Ю.И. *Розвиток теорії символного аналізу лінійних параметричних кіл у частотній області: дис. ... д-ра техн. наук: 05.09.05.* / Шаповалов Юрій Іванович. – Львів, 2012. – 413 с. 5. Shapovalov Yu. *The peculiarities of analysis of linear parametric circuit performed by frequency-symbolic method* / Yu. Shapovalov, B. Mandziy, S. Mankovsky // *Przeglad Elektrotechniczny*. – 2010. – Vol. 86, № 1. – P. 158–160. 6. Shapovalov Yu. *Frequency symbolic models of linear parametric circuits* / Yu. Shapovalov, B. Mandziy, D. Smal, J. Lipinski // *Przeglad Elektrotechniczny (Electrical Review)*. – 2012. – R. 88 NR, № 3a. – P. 52–54. 7. Shapovalov Yu. *The modified frequency symbolic models (FSMs) of linear periodically time-variable circuits* / Yu. Shapovalov, B. Mandziy, D. Smal // *Przeglad Elektrotechniczny (Electrical Review)*. – 2013. – R. 89 NR, № 2a. – P. 288–292.