

4. **Страке М.** Этиопатогенез пародонтальных заболеваний / М. Страке // Новое в стоматологии. – 2001 - №8(9) – С. 58-62

5. **Grbic JT** The future of periodontal diagnostic testing. // JT Grbic, SP Engelbreton / Dent Today. 2003 – Vol. 22(5) – P. 103-111.

6. **Лабораторные** методы исследования в клинике. Справочник / Под ред. В.В. Меньшикова, М.: Мед., 1987.- С.256-259

7. **Адамовская В. Г.** Взаимосвязь между уровнем протеиназ, их ингибированием и хозяйственно-полезными признаками зерна пшеницы / В. Г. Адамовская, А. П. Левицкий, С. В. Вовчук // Научно-техн. бюлл. ВСГИ. – 1988. – № 3 (37). – С. 25–30.

Надійшла 21.12.09.



УДК 539.3; 616.314

**Я. М. Григоренко, д. физ.-мат. н.,  
А. Я. Григоренко., д. физ.-мат. н.,  
Н. Н. Тормахов., к. техн. н.,  
П. С. Флис., д. мед. н., Ю. А. Тріль**

Институт механики НАН Украины им. С.П.Тимошенко  
Национальный медицинский университет  
им. А.А.Богомольца

### ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НАЛИЧИЯ МЕСТА ЗУБАМ В ЗУБНОЙ ДУГЕ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

*Предложена функция для определения длины зубной дуги в зависимости от ее размеров, формы зубов и их наклона к окклюзионной плоскости, которая позволяет прогнозировать наличие места для зубов в зубной дуге в процессе ортодонтического лечения. Приведен пример использования предложенной зависимости в процессе ортодонтического лечения.*

**Ключевые слова:** Длина зубной дуги, форма зубов, наклон зубов, место для зубов в зубной дуге, ортодонтическое лечение.

**Я. М. Григоренко, О. Я. Григоренко,  
М. М. Тормахов, П. С. Флис, Ю. О. Тріль**

Институт механіки НАН України ім. С. П. Тимошенко  
Національний медичний університет  
ім. О. О. Богомольца

### ПРОГНОЗУВАННЯ НАЯВНОСТІ МІСЦЯ ЗУБАМ В ЗУБНІЙ ДУЗІ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

*Отримана функція для визначення довжини зубної дуги в залежності від її розмірів, форми зубів та їх на-*

*хилу до оклюзійної площини, яка дозволяє прогнозувати наявність місця для зубів в зубній дузі в процесі ортодонтичного лікування. Наведено приклад використання запропонованої функції в процесі ортодонтичного лікування.*

**Ключові слова:** довжина зубної дуги, форма зубів, нахил зубів, місце для зубів в зубній дузі, ортодонтичне лікування.

**Ya. M. Grigorenko, A. Ya. Grigorenko,  
N. N. Tormakhov, P. S. Flis, Yu. A. Tril**

The Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine named  
after S. P. Timoshenko  
National Medical University named after  
A. A. Bogomolets

### PREDICTION OF A PLACE PRESENCE FOR TEETH IN A DENTAL ARC BY MEANS OF MATHEMATICAL MODELLING

*The function for the evaluation of the length of dental arch depending on its sizes, form of teeth and their inclination to the occlusion plane, which allows projecting the presence of space for teeth in dental arch during the orthodontic treatment, was offered. The example of the use of the offered dependency in orthodontic treatment is given.*

**Key words:** the length of dental arch, teeth form, inclination of teeth, space for teeth in dental arch, orthodontic treatment.

**Введение.** Одной из задач ортодонта является правильное формирование зубных дуг пациента, которые обеспечивают морфологическое и функциональное равновесие зубочелюстного аппарата и эстетическую гармонию лица в целом. Следовательно, врачи в своей практике часто сталкиваются с неправильными формами зубных рядов, влекущих за собой аномалии прикуса, положения зубов, с недостатком места для них в зубной дуге. Для планирования ортодонтического лечения необходимо еще до его начала прогнозировать возможность создания места для зубов в зубном ряду. Согласно методике оценки наличия места в зубном ряду предложенной N.Nance [1], его будет достаточно в том случае, когда длина зубной дуги  $L$  равно или больше суммы  $\sum_{i=1}^n c_i$  ширин коронок зубов  $c_i$ , входящих в зубной ряд:

$$L \geq \sum_{i=1}^n c_i, \quad (1)$$

где  $n$  – количество зубов в зубном ряду.

По N.Nance длину зубной дуги измеряют с помощью мягкой лигатуры или гибкой линейки, устанавливая их на середине жевательной повер-

хности боковых зубов и по режущим краям передних зубов. Однако в том случае, когда зубы прорезались вне зубной дуги, данная методика не позволяет определить ее длину. Кроме того, она не дает возможности спрогнозировать изменение длины зубной дуги при изменении ее размеров в трех взаимно перпендикулярных плоскостях.

В работе [2] была предложена методика, которая учитывает влияние протрузии (изменение положения оси зуба вестибулярно) или ретрузии (изменение положения оси зуба орально) передних зубов, на ширину и длину зубной дуги. Однако она никак не обоснована математически, носит фрагментарный характер и не учитывает такие параметры зубного ряда как торк зубов и их размеры.

В настоящее время в различных областях стоматологии все больше применяются методы механико-математического моделирования [3-6], которые позволяют не только более точно описать процессы лечения, но и прогнозировать его результаты.

**Цель данной работы.** Разработка математической модели определения дефицита места

в зубной дуге, учитывающей такие параметры зубного ряда как его размеры в сагитальных и трансверзальных направлениях, форму зубов и наличие их вестибулярно-орального наклона к окклюзионной плоскости.

Поставленная задача решается методами математического моделирования применительно к проблеме определения наличия места в зубной дуге.

**Материалы и методы исследования.** Соответственно поставленной цели было изучено и проанализировано 96 диагностических моделей пациентов с глубоким блокирующим прикусом в возрасте от 13 до 45 лет. Диагностика проводилась при помощи антропометрических измерений и математического моделирования. Изучались параметры зубных рядов в сагитальной, трансверзальной плоскости, форма зубов, высота положения межзубных контактных пунктов, угол наклона фронтальной группы зубов к окклюзионной плоскости. Обработка результатов проводилась при помощи разработанной нами компьютерной программы. Полученные данные выражали в графиках, заносили в таблицы.

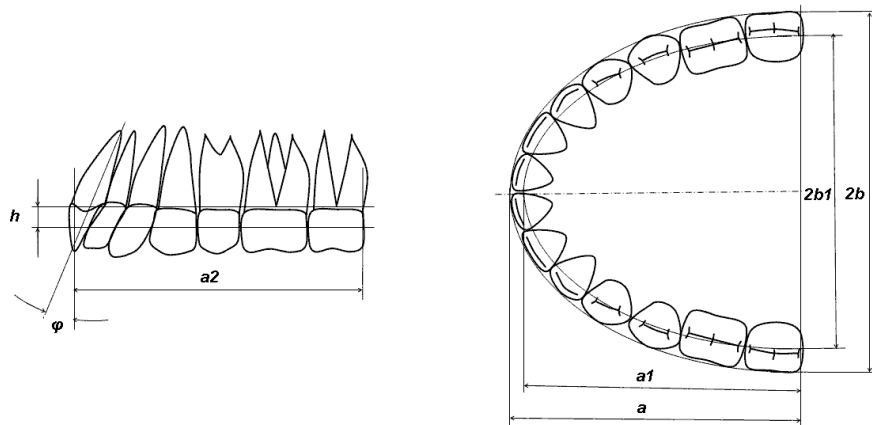


Рис. 1. Параметры зубной дуги при ортогнатическом прикусе.

**Результаты исследования и их обсуждение.** В работе [6] было установлено, что из всех кривых второго порядка эллипс наилучшим образом описывает форму внешних контуров зубного ряда верхней и нижней челюстей при ортогнатическом прикусе.

Каноническое уравнение эллипса имеет следующий вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2)$$

где  $a, b$  – полуоси эллипса.

На основе математической обработки результатов измерения размеров зубных дуг в [6] было показано, что отклонение точек вестибулярной поверхности зубов от кривой эллипса

(рис. 1) при ортогнатическом прикусе не превышают величины 2 мм. Также было показано, что в качестве величины малой полуоси  $b$  в (2) можно принимать половину расстояния между щечными поверхностями седьмых зубов (при отсутствии седьмых зубов можно принять расстояние между щечными поверхностями шестых зубов), а в качестве большой полуоси  $a$  можно принимать величину равную расстоянию от вестибулярной поверхности первых зубов (резцовой точки) до дистальной поверхности седьмых (при отсутствии седьмых – шестых) зубов.

Выводы, полученные в работе [6], позволяют нам предположить, что кривая эллипса наилучшим образом описывает форму внешних конту-

ров зубных рядов верхней и нижней челюстей на любом расстоянии от окклюзионной плоскости, а точки пересечения осей зубов с плоскостью параллельной окклюзионной плоскости и точки контакта зубов в зубном ряду для верхнего и нижнего зубных рядов также находятся на кривых, которые описываются уравнением (1). В таком случае оси коронок зубов на уровне их шеек будут расположены на эллипсе с полуосями  $a_1, b_1$ , равными

$$a_1 = a - \delta_1/2, b_1 = b - \delta_7/2, \tag{3}$$

где:  $\delta_1, \delta_7$  - толщина соответственно первых и седьмых зубов.

Контакт зубов в зубном ряду происходит, как правило, в межзубных контактных пунктах - в месте его наибольшей ширины, которая удалена от шейки зуба на расстоянии  $h$ . Если зубы имеют шипообразную форму, то межзубной контактный пункт будет находиться у шейки зуба и величина  $h$  в этом случае будет равна 0. Если он располагается у окклюзионной поверхности, то величина  $h$  будет равна высоте коронки зуба.

Оси зубов на переднем участке зубной дуги при ортогнатическом прикусе наклонены к окклюзионной плоскости под углом  $\varphi$ , который варьирует в пределах 15...25° [2, 7]. Учитывая это и сделанное выше предположение о том, что точки контакта зубов в зубном ряду будут располагаться на линии эллипса мы получим, что по-

луоиси этого эллипса будут равны  $a_2$  и  $b_1$ , где  $a_2$  равно:

$$a_2 = a_1 + htg\varphi. \tag{4}$$

В случае контакта зубов в зубном ряду по линии эллипса с полуосями равными  $a_2, b_1$ , места для зубов в зубном ряду будет достаточно в том случае, когда длина половины дуги эллипса с полуосями равными  $a_2, b_1$  будет больше суммы экваториальных ширин зубов  $\sum_{i=1}^n c_i$ . Длина дуги

эллипса  $L$  не выражается через элементарные формулы и может быть приблизительно определена по формуле [8]:

$$L = \pi(1,5(a_2 + b_1) - (a_2 b_1)^{0,5}) \tag{5}$$

Подставляя в условие достаточности места (1) выражения (4, 5) получим:

$$0,5\pi(1,5(a - \delta_1/2 + htg\varphi + b - \delta_7/2) - ((a - \delta_1/2 + htg\varphi)(b - \delta_7/2))^{0,5}) \geq \sum_{i=1}^n c_i. \tag{6}$$

Выражение (6) позволяет сделать оценку наличия места для зубов в зубном ряду в зависимости от размеров ширин  $c$  и толщин  $\delta$  зубов, высоты межзубного контактного пункта  $h$ , угла наклона зубов переднего участка зубной дуги  $\varphi$ , ширины и глубины зубного ряда  $a, b$ , определяемых на вестибулярной поверхности зубного ряда на уровне шейки зуба.

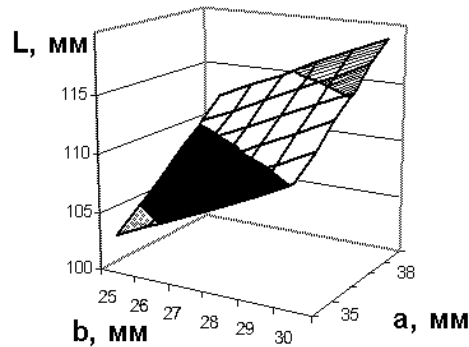


Рис. 2. График зависимости длины зубной дуги  $L$ , мм от ширины зубного ряда  $b$  и мезиодистального размера  $a$

Таблица 1

Длина зубной дуги  $L$ , мм  
в зависимости от глубины  $a$  и ширины  $b$  зубного ряда

		$b, \text{ мм}$					
		25	26	27	28	29	30
$a, \text{ мм}$	35	103,2	104,6	105,9	107,3	108,7	110,2
	36	104,9	106,3	107,7	109	110,4	111,9
	37	106,7	108	109,4	110,8	112,2	113,6
	38	108,4	109,8	111,1	112,5	113,9	115,3
	39	110,2	111,5	112,9	114,2	115,6	117
	40	112	113,3	114,6	116	117,3	118,7

На рис. 2 и в табл. 1 представлена зависимость длины дуги зубного ряда  $L$  в зависимости от величины  $a$  и ширины зубного ряда  $b$ , полученная на основе выражения (6). Глубина зубного ряда может быть изменена благодаря протрузии или ретрузии передних зубов, а величина  $b$  – изменением ширины зубного ряда. В расчетах по формуле (6) были приняты следующие значения величин, входящих в (6):  $\varphi = 20^\circ$ ,  $h = 6$  мм,  $\delta_1 = 4$  мм,  $\delta_7 = 9,7$  мм [1]. Из таблицы 1 и рис. 2 можно видеть, что зависимость длины зубного ряда  $L$  для заданных размеров зубов и зубного ряда практически линейно зависит от размеров зубного ряда  $a$  и  $b$  и увеличению ширины зубного ряда  $b$  на один миллиметр соответствует изменение длины зубного ряда на 1,4...1,5 мм, а увеличению глубины зубного ряда  $a$  на один миллиметр соответствует изменение длины зубного ряда на 1,7...1,8 мм.

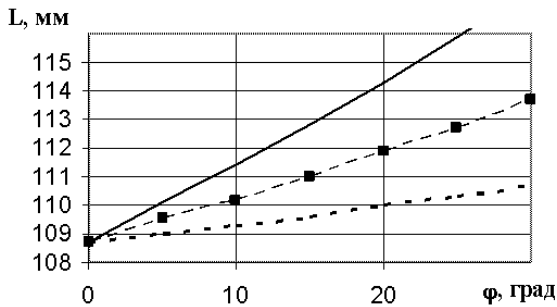


Рис. 3. График зависимости длины зубного ряда  $L$  от угла наклона передних зубов  $\varphi$ .

Таблица 2

**Длина зубной дуги  $L$ , мм в зависимости от высоты расположения межзубных контактных пунктов коронок зубов  $h$  и угла наклона передних зубов  $\varphi$**

φ, град	$h = 2$ мм	$h = 5$ мм	$h = 8,9$ мм
0	108,7	108,7	108,7
5	109	109,5	110,1
10	109,3	110,2	111,4
15	109,6	111	112,8
20	110	111,9	114,3
25	110,3	112,7	115,9
30	110,7	113,7	117,6

На рис. 3 и в табл. 2 дана зависимость длины дуги зубного ряда  $L$  от угла наклона передних зубов  $\varphi$  при трех величинах высоты расположения межзубных контактных пунктов коронок зубов  $h$ . В расчетах по соотношению (6) приняты следующие величины  $a = 43$  мм,  $b = 33$  мм,  $\delta_1 = 4$  мм,  $\delta_7 = 9,7$  мм. На рисунке 3 показаны зависимости  $L \sim \varphi$  для  $h$  равных 2, 5 и 8,9 мм, соответственно, сплошной, штриховой и

пунктирной линиями. Как можно видеть из графика 3 увеличение угла наклона передних зубов приводит к увеличению длины зубной дуги, но это увеличение зависит от высоты расположения межзубных контактных пунктов коронок зубов. Анализируя зависимость (6) можно сделать вывод, что в том случае, когда зуб имеет шипообразную форму ( $h = 0$ ), изменение угла наклона передних зубов не приводит к изменению длины зубной дуги. Из таблицы 2 видно, что увеличению угла наклона передних зубов на  $5^\circ$  соответствует увеличение длины зубной дуги на 0,3...0,4 мм при высоте  $h = 2$  мм. При высоте расположения межзубных контактных пунктов ( $h = 5$  мм) увеличению угла наклона передних зубов на  $5^\circ$  соответствует увеличение длины зубной дуги на 0,8...1 мм, а при величине  $h = 8,9$  мм (контактный пункт находится на уровне окклюзионной плоскости) увеличению угла наклона передних зубов на  $5^\circ$  соответствует увеличение длины зубной дуги на 1,4...1,7 мм.

Предложенная методика расчета наличия места была опробована в клинической практике. На рис. 4а показана форма зубной дуги верхней челюсти пациента с глубоким прикусом (блокирующей узкой формой), у которого диагностирован дефицит места для зубов в зубном ряду верхней челюсти. Передние зубы вследствие дефицита места имеют большой наклон в оральном направлении. Для размещения зубов в правильное положение возможно расширить зубную дугу, изменить ее глубину, удалить некоторые зубы из зубного ряда или изменить наклон передних зубов. Для оценки возможностей проведения такой перестройки по диагностическим гипсовым моделям были определены размеры параметров зубного ряда, которые показаны на рис. 4а. Измерения дали следующие результаты:  $a = 43$  мм,  $b = 30$  мм,  $\delta_1 = 5$  мм,  $\delta_7 = 10$  мм,  $c_{11} = 8,5$  мм,  $c_{12} = 6,5$  мм,  $c_{13} = 8$  мм,  $c_{14} = 7,2$  мм,  $c_{15} = 6,5$  мм,  $c_{16} = 10,8$  мм,  $c_{17} = 9,5$  мм,  $c_{21} = 8$  мм,  $c_{22} = 6,9$  мм,  $c_{23} = 8,1$  мм,  $c_{24} = 7,2$  мм,  $c_{25} = 7,1$  мм,  $c_{26} = 10,7$  мм,  $c_{27} = 9,2$  мм,  $\varphi = 0^\circ$ .

Сумма ширин зубов на уровне их меридиана  $\sum_{i=1}^n c_i$  дает величину 114,2 мм, то есть необходимо, чтобы длина зубной дуги была не меньше этой величины. Результаты расчета по формуле (6) показывают, что для выше приведенных значений  $a$ ,  $b$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_7$  и  $\varphi$  длина дуги составляет величину 104,3 мм, то есть дефицит места составляет величину 9,9 мм. Рассчитывая длину зубной дуги, варьируя величинами  $a$ ,  $b$ , и  $\varphi$  получаем, что для того, чтобы все имеющиеся зубы составили правильную форму зубного ряда необходимо осуществить протрузию передних зубов на 5

мм, (глубина зубной дуги составит величину  $a = 48$  мм), а угол наклона передних зубов  $\varphi = 15^\circ$ . В таком случае длина зубной дуги  $L$  будет равна 115 мм. На рис. 4а показан вид верхней зубной дуги пациента после соответствующего аппаратного лечения.



Рис. 4а. Гипсовые модели пациента с глубоким блокирующим прикусом (узкой формой) до лечения.



Рис. 4б. Гипсовые модели пациента после лечения.

**Выводы** В результате проведенных исследований получена зависимость, позволяющая определить длину зубной дуги в зависимости от ее размеров в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, формы зубов, а также их наклона к окклюзионной плоскости. Показано, что увеличение зубной дуги по сагитали на 1 мм при среднестатистических размерах зубов приводит к увеличению зубной дуги в среднем на 1,7 мм, а

увеличение ее ширины - к увеличению зубной дуги на 1,4 мм. Изменение наклона передних зубов приводит к увеличению зубной дуги только в том случае, если межзубные контактные точки коронок передних зубов расположены выше шеек зубов. Если зуб имеет шипообразную форму и его контактная точка расположена на уровне его шейки, то изменение угла наклона передних зубов не влияет на наличие места в зубной дуге. Чем ближе к окклюзионной поверхности зуба расположена  $h$  - тем больше увеличивается длина зубной дуги с увеличением вестибулярного наклона передних зубов. Полученная зависимость позволяет прогнозировать наличие места для зубов в зубной дуге и правильно строить процесс ортодонтического лечения.

### Список литературы

1. Головкин Н.В. Ортодонтия. Развитие прикуса, диагностика зубочелюстных аномалий, ортодонтический диагноз. - Полтава: ПФ «Форміка», 2003. - 296 с.
2. Нетцель Ф., Шульц К. Практическое руководство по ортодонтической диагностике. Анализ и таблицы для использования в практике. - Львов: ГалДент, 2006. - 176 с.
3. Григоренко Я.М., Неспрядько В.П., Топко П.П., Григоренко А.Я. О влиянии неравномерности напряженного состояния на оценку остаточной мощности периодонта зубов // Прикл. механика - 1996 - 32, №10.- С.67-73.
4. Григоренко А.Я., Джарбує М.М., Дорошенко С.И., Тормахов Н.Н., Флис П.С. Моделирование процесса расширения зубных дуг на основе ортодонтического устройства, оснащенного упругим элементом // Доповіді НАН України, 1999, N 2. - С. 74-78.
5. Григоренко О.Я., Дорошенко С.І., Жачко Н.І., Тормахов Н.Н., Фліс П.С. Моделювання процесу повороту зуба при апаратному лікуванні // Доповіді НАН України, 1999, N 2. - С. 74-78.
6. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я., Тормахов Н.Н., Флис П.С., Триль Ю.А. О форме зубных дуг при ортодонтической окклюзии // Доповіді НАН України (в печати)
7. Scuzzo G. Invisible orthodontics: current concepts and solutions in lingual orthodontics. - Berlin, Chicago, ... - Quintessence-Verl., 2003. - 170 с.
8. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. - М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. литры. - 1985. - 126 с.

Поступила 30.01.10.

