

УДК 519.6, 517.9

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ СТРУНЫ С УПРУГИМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ КОНЦОВ ДЛЯ УРОВНЕМЕРА НА ВЕРТИКАЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ

Дмитриенко Г. Н.

## NUMERICAL SOLUTION OF HYPERBOLIC EQUATION FOR A STRING WITH ELASTIC FASTENING ENDS FOR LEVEL METERS ON VERTICAL CYLINDRICAL TANK

Dmitrienko G. N.

*В работе рассмотрена задача, связанная с погрешностями, возникающими при колебаниях направляющей струны уровнемера, установленного на вертикальном наземном цилиндрическом резервуаре. Приведена постановка задачи, выписана разностная схема и система разностных уравнений для отыскания приближенного решения с помощью неявной схемы. Проведен расчет, определяющий положение стальной струны с упругим закреплением концов, выполненным с помощью пружин, прикрепленных к концам струны. Найдено решение на 25 временных слоях с числом разбиений по длине струны  $n=100$  для двух типов начальных условий и построены графики.*

**Ключевые слова:** цилиндрический резервуар, уравнение гиперболического типа, упругое закрепление концов струны, разностная схема, система трех диагонального вида, метод прогонки.

**Введение.** В работе рассмотрена задача, связанная с погрешностями, возникающими при колебаниях направляющей струны уровнемера, установленного на вертикальном наземном цилиндрическом резервуаре.

В качестве резервуара рассматривалась емкость с плавающей крышкой для хранения светлых продуктов нефтепереработки товарно-сырьевого парка НПЗ. Направляющая струна уровнемера крепится к дну резервуара. На рис.1. показана установка уровнемера УМ2 с плавающей крышкой.

Колебания направляющей струны уровнемера описываются с помощью волнового уравнения (уравнение гиперболического типа), которое является уравнением с частными производными. Для определенного класса задач существуют методы отыскания аналитического решения таких уравнений. Для решения более сложных задач используются приближенные методы, позволяющие получить решение на конечном множестве точек.

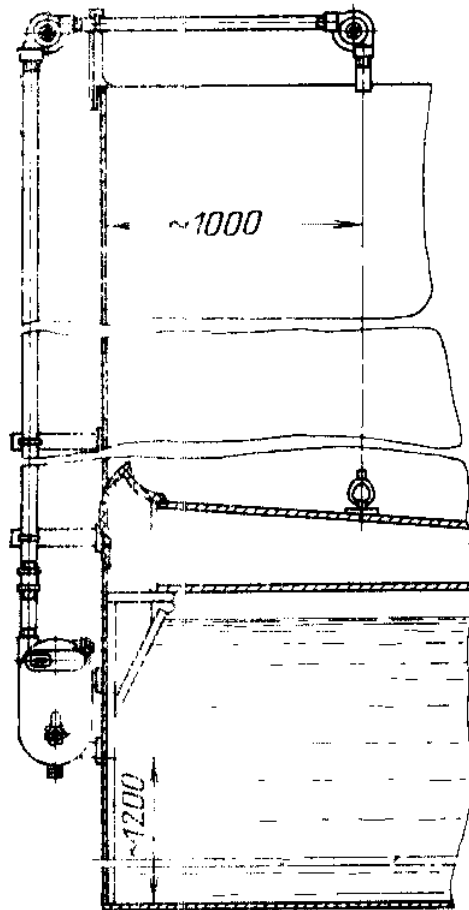


Рис.1. Установка уровнемера УМ2 с плавающей крышкой.

Анализ методов решения уравнений с частными производными приводится в [1]. Аналитическое решение уравнения гиперболического типа можно получить в виде разложения в ряд Фурье. Для приближенного решения исходное уравнение с частными производными сводится к системе разностных уравнений, которая решается численным методом. Численное решение гиперболических задач в

неограниченной области приводится в [3]. В работе [2] приведен расчет с помощью явной и неявной схем, определяющий положение точек струн с жестко закрепленными концами, изготовленных из различных материалов.

Целью работы являлось отыскание приближенного решения волнового уравнения для струны, концы которой упруго закреплены.

**Изложение основных материалов.** Уравнение смещения точек струны определялось волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (0 \leq x \leq L; 0 \leq t \leq T), \quad (1)$$

где  $u(x, t)$  – смещение точки с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $\alpha^2 = \frac{T}{\rho}$  ( $T$  – сила натяжения струны;  $\rho$  – линейная плотность материала).

Рассматривался процесс колебаний струны, концы которой упруго закреплены. Схема упругого закрепления изображена на рис.2.

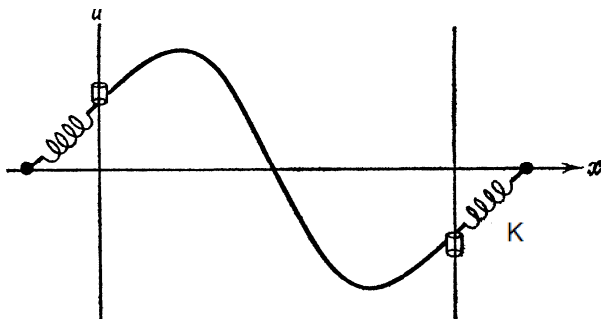


Рис.2 Упругое закрепление струны ( $k$ -коэффициент жесткости пружин).

Пружинки, прикрепленные к концам струны, создают вертикальные силы, пропорциональные смещениям концов:  $u(0, t)$  и  $u(L, t)$ .

Вертикальные усилия, создаваемые пружинками на левом и правом концах струны ( $T \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$  и  $-T \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$ ), с точностью до множителя  $k$  равны перемещениям. Тогда граничные условия приняли вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{k}{T} \cdot u(0, t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -\frac{k}{T} \cdot u(L, t) \quad (3)$$

Было рассмотрено численное решение волнового уравнения (1) с помощью неявной схемы для струны, сделанной из стали длиной  $L = 0,8 м.$ , концы которой упруго закреплены. Сила натяжения струны  $T = 100 кг$ , линейная плотность материала  $\rho = 7800 кг/м^3$ .

Граничные условия (2)-(3) определяли режим упругого закрепления концов струны. Закрепление

осуществлялось с помощью стальных пружинок, (коэффициент упругости пружинок  $k=200$ ).

Приближенное решение  $V_{i,j}$  строилось для двух типов начальных условий. Начальная скорость струны полагалась равной нулю.

Исследовался процесс колебаний струны в течение  $T = 10 сек$  с шагом по времени  $l = 0,4 сек$ , по длине струны был выбран шаг  $h = 0.008 м$ . Приближенное решение  $V_{i,j}$  рассчитывалось в узлах прямоугольной сетки:  $\omega_{h,l} = \{x_i, t_j\}_{i=1..n, j=1..m}$ , где  $n = 100$  – число разбиений по длине струны,  $m = 25$  – число разбиений по времени.

Было рассмотрено решение гиперболического уравнения с помощью неявной схемы.

Частные производные аппроксимировались разностными производными:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \sigma \cdot \frac{V_{i+1,j-1} - 2V_{i,j-1} + V_{i-1,j-1} + (1-2\sigma) \cdot \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i+1,j+1} - 2V_{i,j+1} + V_{i-1,j+1}}{h^2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) \approx \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{l^2}, \quad \text{где } \sigma = \frac{1}{3}.$$

Заменяя частные производные в уравнении (1) разностными, была получена трехслойная разностная схема.

$$\frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{l^2} = \alpha^2 \left( \sigma \cdot \frac{V_{i+1,j-1} - 2V_{i,j-1} + V_{i-1,j-1} + (1-2\sigma) \cdot \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i+1,j+1} - 2V_{i,j+1} + V_{i-1,j+1}}{h^2}} \right)$$

Шаблон разностной схемы приведен на рис.2

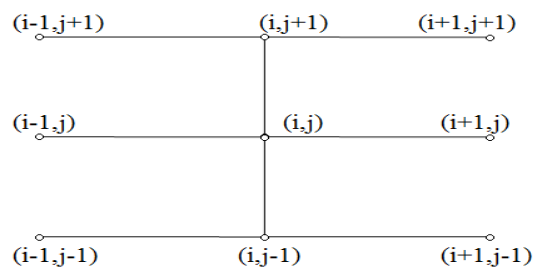


Рис.3. Шаблон трехслойной разностной схемы

Выражая значения на слое  $(j+1)$  и полагая

$$r = \frac{l^2 \alpha^2}{h^2}, \quad \text{получили уравнение для}$$

внутренних точек слоя  $(j+1)$ :

$$-\sigma \cdot V_{i-1,j+1} + (1+2\sigma) \cdot V_{i,j+1} - \sigma \cdot V_{i+1,j+1} = \sigma \cdot V_{i-1,j-1} - (1+2\sigma) \cdot V_{i,j-1} + \sigma \cdot V_{i+1,j-1} + (1-2\sigma)r \cdot V_{i-1,j} + 2(1-(1-2\sigma)r) \cdot V_{i,j} + (1-2\sigma)r \cdot V_{i+1,j} \quad (4)$$

Для левого конца струны аппроксимировали частную производную разностной производной:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_{j+1}) \approx \frac{V_{1,j+1} - V_{0,j+1}}{h}$$

Подставляя разностную производную в граничное условие (2), выразили

$$V_{0,j+1} = \frac{T \cdot V_{1,j+1}}{h \cdot k + T}$$

Подставив найденное значение в разностное уравнение (4) при  $i=0$ , получили первое уравнение системы.

$$\begin{aligned} V_{1,j+1} \cdot \left( \frac{-\sigma \cdot T}{h \cdot k + T} + 1 + 2\sigma r \right) - \sigma \cdot V_{2,j+1} &= \sigma \cdot V_{0,j-1} - \\ - (1 + 2\sigma) \cdot V_{1,j-1} + \sigma \cdot V_{2,j-1} + (1 - 2\sigma)r \cdot V_{0,j} + \\ + 2(1 - (1 - 2\sigma)r) \cdot V_{1,j} + (1 - 2\sigma)r \cdot V_{2,j} \end{aligned}$$

Для правого конца струны:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_n, t_{j+1}) \approx \frac{V_{n,j+1} - V_{n-1,j+1}}{h}$$

Подставляя разностную производную в граничное условие (3), выразили

$$V_{n,j+1} = \frac{T \cdot V_{n-1,j+1}}{h \cdot k + T} \quad (5)$$

Подставив (5) в разностное уравнение (4) при  $i=n$ , получили последнее уравнение системы.

$$\begin{aligned} -\sigma \cdot V_{n-2,j+1} + \left( \frac{-\sigma r \cdot T}{h \cdot k + T} + 1 + 2\sigma r \right) \cdot V_{n-1,j+1} &= \\ = \sigma \cdot V_{n-2,j-1} - (1 + 2\sigma) \cdot V_{n-1,j-1} + \sigma \cdot V_{n,j-1} + \\ + (1 - 2\sigma)r \cdot V_{n-2,j} + 2(1 - (1 - 2\sigma)r) \cdot V_{n-1,j} + \\ + (1 - 2\sigma)r \cdot V_{n,j} \end{aligned}$$

Для каждой внутренней точки слоя  $(j+1)$ , получили систему трех диагонального вида, содержащего  $(n-1)$  уравнение, которая была решена методом прогонки. Определяя значения в узлах сетки на каждом слое, получили численное решение на всем временном промежутке.

**Результаты исследований.** Было рассмотрено решение уравнения колебаний струны для начального условия, заданного в виде:

$$u(x,0) = \begin{cases} 0,1 \cdot x & \text{при } x < 0,2 \\ (0,04 - 0,1 \cdot x) & \text{при } 0,2 \leq x \leq 0,6 \\ 0,1 \cdot x - 0,08 & \text{при } 0,6 \leq x \leq 0,8 \end{cases}$$

На рис. 4.а. - 4.е. показано положение точек струны в моменты времени  $t = 0 \text{ сек}, t = 1,6 \text{ сек}, t = 3,2 \text{ сек}, t = 4,8 \text{ сек}, t = 6,4 \text{ сек}, t = 8 \text{ сек}, t = 10 \text{ сек}$ .

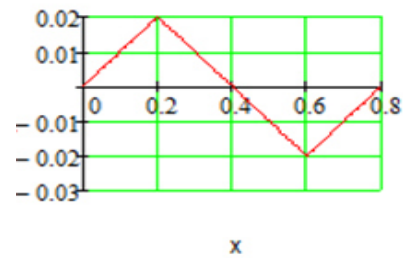


Рис.4.а. Положение струны в момент времени  $t=0$ сек.

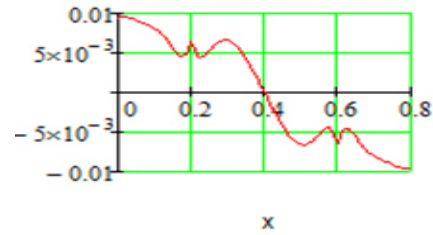


Рис.4.б. Положение струны в момент времени  $t=1,6$ сек.

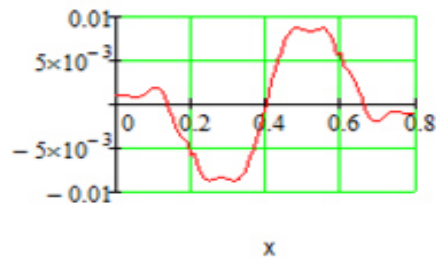


Рис.4.в. Положение струны в момент времени  $t=3,2$ сек.

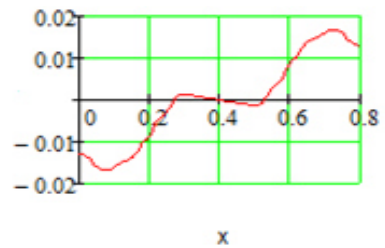


Рис.4.г. Положение струны в момент времени  $t=3,2$ сек.

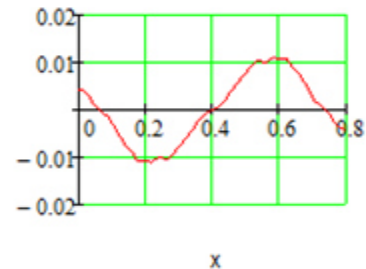


Рис.4.д. Положение струны в момент времени  $t=8$ сек.

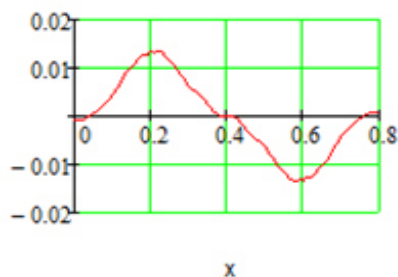


Рис.4.е. Положение струны в момент времени t=10сек.

На рис.5 показано положение точек струны, если смещение точек струны в нулевой момент времени, определялось формулой:

$$u(x,0) = \begin{cases} 0,1 \cdot x & \text{при } x < 0,4 \\ (0,08 - 0,1 \cdot x) & \text{при } x \geq 0,4 \end{cases}$$

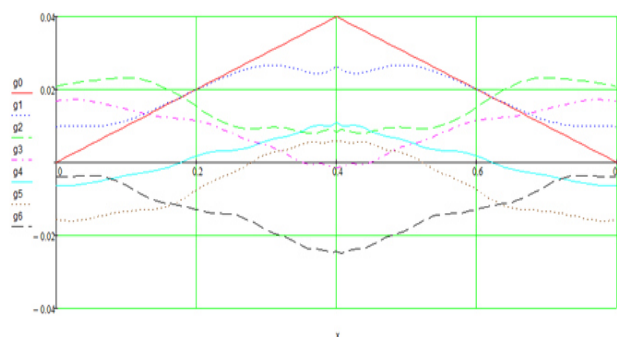


Рис.5 Положение точек струны в моменты времени t = 0 сек, t = 1,6 сек, t = 3,2 сек, t = 4,8 сек, t = 6,4 сек, t = 8 сек, t = 10 сек

**Выводы.** В работе приведена постановка задачи, определяющая процесс колебаний направляющей струны уровнемера, установленного на вертикальном наземном цилиндрическом резервуаре; разностная схема; система разностных уравнений для отыскания приближенного решения гиперболического уравнения с помощью неявной схемы. Была составлена программа, позволяющая с использованием системы Mathcad, найти решение волнового уравнения для стальной струны, концы которой упруго закреплены с помощью пружинок, на 25 временных слоях для двух типов начальных условий и построены графики.

#### Л и т е р а т у р а

1. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров : пер. с англ. / Фарлоу С. - М. : Мир, 1985. - 384 с.
2. Дмитриенко Г. Н. Численное решение гиперболического уравнения для струны с закрепленными концами / Дмитриенко Г. Н. // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля. – 2012. - №17 (188), ч. 1. - С. 189-194.
3. Альшин А. Б. Численное решение гиперболических задач в неограниченной области / А. Б. Альшин, Е. А. Альшина, Н. Н. Калиткин // Математическое моделирование. - 2004. - Т. 16, № 4. - С. 114-126.

#### References

1. Farlou S. Uravnenija s chastnymi proizvodnymi dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov : per. s angl. / Farlou S. - M. : Mir, 1985. - 384 s.
2. Dmitrienko G. N. Chislennoe reshenie giperbolicheskogo uravnenija dlja struny s zakreplennymi koncami / Dmitrienko G. N. // Visnik Shidnoukrains'kogo nacional'nogo universitetu im. V. Dalja. – 2012. - №17 (188), ch. 1. - S. 189-194.
3. Al'shin A. B. Chislennoe reshenie giperbolicheskikh zadach v neogranichennoj oblasti / A. B. Al'shin, E. A. Al'shina, N. N. Kalitkin // Matematicheskoe modelirovanie. - 2004. - T. 16, № 4. - S. 114-126.

**Дмитрієнко Г. М. Чисельне рішення рівняння гіперболічного типу для струни з пружним закріпленням кінців для рівнеміра на вертикальному циліндровому резервуарі**

У роботі розглянута задача, пов'язана з похибками, що виникають при коливаннях направляючої струни рівнеміра, встановленого на вертикальному наземному циліндричному резервуарі. Наведено постановку задачі, виписана різницева схема і система різницевих рівнянь для відшукування наближеного рішення гіперболічного рівняння з допомогою неявної схеми. Пророблений розрахунок, що визначає положення скрипкової сталевий струни з пружним закріпленням кінців, виконаним за допомогою пружинок, прикріплених до кінців струни. Знайдено рішення на 25 часових шарах з числом розбиття по довжині струни  $n = 100$  для двох типів початкових умов і побудовані графіки.

**Ключові слова:** рівняння гіперболічного типу, пружне закріплення кінців струни, різницева схема, система трьох діагонального виду, метод прогонки.

**Dmitrienko G. N. Numerical solution of hyperbolic equations for a string with elastic fastening ends for level meters on vertical cylindrical tanks**

The paper considers the problem associated with the errors that arise when the vibrations of string gauge level, which established on the vertical cylindrical tank In the work shows the problem statement, difference scheme and system of difference equations for approximation solutions hyperbolic equation. Implicit difference scheme was used for solutions to equation. Was made the calculator, that determines the position of the string, made of steel, with elastic fastening of the ends The solution was found on the 25 temporary layers with the number of partitions  $n = 100$  of the length of the string for the two types of initial conditions and was built the graphs.

**Keywords:** cylindrical tanks, hyperbolic equation, elastic fastening of the ends of the string, the difference scheme, a system of three diagonal form, the sweep method.

**Дмитрієнко Галина Миколаївна** – старший викладач кафедри вищої і прикладної математики, Технологічний інститут Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля (м. Северодонецьк). [dgn20051@yandex.ru](mailto:dgn20051@yandex.ru)

Рецензент: **Суворин О. В.** - д.т.н., доцент

Стаття подана 04.11.2013