

УДК 544.4, 542.7, 519,6

АНАЛИЗ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВЕЛИЧИНЫ ШАГОВ ПО ВРЕМЕНИ И КООРДИНАТЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ВИБРАЦИИ СТенок КАТАЛИТИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

Дмитриенко Г. Н.

ANALYSIS OF NUMERICAL SOLUTION OF WAVE EQUATION IN DEPENDING OF THE SIZE OF TIME STEP AND THE SIZE OF STEP ON COORDINATE AT RESEARCH OF VIBRATION THE WALLS IN THE CATALYTIC REACTOR

Dmitrienko G. N.

Продлан расчет, позволяющий проанализировать численное решение волнового уравнения в зависимости от величины шагов по времени, координате и от типа разностной схемы при исследовании вибрации стенок каталитического реактора. Была составлена программа, позволяющая найти приближенное решение с использованием явной и неявной схем для волнового уравнения, и построены графики.

Ключевые слова: каталитический реактор, уравнение гиперболического типа, разностная схема, численные методы, приближенное решение.

Введение. Большинство физических явлений могут быть описаны с помощью уравнений математической физики. Для решения сложных задач используются приближенные методы. В работе рассмотрены методы анализа вибрации стенок контактных аппаратов с фильтрующим слоем катализатора, используемых для очистки отходящих газов в химической промышленности, а именно при каталитической очистке газов.

Под очисткой газового потока понимают отделение от него или превращение в безвредную форму загрязняющих веществ, выбрасываемых в атмосферу вместе с газовым потоком. Эти обстоятельства обуславливают жесткие требования, предъявляемые к производственным выбросам в атмосферу. Основными путями борьбы с пылевыми выбросами в атмосферу должны оставаться совершенствование технологических процессов. Каталитическая очистка газов служит для превращения примесей либо в безвредные соединения, либо в соединения, легко удаляемые из газовой смеси. Обзор методов очистки и каталитических реакторов приводится в работе [4].

К аппаратам с фильтрующим слоем относятся емкостные, трубчатые и полочные аппараты, принцип действия которых основан на фильтрации газа через слой неподвижного катализатора (рис. 1).

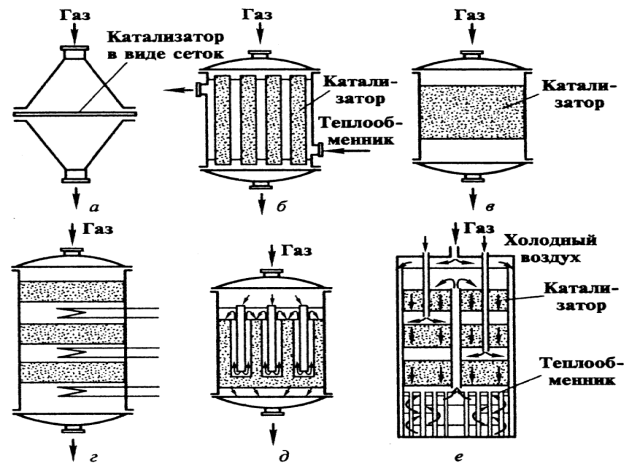


Рис. 1. Схемы контактных аппаратов с фильтрующим слоем катализатора:

а - контактный аппарат с катализатором в виде сеток; б - трубчатый контактный аппарат; в - контактный аппарат с перфорированными решетками; г - многослойный контактный аппарат; д - контактный аппарат с трубками Фильда; е - контактный аппарат с теплообменником

Процесс вибрации описывался с помощью волнового уравнения. Рассматривался одномерный случай.

В работе анализировалась зависимость приближенного решения волнового уравнения от величины шагов по времени, координате и от типа разностной схемы. Анализ методов решения уравнений математической физики приводится в [1]. В работе [2] приведен расчет, определяющий решение волнового уравнения для граничных условий 1-го рода с помощью явной и неявной схем.

Целью работы являлся анализ зависимости численного решения от величины шагов по времени, координате и от типа разностной схемы.

При использовании численных методов для решения уравнений математической физики, приближенное решение рассчитывается в узлах прямоугольной сетки: $\omega_{h,l} = \{x_i, t_j\}_{i=1..n, j=1..m}$, где n – число разбиений по длине, m – число разбиений по

времени, h, l – величины шагов по координате и времени, соответственно.

Было рассмотрено численное решение волнового уравнения для реактора, стенки которого изготовлены из стали ($\rho = 9000 \text{ кг/м}^3$ - линейная плотность материала).

Уравнение смещения точек описывалось волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (0 \leq x \leq L; \quad 0 \leq t \leq T),$$

где $u(x, t)$ – смещение точки с координатой x в момент времени t ;

Для отыскания решения было задано начальное условие – смещение точек в нулевой момент времени:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0,1 \cdot x & \text{при } x < 0,25 \\ (0,05 - 0,1 \cdot x) & \text{при } x \geq 0,25 \end{cases}$$

Начальная скорость точек полагалась равной нулю. Граничные условия: $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

Изложение основных материалов. Была рассмотрена зависимость приближенного решения от величины шага по координате при использовании неявной схемы.

Интервал по времени $T = 10 \text{ сек}$ был разбит на $m = 25$ частей с шагом $l = 0,4 \text{ сек}$. На рис.1-4 показано положение точек в моменты времени $t = 0 \text{ сек}, t = 1,6 \text{ сек}, t = 3,2 \text{ сек}$

$t = 4,8 \text{ сек}, t = 6,4 \text{ сек}, t = 8 \text{ сек}, t = 10 \text{ сек}$ при числе разбиений по длине струны $n = 100, n = 50, n = 20, n = 10$.

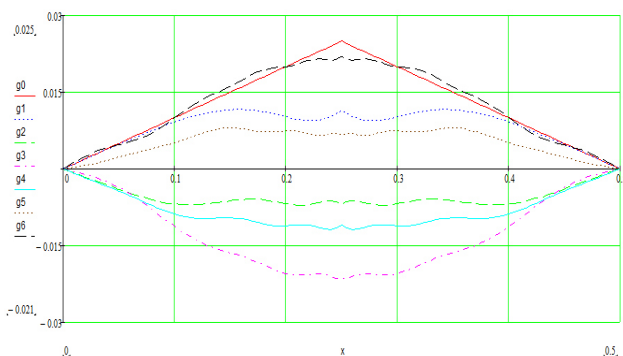


Рис.1. Положение точек при числе разбиений $n = 100$ (шаг $h = 0,005 \text{ м}$)

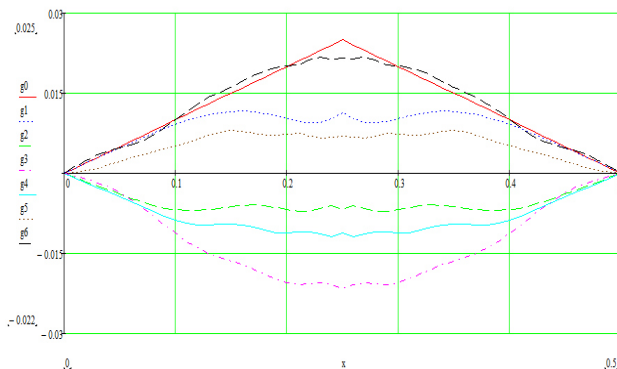


Рис.2. Положение точек при числе разбиений (шаг $h = 0,01 \text{ м}$)

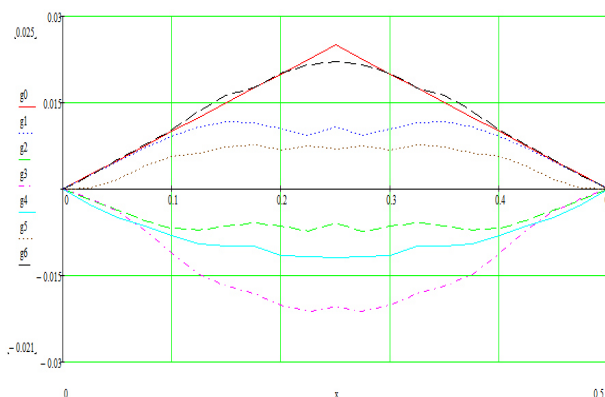


Рис.3. Положение точек при числе разбиений $n = 20$ (шаг $h = 0,025 \text{ м}$)

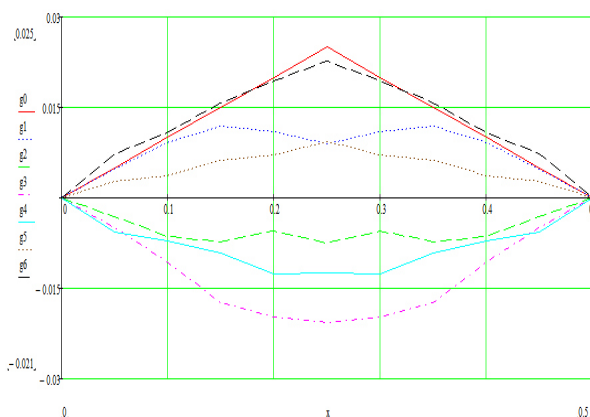


Рис.4. Положение точек при числе разбиений $n = 10$ (шаг $h = 0,05 \text{ м}$)

Результаты исследований. Как видно из рисунков положения точек в фиксированные моменты времени достаточно близки для числа разбиений $n = 100$ и $n = 50$. В таблице 1 приведены максимальные отклонения положения точек $u(x, t)$ в момент времени $t = 10 \text{ сек}$ при числе разбиений по длине струны $n = 50, n = 40, n = 20, n = 10$ от

положения точек струны при числе разбиений $n = 100$.

Таблица 1

Число разб. (n)	10	20	40	50
Макс. отклон. (м)	0,0026	0,00034	0,00012	0,00007
Отношение (%)	10,58	1,59	0,485	0,279

Разностная схема аппроксимирует волновое уравнение со вторым порядком точности относительно шага по координате. Из таблицы 1 видно, что с увеличением числа разбиений (уменьшением шага по координате) уменьшается максимальное отклонение положения точек от положения точек при числе разбиений $n=100$. В третьей строке таблицы приведены отношения максимальных отклонений для различного числа разбиений к максимальному отклонению точек в начальный момент времени от положения покоя.

Была рассмотрена зависимость приближенного решения от величины шага по времени при использовании неявной схемы.

Были проведены расчеты с использованием неявной схемы для решения волнового уравнения при числе разбиений по времени $m = 5, m = 10, m = 12, m = 20, m = 25$. Интервал по длине струны был разбит на $n=100$ частей с шагом разбиения $h=0,005$ м.

На рис.1 и рис.5 показано положение точек в моменты времени $t = 0$ сек, $t = 1,6$ сек, $t = 3,2$ сек

$t = 4,8$ сек, $t = 6,4$ сек, $t = 8$ сек, $t = 10$ сек при числе разбиений по времени $m = 25, m = 12$.

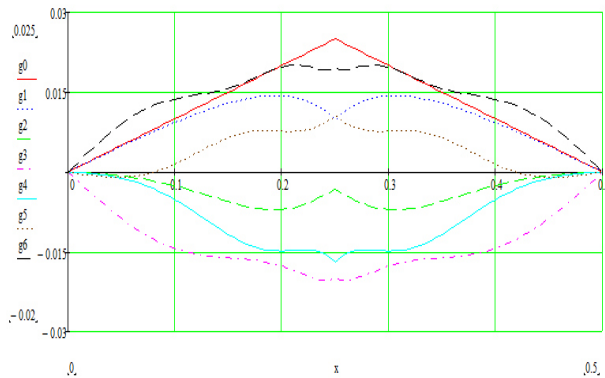


Рис.5. Положение точек при числе разбиений по времени $m = 12$ с шагом разбиения $l = 0,833$ сек

На рис.6 показано положение точек в момент времени $t = 10$ сек при числе разбиений по времени $m = 25$ с шагом $l = 0,4$ сек и числе разбиений $m = 12$ с шагом $l = 0,833$ сек.

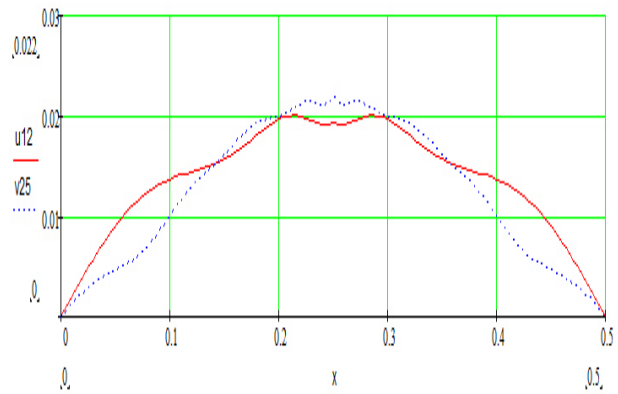


Рис.6. Положение точек при числе разбиений $m = 25$ и $m = 12$

Результаты исследований. В таблице 2 приведены максимальные отклонения положения точек струны $u(x, t)$ в момент времени $t = 10$ сек при числе разбиений по времени $m = 5, m = 10, m = 12, m = 20, m = 25$ от положения точек струны при числе разбиений $m = 25$.

Таблица 2

Число разб. (n)	5	10	12	20
Макс. отклон. (м)	0,0175	0,00167	0,00087	0,0006
Отношение (%)	69,8	6,68	3,48	2,39

Разностная схема аппроксимирует волновое уравнение со вторым порядком точности относительно шага по времени. Из таблицы 2 видно, что с увеличением числа разбиений (уменьшением шага по времени) уменьшается максимальное отклонение положения точек от положения точек при числе разбиений $m = 25$.

Была рассмотрена зависимость приближенного решения от типа разностной схемы.

Явная схема является относительно устойчивой, поэтому она используется при выполнении условия, связывающего шаг по времени

с шагом по координате $l = \frac{h}{\sqrt{\alpha^2}}$. Были проведены

расчеты с использованием явной схемы для решения волнового уравнения. Интервал по длине был разбит на $n = 10$ частей с шагом разбиения $h = 0,05$ м. Интервал по времени $t = 10$ сек был разбит на $m = 25$ частей с шагом $l = 0,4$ сек.

На рис.7 показано положение точек в моменты времени $t = 0$ сек, $t = 1,6$ сек, $t = 3,2$ сек

$t = 4,8$ сек, $t = 6,4$ сек, $t = 8$ сек, $t = 10$ сек.

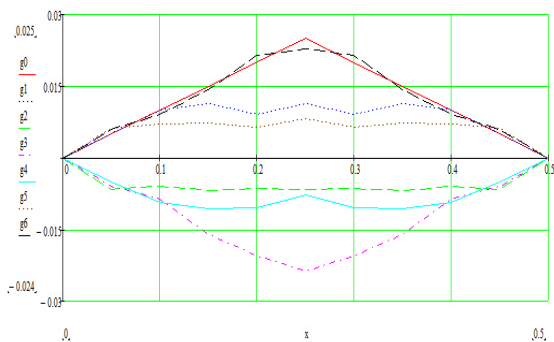


Рис. 7. Положение точек, построенных с помощью явной схемы

На рис.8 показано положение точек струны в момент времени $t = 10 \text{сек}$ при числе разбиений по времени $m = 25$ с шагом $l = 0,4 \text{сек}$ и числе разбиений по длине струны $n = 10$, с шагом $h = 0,05 \text{м}$, построенных с помощью явной и неявной схем.

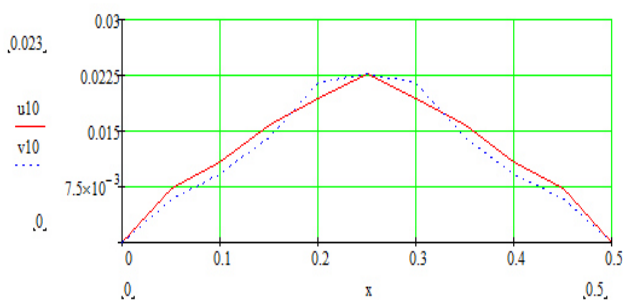


Рис.8. Положение точек, построенных с помощью явной и неявной схем

Сравнивая приближенные решения, построенные с помощью явной и неявной схем, получили, что максимальное отклонение смещения точек струны равно $0,002073 \text{м}$. (8,12%).

На рис.9 показано положение точек струны при числе разбиений по длине струны $n = 100$ в момент времени $t = 10 \text{сек}$; при числе разбиений по времени $m = 25$ с шагом $l = 0,4 \text{сек}$ для неявной схемы и при числе разбиений по времени $m = 210$ с шагом $l = 0,047 \text{сек}$ - для явной схемы

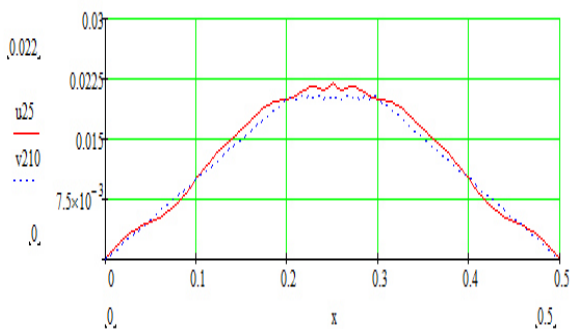


Рис.9. Положение точек, построенных с помощью явной схемы ($m = 210$) и неявной схемы ($m = 25$).

Шаг по времени для явной схемы определялся из условия: $l = \frac{h}{\sqrt{\alpha^2}}$.

Результаты исследований. Сравнивая приближенные решения, построенные с помощью явной и неявной схем, получили, что максимальное отклонение смещения точек $u(x, t)$ в момент времени $t = 10 \text{сек}$ равно $0,001933 \text{м}$. (7,73%).

Таким образом, для выполнения условия $l = \frac{h}{\sqrt{\alpha^2}}$ при малом шаге по координате,

необходимо выбирать малый шаг по времени, что не позволяет вести расчеты на больших временных интервалах. Если условие не выполнено, то это приводит к неограниченному возрастанию амплитуды колебаний.

Выводы. В работе приведена постановка задачи для отыскания приближенного решения гиперболического уравнения. Была составлена программа, позволяющая найти приближенное решение с использованием явной и неявной схем для волнового уравнения, с помощью которого был сделан анализ зависимости численного решения от величины шагов по времени, координате и от типа разностной схемы и построены графики.

На рис.1 - 4 представлены графики, определяющие положение точек в зависимости от величины шага по координате при использовании неявной схемы ($h = 0,005 \text{м}$, $h = 0,01 \text{м}$, $h = 0,02 \text{м}$, $h = 0,05 \text{м}$).

На рис.6 показано для сравнения положение точек в момент времени $t = 10 \text{сек}$ при числе разбиений по времени $m = 25$ и $m = 12$.

На рис.8- 9 показано для сравнения положение точек в момент времени $t = 10 \text{сек}$, построенных с помощью явной и неявной схем.

Л и т е р а т у р а

1. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров : пер. с англ. / Фарлоу С. - М. : Мир, 1985. - 384 с.
2. Дмитриенко Г. Н. Численное решение гиперболического уравнения для струны с закрепленными концами / Дмитриенко Г. Н. // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля. - 2012. - №17 (188), ч. 1. - С. 189-194.
3. Альшин А. Б. Численное решение гиперболических задач в неограниченной области / А. Б. Альшин, Е. А. Альшина, Н. Н. Калиткин // Математическое моделирование. - 2004. - Т. 16, № 4. - С. 114-126.
4. Тропкина Г. Н. Каталитическая очистка отходящих газов производства фенолов / Тропкина Г. Н. [и др.] // Химическая промышленность / - 1974. - № 5. - С. 347.

References

1. Farlou S. Uravnenija s chastnymi proizvodnymi dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov : per. s angl. / Farlou S. - M. : Mir, 1985. - 384 s.
2. Dmitrienko G. N. Chislennoe reshenie giperbolicheskogo uravnenija dlja struny s zakreplennymi koncami /

- Dmitrienko G. N. // Visnik Shidnoukraïns'kogo nacional'nogo universitetu im. V. Dalja. – 2012. - №17 (188), ch. 1. - S. 189-194.
- Al'shin A. B. Chislennoe reshenie giperbolicheskikh zadach v neogranichennoj oblasti / A. B. Al'shin, E. A. Al'shina, N. N. Kalitkin // Matematicheskoe modelirovanie. - 2004. - T. 16, № 4. - S. 114-126.
 - Tropkina G. N. Kataliticheskaja ochildka othodjashhih gazov proizvodstva fenolov / Tropkina G. N. [i dr.] // Himicheskaja promyshlennost. - 1974. - № 5. – S. 347.

Дмитрієнко Г. М. Аналіз наближеного рішення рівняння коливань струни в залежності від величини кроків за часом та координаті при дослідженні вібрації стінок каталітичного реактора

Виконано розрахунок, що дозволяє проаналізувати чисельне рішення хвильового рівняння в залежності від величини кроків за часом, координаті і від типу різницевої схеми при дослідженні вібрації стінок каталітичного реактора. Була складена програма, що дозволяє знайти наближене рішення з використанням явної і неявної схем для хвильового рівняння, і побудовані графіки.

Ключові слова: каталітичний реактор, рівняння гіперболічного типу, різницева схема, чисельні методи, наближене рішення.

Dmitrienko G. N. Analysis of numerical solution of wave equation in depending of the size of time step and the size of step on coordinate at research of vibration the walls in the catalytic reactor

Was made the calculation, which allowed to analyze the dependence of the numerical solution of the string vibration, depending on the size of time step, on the size of coordinate step and on the type of difference scheme at research of vibrations the walls in the catalytic reactor. Program was compiled, which allowed to find an approximate solution using explicit and implicit schemes for the wave equation, and graphs have been constructed.

Keywords: catalytic reactor hyperbolic equation, the difference scheme, numerical methods, approximate solution

Дмитрієнко Галина Миколаївна – старший викладач кафедри вищої і прикладної математики, Технологічний інститут Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля (м. Сєвєродонецьк). dgn20051@yandex.ru

Рецензент: Суворин О. В. - д.т.н., доцент

Стаття подана 04.11.2013