

УДК 004.383.3: 004.056.4

АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДУ КОДУВАННЯ НА ОСНОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В БАЗИСІ ФУНКЦІЙ ГАЛУА

Превисокова Н.В.

ANALYSIS OF EFFICIENCY THE CODING METHOD ON THE GALOIS FUNCTIONS TRANSFORM BASE

Prevysokova N.

Запропоновано метод кодування одновимірних інформаційних потоків у комп'ютерних системах на основі дискретного ортогонального перетворення в базисі функцій Галуа. Визначено ефективність застосування даного методу і здійснено порівняльний аналіз із методами кодування на основі перетворень Уолша-Адамара та Хаара.

Ключові слова: кодування на основі перетворення, дискретне ортогональне перетворення, імпульсно-кодова модуляція, функції Галуа.

Вступ. Сучасний етап функціонування комп'ютерних систем характеризується зростанням обсягів інформаційних потоків, що зумовлює необхідність підвищення швидкості та ефективності реалізації функцій перетворення форми та обробки інформації [1 – 4]. Основними видами обробки сигналів у розподілених комп'ютерних системах при передаванні між комп'ютерами, давачами й іншими складовими є аналого-цифрове та цифро-аналогове перетворення, кодування, декодування, стискання, модуляція, демодуляція [1, 3, 4].

Серед методів цифрового кодування сигналів поширеними є імпульсно-кодова модуляція, диференціальна імпульсно-кодова модуляція, дельта-модуляція, кодування на основі перетворення. Для цифрової обробки та передавання сигналів у системах із класичною імпульсно-ковою модуляцією необхідно забезпечити високу швидкість передавання. До ефективних методів кодування, які дозволяють зменшити дану швидкість і базуються на зменшенні надлишковості інформації, належить кодування на основі перетворення [1, 2, 4].

Кодування на основі перетворення істотно відрізняється від інших методів об'єктом кодування, який є не сигналом, а множиною коефіцієнтів перетворення сигналу [1, 2, 4]. Даний метод базується на застосуванні деякого ортогонального перетворення сигналу із часової області в частотну з метою зменшення статистичної надлишковості при передаванні. Кодування на основі перетворення містить наступні етапи: застосування перетворення до вхідного сигналу, екстракція одержаних коефіцієнтів перетворення, їх квантування і

кодування, передавання та приймання квантованих коефіцієнтів, виконання оберненого перетворення.

У методах кодування на основі перетворення використовуються дискретні перетворення Фур'є, Уолша-Адамара, Хаара, Карунена-Лоева [1 – 5]. Результатом перетворення Фур'є є комплексні коефіцієнти із порівняно малими значеннями, перетворення Уолша-Адамара та Хаара мають ефективні швидкі алгоритми обчислень, але не забезпечують мінімальної похибки відновлення сигналу [2, 4]. Мінімальну середньоквадратичну похибку забезпечує перетворення Карунена-Лоева, водночас дане перетворення вимагає відомих статистичних характеристик інформаційного потоку [1 – 5]. У роботі [6] означено дискретне ортогональне перетворення Галуа і досліджено його ефективність в задачах зменшення надлишковості, проте не проводилось дослідження методу кодування на основі даного перетворення.

Ефективність кодування на основі перетворення визначається базисом перетворення [4]. Відомі базиси не забезпечують оптимального розв'язку задачі кодування, що зумовлює необхідність дослідження та вибору базису на основі аналізу властивостей перетворень, зокрема перетворення Галуа, та їх співставлення за різними критеріями при розв'язанні задач даного типу.

Основна частина. У матеріалах статті пропонується метод кодування на основі дискретного ортогонального перетворення в базисі функцій Галуа.

Дискретне перетворення вхідного інформаційного потоку X у базисі, заданому матрицею M , у матричній формі подається згідно співвідношення

$$Y = M \cdot X, \quad (1)$$

де $X = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$ – N -компонентний транспонований вектор, $Y = [Y(0), Y(1), \dots, Y(N-1)]^T$ –

N -компонентний транспонований вектор спектральних коефіцієнтів перетворення.

Співвідношення (1) визначає дискретне перетворення Уолша-Адамара у випадку, якщо матриця перетворення M є матрицею Адамара $[M(i, k)] = [Wal(i, \theta_k)]$ та дискретне перетворення Хаара, якщо $[M(i, k)] = [Har(n, \theta_k, j)]$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $Wal(i, \theta)$ – функції Уолша, $Har(n, \theta, j)$ – функції Хаара, $n = 0, 1, \dots, \log_2 N$, $j = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$, ($j = 0$ при $n = 0$), $\theta_k = k / N$, $0 \leq \theta < 1$.

Дискретне ортогональне перетворення Галуа послідовності відліків одновимірного інформаційного потоку $\{X(0), X(1), \dots, X(N-1)\}$ довжини $N = 2^n$, визначене в роботі [6], у матричному записі подається згідно співвідношення

$$Y = Gal \cdot X, \tag{2}$$

де $Y = [Y(0), Y(1), \dots, Y(N-1)]^T$ – N -компонентний вектор спектральних коефіцієнтів перетворення Галуа, Gal – матриця $N \times N$ дискретних значень ортогональних функцій Галуа $Gal(n, \theta, i)$ в точках $\theta_k = k / N$, $[Gal(i, k)] = [Gal(n, \theta_k, i)]$.

Система Уолша [2, 5] визначається як добуток функцій Радемахера $Rad(n, \theta) = \text{sign}(\sin(2^n \pi \theta))$ [5] на інтервалі $0 \leq \theta < 1$

$$Wal(i, \theta) = Rad(1, \theta)^{b_0} Rad(2, \theta)^{b_1} \dots \dots Rad(n, \theta)^{b_{n-1}} = \prod_{k=0}^{n-1} (Rad(k+1, \theta))^{b_k}, \tag{3}$$

де $i = b_{n-1} b_{n-2} \dots b_1 b_0$ – подання в коді Грея порядкового номера функції $Wal(i, \theta)$.

Система Хаара $Har(n, \theta, j)$ [2, 5] означається наступним чином

$$Har(n, \theta, j) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} \text{sign}(\sin 2^n \pi \theta), & \frac{j}{2^{n-1}} \leq \theta < \frac{j+1}{2^{n-1}}, \\ 0 \text{ при інших } \theta \in [0, 1). \end{cases}$$

Система функцій Галуа, на основі якої здійснюється відповідне перетворення, будується із системи функцій Уолша [3, 6].

З метою виконання переходу із базису Уолша до системи функцій Галуа одержані зі співвідношення (3) функції Уолша переупорядковуються згідно рекурсивної послідовності [3]. Рекурсивні послідовності утворюються відповідно до породжувачого

вектора поля Галуа $GF(2^n)$. Послідовність порядкових номерів функцій Уолша утворюється із n -розрядних фрагментів рекурсивної послідовності [3]. Наприклад, породжуючі поле $GF(2^3)$ вектори (1011) і (1101) із початкового вектора $(g_0, g_1, g_2) = (111)$ утворюють дві рекурсивні послідовності $g_0, g_1, g_2, \dots, g_{2^3-1}$ за правилами:

$$(1011) \rightarrow g_{i+3} = g_i \oplus g_{i+2};$$

$$(1101) \rightarrow g_{i+3} = g_i \oplus g_{i+1}.$$

Для початкового вектора $(g_0, g_1, g_2) = (111)$ та породжувачого вектора (1101) рекурсивна послідовність $\{0 0 0 1 0 1 1 1\}$, утворена за правилом $g_{i+3} = g_i \oplus g_{i+1}$, визначає 3-розрядні номери функцій Уолша в рекурсивно впорядкованій системі: $\{0 1 2 5 3 7 6 4\}$.

Із рекурсивно впорядкованої системи Уолша перші n функцій рекурсивної системи Галуа формуються згідно співвідношення [3, 6]

$$G(n, \theta, i) = Wal(Ent(2^n \theta), \frac{2^{i+1} - 1}{2^n}),$$

де Ent – функція виділення цілої частини.

Наступні $N - n$ функцій рекурсивної системи Галуа $G(n, \theta, i)$ отримують процедурою рекурсивного зсуву згідно другої діагоналі на величину $\Delta\theta = \frac{1}{2^n}$ вліво кожної наступної функції відносно попередньої

$$G(n, \theta, i+1) = G(n, \theta + \Delta\theta, i). \tag{4}$$

З метою побудови лінійно незалежної та ортогональної системи одержана згідно співвідношення (4) рекурсивна система функцій Галуа доповнюється функцією $Gal(n, \theta, 0) = 1$ та здійснюється процедура ортогоналізації Грама-Шмідта згідно залежностей [6]

$$Gal(n, \theta, 0) = G(n, \theta, 0),$$

.....

$$Gal(n, \theta, k+1) = G(n, \theta, k) - \tag{5}$$

$$- \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{(G(n, \theta, k), Gal(n, \theta, i))}{\|Gal(n, \theta, i)\|_{L_2}^2} Gal(n, \theta, i),$$

де $(G(n, \theta, k), Gal(n, \theta, i))$ – скалярний добуток в просторі інтегровних з квадратом функцій L_2 , $\|Gal(n, \theta, i)\|_{L_2}^2$ – норма в L_2 . Графіки одержаної в результаті ортогоналізації модифікованої системи ортогональних функцій Галуа $G(3, \theta, i)$ наведені на рис.1.

Побудована система (5) є базисом дискретного ортогонального перетворення Галуа (2).

З метою визначення ефективності застосування запропонованого ортогонального перетворення Галуа здійснено дослідження, оцінку та порівняльний аналіз із перетвореннями

Уолша-Адамара та Хаара при кодуванні даних на основі перетворення за критеріями зменшення середніх затрат бітів на один елемент перетворення [2, 4] і відношення похибок відновлення при імпульсно-кодівій модуляції та кодуванні на основі перетворення [4].

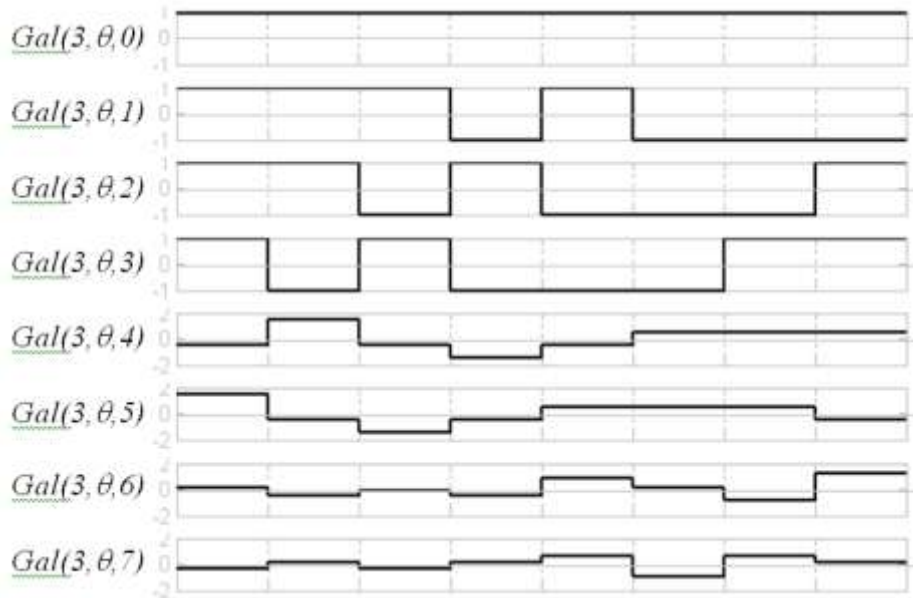


Рис. 1. Система ортогональних функцій Галуа, $n = 3$.

Дослідження властивостей перетворення здійснено на моделі вхідного одновимірного інформаційного потоку, яка застосовується для визначення ефективності ортогональних перетворень [2, 4]. У даній моделі \mathcal{X} – N -компонентний вектор, елементи якого є реалізацією одновимірного марківського процесу першого порядку з нульовим математичним сподіванням, одиничною дисперсією, заданого коваріаційною матрицею C_X , (i, k) -й елемент якої

дорівнює $\rho^{|i-k|}$, $0 \leq \rho \leq 1$ – коефіцієнт кореляції між сусідніми елементами вибірки, а коваріаційна матриця C_Y вектора коефіцієнтів перетворення Y визначається як математичне сподівання $C_Y = MC_X M^T = [C_Y(i, k)]$ [4].

Мірою зменшеної в результаті перетворення надлишковості є теоретична границя зменшення середніх затрат бітів на один коефіцієнт, яка вимірюється в бітах на один елемент – “maximum reducible bits” (MRB) [2, 4]

$$MRB = -\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \log_2 C_Y(i, i).$$

Результати обчислення значень параметру MRB при використанні перетворень Уолша-

Адамара (MRB_{wal}), Хаара (MRB_{har}) та Галуа (MRB_{gal}) та залежності від коефіцієнта кореляції ρ між сусідніми елементами вибірки для розмірів блоків вхідних векторів і матриць перетворень від $N = 8$ до $N = 128$ наведено на рис. 2.

На основі аналізу розрахованих значень, рис. 2 і обчислених відношень теоретичних границь зменшення затрат бітів на один елемент перетворення $k_{MRBGW} = MRB_{gal} / MRB_{wal}$ і $k_{MRBGH} = MRB_{gal} / MRB_{har}$ встановлено, що метод кодування на основі перетворення Галуа забезпечує підвищення параметра MRB та зменшення середніх затрат бітів на 4–16% порівняно із перетвореннями Уолша-Адамара та Хаара при розмірі вхідного вектора $N = 8$ та до 7% при розмірах $N \geq 16$ вхідних векторів із коефіцієнтом кореляції між елементами $0,1 \leq \rho \leq 0,6$.

Таким чином, за допомогою перетворення Галуа у порівнянні із перетвореннями Уолша-Адамара та Хаара здійснюється кодування з мінімальною кількістю біт на один коефіцієнт перетворення чим забезпечується зменшення надлишковості інформації, яка передається.

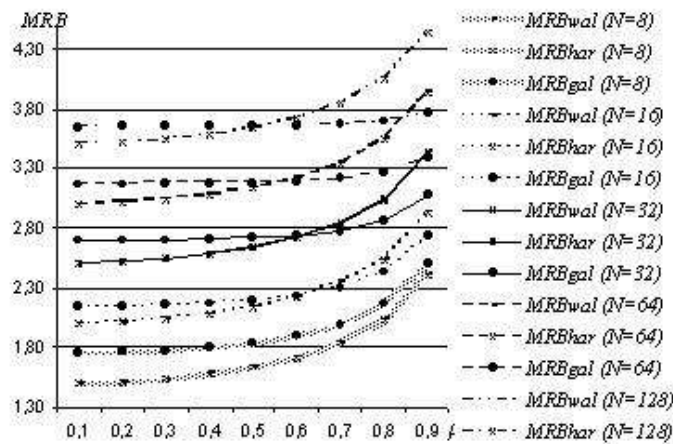


Рис. 2. Залежності теоретичної границі зменшення затрат від кореляції ρ для перетворень розмірностей N .

Критерієм ефективності кодування на основі перетворення порівняно з імпульсно-кодовою модуляцією є відношення середнього арифметичного дисперсій коефіцієнтів перетворення до їх середнього геометричного, яке відображає у скільки разів менша похибка відновлення при кодуванні на основі перетворення порівняно з безпосередньою імпульсно-ковою модуляцією [4]

$$G_{TC} = \frac{1}{N} \frac{\sum_{i=1}^N \sigma^2(i)}{(\prod_{i=1}^N \sigma^2(i))^{1/N}}, \quad (6)$$

де $\sigma^2(i) = C_Y(i, i)$.

При оцінюванні за критерієм (6) відношення сигнал/шум SNR_{TC} у децибелах при кодуванні на основі перетворення та при імпульсно-кодовій модуляції SNR_{PCM} пов'язані співвідношенням $SNR_{TC} = SNR_{PCM} + 10 \log_{10} G_{TC}$ [4].

З метою дослідження ефективності кодування на основі перетворення Галуа порівняно з імпульсно-ковою модуляцією

обчислено коефіцієнти G_{TC} за формулою (6) для методів кодування на основі перетворень Уолша-Адамара (G_{TCwal}), Хаара (G_{TCaar}), Галуа (G_{TCgal}). Значення показника G_{TC} в залежності від коефіцієнта кореляції ρ між сусідніми елементами вибірки наведено на рис. 3.

Із аналізу результатів обчислень та рис. 3 можна зробити висновок, що ортогональне перетворення Галуа векторів розміру $N=8$ для всіх досліджених значень ρ та векторів вхідних інформаційних потоків розмірів від $N=16$ до $N=128$ із коефіцієнтом $0,1 \leq \rho \leq 0,3$ мають вищий показник G_{TC} .

Обчислено відношення похибок відновлення інформаційних потоків при застосуванні методів кодування на основі перетворення Галуа та перетворення Уолша-Адамара $k_{GTCGW} = G_{TCgal} / G_{TCwal}$ та похибок при застосуванні перетворення Хаара $k_{GTCGH} = G_{TCgal} / G_{TCaar}$ та одержано оцінки $1,04 \leq k_{GTCGW}, k_{GTCGH} \leq 1,17$.

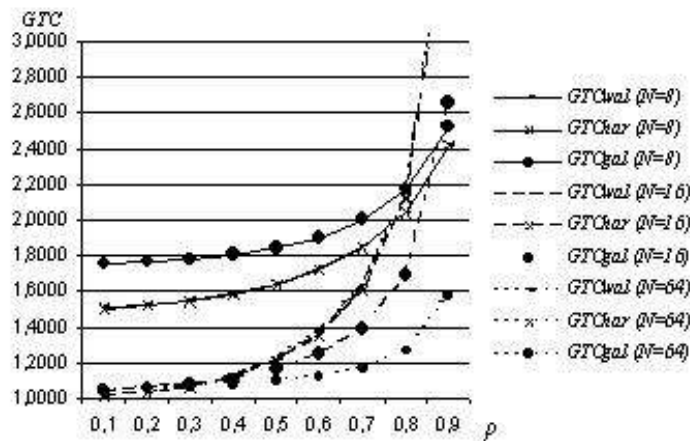


Рис. 3. Відношення похибок відновлення при імпульсно-кодовій модуляції та кодуванні на основі перетворення

Із результатів обчислення відношень похибок відновлення слідує, що застосування методу кодування на основі ортогонального перетворення Галуа порівняно з перетвореннями Уолша-Адамара та Хаара дозволяє зменшити середньоквадратичну похибку відновлення інформаційних потоків у 1,04 – 1,17 разів.

Висновки. Результати проведених досліджень свідчать, що запропонований метод кодування на основі ортогонального перетворення Галуа порівняно з відомими перетвореннями Уолша та Хаара дозволяє зменшити статистичну надлишковість інформації і похибку відновлення інформаційних потоків при кодуванні порівняно з імпульсно-кодовою модуляцією і може використовуватись в комп'ютерних системах для кодування інформаційних потоків на основі ортогонального перетворення.

Література

1. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Бернард Скляр; пер. с англ. – [2-е изд.]. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2003. – 1104 с.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: в 2-х кн. / Прэтт У.: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980.
3. Петришин Л. Б. Теоретичні основи перетворення форми та цифрової обробки інформації в базисі Галуа: Навчальний посібник. – К.: ІЗІМН МОУ, 1997. – 237 с.
4. Технологія багатофункціональної обробки і передачі інформації в моніторингових мережах: [монографія] / В. М. Шевчук, В. К. Задірака, Л. О. Гнатів, С. В. Фраєр; НАН України, Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова. - К.: Наукова думка, 2010. - 375 с.
5. Ахмед Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Н. Ахмед, К. Р. Рао: Пер. с англ. – М.: Связь, 1980. – 248 с.
6. Превисокова Н. В. Метод обробки інформації на основі дискретного ортогонального перетворення Галуа / Н. В. Превисокова // Вісник Хмельницького нац. ун-ту. Технічні науки. – 2010. – № 2 (146). – С.149–156.

References

1. Skljär B. Cifrovaja svjaz'. Teoreticheskie osnovy i praktičeskoe primenenie / Bernard Skljär; per. s angl. – [2-e izd.]. – M.: Izdatel'skij dom “Vil'jams”, 2003. – 1104 s.
2. Prjett U. Cifrovaja obrabotka izobrazhenij: v 2-h kn. / Prjett U.: Per. s angl. – M.: Mir, 1980.
3. Petrishin L. B. Teoretichni osnovi peretvorennja formi ta cifrovoi obrobki informacii v bazisi Galua: Navchal'nij posibnik. – K.: IZiMN MOU, 1997. – 237 s.

4. Tehnologija bagatofunkcional'noi obrobki i peredachi informacii v monitoringovih merezhah: [monografija] / V. M. Shevchuk, V. K. Zadiraka, L. O. Gnativ, S. V. Fraer; NAN Ukraïni, In-t kibernetiki im. V. M. Glushkova. - K.: Naukova dumka, 2010. - 375 s.

5. Ahmed N. Ortogonal'nye preobrazovanija pri obrabotke cifrovyh signalov / N. Ahmed, K. R. Rao: Per. s angl. – M.: Svjaz', 1980. – 248 s.

6. Previsokova N. V. Metod obrobki informacii na osnovi diskretnogo ortogonal'nogo peretvorennja Galua / N. V. Previsokova // Visnik Hmel'nic'kogo nac. un-tu. Tehnichni nauki. – 2010. – № 2 (146). – S.149–156.

Превисокова Н.В.

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА КОДИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ ГАЛУА

Предложено метод кодирования одномерных информационных потоков в компьютерных системах на основе дискретного ортогонального преобразования в базисе функций Галуа. Определено эффективность применения данного метода и сделано сравнительный анализ с методами кодирования на основе преобразований Уолша-Адамара и Хаара.

Ключевые слова: кодирование на основе преобразования, дискретное ортогональное преобразование, импульсно-кодовая модуляция, функции Галуа.

Prevysokova N.

ANALYSIS OF EFFICIENCY THE CODING METHOD ON THE GALOIS FUNCTIONS TRANSFORM BASE

The coding method of onedimensional signals is offered in the computer systems on the discrete orthogonal transform in the Galois functions base. It is set efficiency of this method and a comparative analysis is done with the methods of coding on the Walsh-Hadamard and Haar transforms base.

Keywords: coding on the transform base, discrete orthogonal transform, pulse coding modulation, Galois functions.

Превисокова Наталя Володимирівна,

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, доцент кафедри інформатики, к.т.н.

Рецензент: Лютак І.З., д.т.н, професор кафедри

програмного забезпечення автоматизованих систем Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.