УДК 539.1

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ КОНСТРУКЦИЙ

Козуб Ю.Г., Козуб Г.А.

METHOD OF DECISION OF TASKS CONSTRUCTION DINAMIC

Kozub Y.G., Kozub G.A.

Разработана методика МКЭ решения прикладных задач деформирования и разрушения сложных пространственных конструкций, на основе пакета прикладных программ „МИРЕЛА+" для решения задач динамики. Используется вариант моментной схемы конечных элементов с тройной аппроксимацией перемещений, деформаций и изменения объема, который позволяет учитывать слабую сжимаемость эластомеров.

Ключевые слова: *метод конечных элементов, динамика, МИРЕЛА+, эластомер, моментная схема, деформация, матрица жесткости, матрица масс.*

Введение. Метод конечных элементов (МКЭ) является эффективным численным методом исследования множества явлений, изучаемых в механике и математической физике. Он позволяет с высокой степенью точности и эффективностью определять напряженно-деформированное состояние, нелинейности различного рода, вязкоупругие и пластические деформации, поля температур, термовязкоупругие напряжения, устойчивость, разрушение при статических, циклических и динамических условиях нагружения.

Целенаправленное развитие МКЭ получил в 60-х годах прошлого столетия одновременно в США, Германии, Японии. В Украине он начал бурно развиваться с 1970 года в научно-исследовательской лаборатории тонкостенных пространственных конструкций Киевского инженерно-строительного института благодаря работам сотрудников Д. В. Вайнберга, А. С. Сахарова, В. В. Киричевского и других [1-6].

МКЭ относится к группам приближенных методов, таких как метод конечных разностей (МКР), вариационно-разностных как метод Ритца, метод Бубнова-Галеркина и др. В его основе лежат вариационные принципы. Переход от реального объекта к дискретной расчетной модели осуществляется с позиции механики путем разделения сплошной среды на ряд конечных элементов (КЭ) с соблюдением специальных условий. Задание аппроксимирующих (координатных) функций производится внутри отдельных КЭ, что является предпочтительным, чем их задания в ВРМ для всего исследуемого объекта в целом.

Вычислительный комплекс МІРЕЛА [6] предназначен для исследования прочности, долговечности и разрушения конструкций из эластомерных и композитных материалов в условиях линейного и нелинейного вязкоупругого деформирования, исследования температурных полей диссипативного разогрева и параметров механики разрушения массивных эластомерных элементов конструкций и тонкослойных резинометаллических элементов с трещинами с изменяющимися физико-механическими и теплофизическими параметрами в условиях циклического деформирования. Для слабосжимаемых эластомерных элементов конструкций используется моментная схема конечных элементов на основе тройной аппроксимации перемещений, деформаций и функции изменения объема.

Расчет конструкций методом конечных элементов можно представить в виде трех взаимосвязанных последовательных процессов:

1) подготовка исходных данных – конечноэлементная дискретизация рассчитываемого объекта, его топология и кинематические и силовые граничные условия, физико-механические характеристики материала;

2) численный расчет конечноэлементной модели – вычисление коэффициентов матрицы жесткости конечных элементов, формирование

глобальной системы разрешающих уравнений и её решение;

3) обработка результатов решения – вычисление параметров напряженно-деформированного и температурного состояния конструкции; их визуальное представление в виде таблиц, графиков, двумерных либо трехмерных изображений.

Целью работы является разработка методики решения задач упругости эластомеров в условиях динамического нагружения. Для этого используется подсистема «ДИНЭМА» (динамика конструкций из эластомерных материалов). Блок-схема подсистемы представлена на рис. 1.

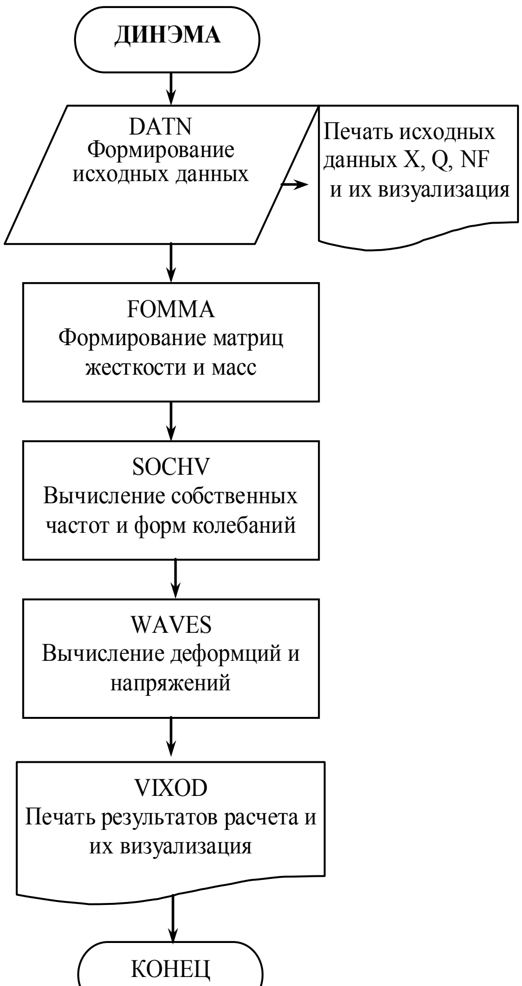


Рис. 1. Алгоритм решения задач динамики

Одним из наиболее важных этапов решения задачи динамики для эластомерных конструкций является определение собственных частот и форм колебаний.

В большинстве случаев влияние демпфирования на частоты и формы собственных колебаний невелико и им можно пренебречь. Для определения собственных частот колебаний эластомерных элементов конструкций следует решить обобщенную проблему собственных чисел

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{u\}=0\,, \tag{1}$$

где ω – круговая собственная частота колебаний,

$[K]$ – матрица жесткости, $[M]$ – матрица масс.

Задачу о собственных колебаниях можно свести обычной проблеме собственных чисел для матрицы $[K]^{-1}[M]$

$$\frac{1}{\omega^2}\{u\}=[K]^{-1}[M]\{u\}\,. \tag{2}$$

Решение полной проблемы собственных чисел может быть получено с помощью различных методов. Практическую важность имеют низшие значения частот ω. Кроме того, для дискретной модели высшие собственные числа отражают лишь особенности дискретизации, а не свойства конструкции.

В тех случаях, когда матрица жесткости имеет очень большой порядок, рациональнее использовать приближенные методы определения максимальных или минимальных собственных значений. Одним из таких методов является степенной алгоритм [1] :

$$[K]\{u_{(n+1)}\}=[M]\{u_{(n)}\}. \tag{3}$$

Вектор начального приближения выбирается с учетом кинематических ограничений, накладываемых на конструкцию.

Минимальная собственная частота в этом случае может быть определена по формуле

$$\omega^2 \approx \frac{\{u_{(n)}\}^T[K]\{u_{(n)}\}}{\{u_{(n)}\}^T[M]\{u_{(n)}\}}. \tag{4}$$

Таким образом, можно получить и собственный вектор. Учитывая М-ортогональность собственных векторов можно исключить одно уравнение в системе (4). Для вновь полученной системы по указанному алгоритму вычисляется следующее минимальное собственное значение.

Решение задачи о перемещениях точек тела можно получить используя разложение функции нагрузки по собственным частотам колебаний.

Другим способом моделирования поведения конструкции при динамическом нагружении является использование различных способов дискретизации искомой функции перемещений по времени (метод Кранка - Николсона, метод Галеркина).

На каждом шаге метода Кранка-Николсона полагаются известными значения перемещений и скоростей узлов на двух предыдущих шагах.

Система дифференциальных уравнений заменяется системой разностных уравнений [7].

Использование линейной аппроксимации по времени функции перемещений в методу Галеркина позволяет получить значения перемещений и скоростей на каждом шаге по их значениям на предыдущем шаге [8]. Функции формы на интервале $[t_0; t_0 + \Delta t]$ имеют вид

$$N_1 = 1 - \frac{t - t_0}{\Delta t}, \; N_2 = \frac{t - t_0}{\Delta t}.$$

Используя условия ортогональности функций формы и невязки, возникающей при аппроксимации, получаем систему алгебраических уравнений относительно функции перемещений и скоростей точек при конечном значении рассматриваемого интервала времени.

Алгоритм решения задач динамики приведен на рис. 1.

В головной программе DYNAM происходит резервирование рабочих массивов и задание начальных значений параметров задачи динамики. В подпрограмме DATN задаются исходные данные.

При решении задачи задаются следующие исходные данные: тип конечного элемента и закон аппроксимации, размеры сеточной области, информация о топологии и граничных условиях рассчитываемого объекта [1].

Дополнительно к этому задаются следующие параметры:

PRR – функция плотности материала ρ;

VX – массив кинематических граничных условий.

Резервируются массив MASS для матрицы масс.

Функциональная схема приведена на рис.2.

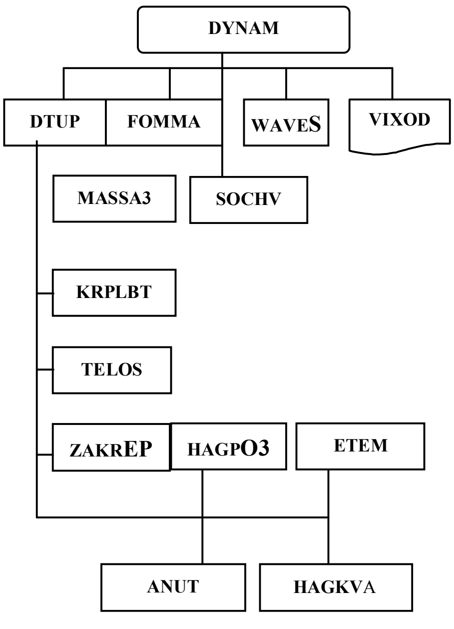


Рис. 2. Функциональная схема подсистемы

Рассмотрим программное обеспечение и функциональное назначение программ, входящих в подсистему «ДИНЭМА»:

DYNAM - головная программа управлением решения задачи динамики.

DATN - программа формирования исходных данных.

DTUP - подпрограмма формирования исходных данных: сетки разбиения на КЭ, координат конструкции, топологии и граничных условий, размеров и формы трещины, параметров решения системы алгебраических уравнений;

KRPLBT - подпрограмма координат конструкции.

FOMMA - блок формирования матрицы жесткости конструкции.

MASSA3 - блок формирования матрицы масс конструкции.

SOCHV - блок вычислений собственных частот и векторов свободных колебаний конструкции.

WAVES - блок вычисления напряжений и деформаций.

VIXOD - печать полей напряжений и деформаций и их визуализация.

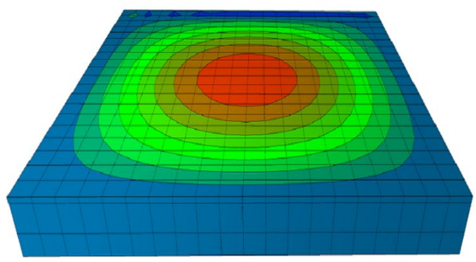
Используя предложенную методику решим задачу на определение низших собственных частот прямоугольного призматического виброизолятора.

Рассмотрим призматический виброизолятор [9]. Линейные размеры: L=0,1 м, B=0,2 м, H=aL. Виброизолятор работает на растяжение-сжатие по направлению H. Физические константы материала: плотность ρ=1200 кг/м^3, модуль сдвига G=1,23 МПа, соответствующие низшим собственным частотам колебаний для различных значений безразмерной высоты $a = H/L$, коэффициент Пуассона принят равным $\nu = 0{,}499$ В табл. 1. приведены значения безразмерной величины $\Omega = \omega L \sqrt{\rho/G}$.

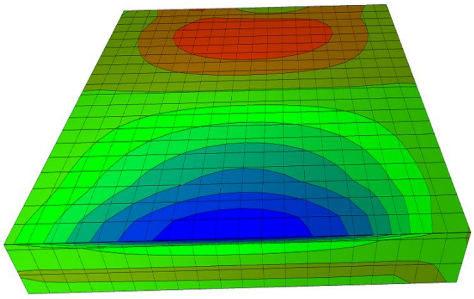
Таблица 1

Результаты низших собственных частот при работе виброизолятора на растяжение-сжатие

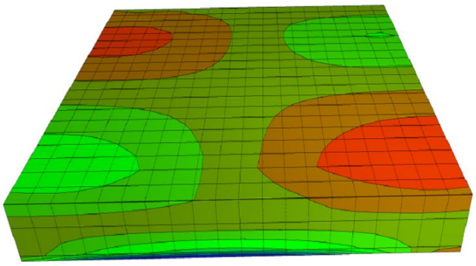
Ω/a	0,4	0,5	0,6	0,7
Ω_0	10,292	8,234	7,516	6,959
Ω_0 [7]	10,955	8,763	7,304	6,266



а



б



в

Рис. 3. Формы собственных колебаний соответственно: а – первой, б – второй, в – третьей нижних частот

Полученные результаты удовлетворительно совпадают с результатами, полученными другими авторами [10].

Выводы. Для анализа характера деформирования в условиях динамического нагружения необходимо знать частоты и формы свободных колебаний конструкции. Как правило, наиболее актуальным являются минимальные значения собственных частот. На основе вычислительного комплекса „МИРЕЛА+” разработан и реализован степенной итерационный метод определения нижних резонансных частот и форм колебаний.

Предложенный подход, использующий формулировку задачи в рамках трехмерных уравнений теории упругости, позволяет решать задачу динамики для конструкций произвольной формы.

Литература

1. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислоокий, В.В. Киричевский и др.: – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.
2. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике / О. К. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
3. Городецкий А.С. Численная реализация метода конечных элементов / А. С. Городецкий // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1972.– Вып. 16. С. 123-125.
4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. / Дж. Оден. – М.: Мир, 1976. 464с.
5. Вайнберг Д.В. Дискретный анализ в теории упругости. // Численные методы расчета пространственных конструкцій / Д.В. Вайнберг, А.Л. Синявский. – К.: КИСИ, 1968. – С. 5-38.
6. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе „МІРЕЛА+” / В. В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю. Г. Козуб и др. – К. : Наук. думка, 2005. – 403 с.
7. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. - М: Мир. 1981. - 216 с.
8. Толок В.А. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация / В.А. Толок, В.В. Киричевский, С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк, Д.П. Бувайло. – К.: Наук. думка, 2003. – 316 с.
9. Козуб Ю. Г. Свободные колебания эластомерных элементов конструкций / Ю. Г. Козуб // Тр. 11-го симп. «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: НИИ шинной промышленности. - 23-27 октября 2000. – С.31-33.
10. Сенченков И. К. Справочные частоты и напряжения призматических и цилиндрических виброизоляторов при кинематическом растяжении сжатии / И. К. Сенченков, О. П. Червинко // Вопр. динамики и прочности. – 1987. – Вып. 48. – С. 20-22.

References

1. Metod konechnyh elementov v mehanike tverdyh tel / A. S. Saharov, V. N. Kislookij, V. V. Kirichevskij ets.: – K.: Vyshha shkola, 1982. – 480 s.
2. Zienkiewicz O. C. The finite element method in engineering / O. C. Zienkiewicz – M.: Mir, 1975. – 541 p.
3. Gorodetskij A. S. Chislennaya realizatsija metoda konechnych elementov / A. S. Gorodetskij // Soprotivlenie materialov I teorija sooruzhenij. – 1972.– Vyp. 16. S. 123-125.
4. Oden G. The finite elements in nonlinear mechanics of continuum / G. Oden. – M.: Mir, 1976. 464p.
5. Vajnberg D. V. Diskretnyj analiz v teorii uprugosti. // Chislennye metody rascheta prostranstvennyh konstrukcij / D. V. Vajnberg, A. L. Sinjavskij. – K.: KISI, 1968. – S. 5-38.
6. Metod konechnyh jelementov v vychislitel'nom komplekse „MIRELA+” / V. V. Kirichevskij, B.M. Dohnjak, Y. G. Kozub ets. – K. : Naukova dumka, 2005. – 403 s.
7. Mitchell E. Metod konechnyh elementov dlja uravnenij s chastnymi proizvodnymi / E. Mitchell, R. Uejt. - M: Mir. 1981. - 216 s.
8. Tolok V. A. Metod konechnyh jelementov: teorija, algoritmy, realizacija / V. A. Tolok, V. V. Kirichevskij, S. I. Gomenjuk, S. N. Grebenjuk, D. P. Buvajlo. – K.: Nauk. dumka, 2003. – 316 s.
9. Kozub Y. G. Svobodnye kolebanija jelastomernyh jelementov konstrukcij / Y. G. Kozub // Tr. 11-go simp. «Problemy shin i rezinokordnyh kompozitov». – M.: NII shinnoj promyshlennosti. - 23-27 oktjabrja 2000. – S.31-33.
10. Senchenkov I. K. Spravochnye chastoty i naprjazhenija prizmaticheskih i cilindricheskih vibroizoljatorov pri kinematicheskom rastjazhenii szhatii / I. K. Senchenkov, O. P. Chervinko // Vopr. dinamiki i prochnosti. – 1987. – Vyp. 48. – S. 20-22.

Козуб Ю. Г., Козуб Г. О. Метод вирішення задач динаміки конструкцій

Розроблено методику МСЕ вирішення прикладних задач деформацій й руйнування складних просторових конструкцій, на основі пакету прикладних програм „МІРЕЛА+” для вирішення задач динаміки. Використовується варіант моментної схеми скінченних елементів з потрійною апроксимацією переміщень, деформацій і зміни об'єму, який дозволяє враховувати слабку стисливість еластомерів.

Ключові слова: *метод скінченних елементів, динаміка, МІРЕЛА+, еластомер, моментна схема, деформація, матриця жорсткості, матриця мас.*

Kozub Y., Kozub G. Method of decision of tasks construction dynamic

Article ultimately offer a method of solving the problems of the dynamics of elastomernyh designs. To determine the natural frequencies and mode shapes using the power iteration method. To determine the natural frequencies and mode shapes using the power iteration method. To solve the problem of the distribution of displacements and stresses in terms of the design at a time of loading methods are used Crank-Nicolson and Galerkin. To simulate the structural behavior of elastomers by a moment scheme of finite element based on a triple approximation of displacements, strains and function of volume change on the basis of application package „MIRELA+”.

Козуб Ю.Г. – зав. каф. ТВіПО, к.т.н., доц., ДЗ Луганського національного університету ім. Т. Шевченка.
Козуб Г.О. – доц. каф. ІТС, к.т.н., доц., ДЗ Луганського національного університету ім. Т. Шевченка.

Рецензент: **Бєлодєдов В.О.,** д.т.н, профсcор, профессор кафедры машиноведения СНУ имени В.Даля.

Стаття подана: 23.04.2013