

УДК 681.5.001.63: 519.711

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА ОБЪЕКТОВ, НАХОДЯЩИХСЯ В НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ

Лаврик В.В.

USING MOMENT SCHEME FOR FINITE ELEMENT ANALYSIS OF THE OBJECTS IN THE TENSION-DEFORMATION STATE

Lavrik V.V.

В статье приведён анализ численных методов расчёта задач механики, основанных на вариационном принципе Лагранжа, таких как метод конечных элементов (МКЭ) и метод моментных схем (МСКЭ). Для МСКЭ выведена схема нахождения матрицы жёсткости конечных элементов. Она представлена в виде формул для нахождения элементов подматриц матрицы жёсткости. В таком виде они были интегрированы в систему автоматизированного проектирования FORTU- FEM. Приведён пример расчёта консольной балки в системе FORTU- FEM и сделан сравнительный анализ результатов с аналитическим решением.

Ключевые слова: метод моментных схем, конечный элемент, САПР FORTU- FEM.

Постановка проблемы. При использовании традиционных схем метода конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений, построенного на основе вариационного принципа Лагранжа для решения задач с особенностями (таких как учёт слабой сжимаемости, расчёт пластин и оболочек на базе трёхмерных конечных элементов), возникают существенные трудности [1, 5], для преодоления которых используются другие вариационные принципы – Кастильяно (метод сил), Хеллингера – Рейсснера, Ху – Вашицу (смешанный метод) [8].

МКЭ в форме метода сил не получил значительного развития в силу сложности при аппроксимации напряжённого состояния. Больше применение нашли смешанные схемы МКЭ. Имея положительные особенности [4], они обладают и рядом недостатков, как увеличение порядка разрешающей системы уравнений по сравнению с МКЭ в форме метода перемещений, нарушение положительной определенности матрицы уравнений. Поэтому для задач с указанными особенностями предпочтительнее развитие

гибридных схем МКЭ в форме метода перемещений на базе вариационного принципа Лагранжа.

Стандартный МКЭ в форме метода перемещений требует, чтобы поле перемещений точек внутри КЭ аппроксимировалось полиномиальными функциями, а контакт на границах элементов осуществлялся при соблюдении условий неразрывности. Как следует из работ [6; 9] этот вариант МКЭ обладает медленной сходимостью в силу полиномиальности функций. Аппроксимирующие поля перемещений не включают слагаемое, описывающее жесткие смещения КЭ. Этот эффект существенно проявляется при использовании криволинейных КЭ, и учет жестких смещений КЭ следует рассматривать не как необходимое условие сходимости, а важное средство повышения эффективности МКЭ при расчете тел криволинейной формы.

В процессе эксплуатации стандартной схемы МКЭ в форме метода перемещений наряду с проявлением жестких смещений КЭ было замечено и другое негативное свойство МЖ, называемое «эффектом сложного сдвига» [5], а именно: при изгибе тонких пластин и оболочек на базе трехмерных КЭ значительно возрастают погрешности, связанные с проявлением фиктивных сдвиговых деформаций.

Для устранения этих недостатков была разработана моментная схема конечных элементов (МСКЭ) [1, 10], позволяющая учесть основные свойства жестких смещений для изопараметрических и криволинейных КЭ изотропных упругих тел. Суть её заключается в отбрасывании некоторых членов разложения деформаций, реагирующих на жесткие смещения и на появляющиеся фиктивные сдвиговые

деформации. При этом точные уравнения связи деформаций и перемещений заменяются приближенными.

Цель этой работы- представление моментной схемы конечных элементов и использование её в системе автоматизированного проектирования FORTU- FEM.

Вывод вариационных соотношений в статике.

Положим, что область, занимаемая элементом, отображена в куб с единичными рёбрами (рис.1). В центр «изопараметрического» КЭ поместим начало местной системы координат $Oxyz$, направляя оси вдоль рёбер [2].

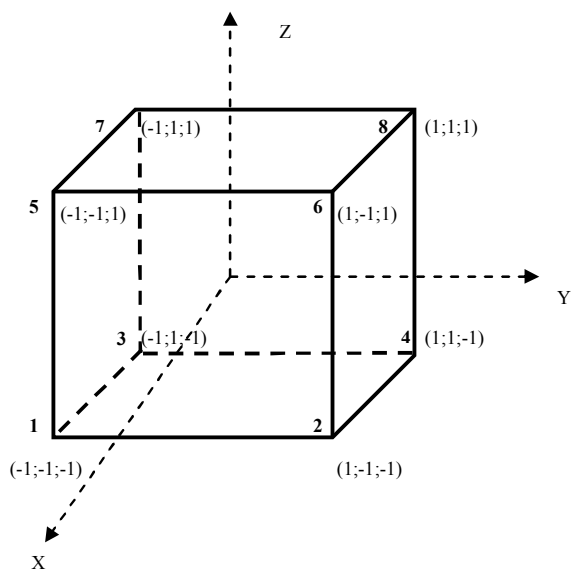


Рис. 1. Шестигранный прямоугольный конечный элемент

Функции, задающие геометрию для криволинейного КЭ в базисной системе координат, представляется в виде соотношений:

$$z_1 = \sum_{i=1}^8 N_i z^{1i}; z_2 = \sum_{i=1}^8 N_i z^{2i}; z_3 = \sum_{i=1}^8 N_i z^{3i}, \quad (1)$$

где $N_i = \frac{1}{8}(1 + xx_i)(1 + yy_i)(1 + zz_i)$ - функции формы, заданные в базисной системе координат; z^{1i}, z^{2i}, z^{3i} - координаты узловых точек параллелепипеда.

Определим якобиан перехода от базисной в местную систему координат:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{z^{1i}\} \\ \{z^{2i}\} \\ \{z^{3i}\} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \{z^{1i}\}^T &= \{z^{11}, z^{12}, z^{13}, z^{14}, z^{15}, z^{16}, z^{17}, z^{18}\}^T, \\ \{z^{2i}\}^T &= \{z^{21}, z^{22}, z^{23}, z^{24}, z^{25}, z^{26}, z^{27}, z^{28}\}^T, \\ \{z^{3i}\}^T &= \{z^{31}, z^{32}, z^{33}, z^{34}, z^{35}, z^{36}, z^{37}, z^{38}\}^T, \end{aligned} \quad (3)$$

i - количество узлов; $\{z^{1i}\}$ -абсциссы i -го узла; $\{z^{2i}\}$ -ординаты i -го узла; $\{z^{3i}\}$ -аппликаты i -го узла.

Основной принцип метода моментных схем лежит в представлении аппроксимирующей функции в ряд Тейлора с последующим отбрасыванием n -ых членов ряда. Для пространственного прямоугольного шестигранного конечного элемента эта функция, представленная в виде ряда, будет иметь следующий вид [4]:

$$u_k = w_k^{000} + w_k^{100} \psi^{100} + w_k^{010} \psi^{010} + w_k^{001} \psi^{001} + w_k^{110} \psi^{110} + w_k^{101} \psi^{101} + w_k^{011} \psi^{011} + w_k^{111} \psi^{111}, \quad (4)$$

где w_k^{pqr} -коэффициенты разложения, ψ^{pqr} - набор степенных координатных функций, определяемых по формуле:

$$\psi^{pqr} = \frac{x^p y^q z^r}{p! q! r!} \quad (p=0, 1; q=0, 1; r=0, 1). \quad (5)$$

Компоненты тензора деформации разложим в ряд Макларена в окрестности начала координат []:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg} e_{ij}^{(stg)} \psi^{(stg)} \quad (6)$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11}^{00} + e_{11}^{001} \psi^{001} + e_{11}^{010} \psi^{010} + e_{11}^{011} \psi^{011}; \\ \varepsilon_{22} &= e_{22}^{000} + e_{22}^{001} \psi^{001} + e_{22}^{100} \psi^{100} + e_{22}^{101} \psi^{101}; \\ \varepsilon_{33} &= e_{33}^{000} + e_{33}^{010} \psi^{010} + e_{33}^{100} \psi^{100} + e_{33}^{110} \psi^{110} \\ \varepsilon_{12} &= e_{12}^{000} + e_{12}^{001} \psi^{001}; \\ \varepsilon_{13} &= e_{13}^{000} + e_{13}^{010} \psi^{010}; \\ \varepsilon_{23} &= e_{23}^{000} + e_{23}^{100} \psi^{100}. \end{aligned} \quad (7)$$

В разложении компонент деформаций наряду с коэффициентами разложения деформаций присутствуют коэффициенты разложения жёстких поворотов. Это обстоятельство обуславливает причину замедленной сходимости КЭ. Что бы её устранить отбросим эти члены ряда. После преобразования для данного конечного элемента, учитывая формулы (6), (7), тензоры деформации будут иметь следующий вид:

$$\varepsilon_{11} = \sum_{i=1}^8 u_i b_{100}^k (w_k^{j2} + w_k^{i5} y + w_k^{i6} z + w_k^{i8} yz);$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= \sum_{i=1}^8 v_i b_{010}^{k'} (w_k^{i3} + w_k^{i5} x + w_k^{i7} z + w_k^{i8} xz); \\ \varepsilon_{33} &= \sum_{i=1}^8 \omega_i b_{001}^{k'} (w_k^{i4} + w_k^{i6} x + w_k^{i7} y + w_k^{i8} xy); \quad (8) \\ \varepsilon_{12} &= \sum_{i=1}^8 u_i b_{100}^{k'} (w_k^{i3} + w_k^{i7} z) + v_i b_{010}^{k'} (w_k^{i2} + w_k^{i6} z); \\ \varepsilon_{13} &= \sum_{i=1}^8 u_i b_{100}^{k'} (w_k^{i4} + w_k^{i7} y) + \omega_i b_{001}^{k'} (w_k^{i2} + w_k^{i5} y); \\ \varepsilon_{23} &= \sum_{i=1}^8 v_i b_{010}^{k'} (w_k^{i4} + w_k^{i6} x) + \omega_i b_{001}^{k'} (w_k^{i3} + w_k^{i5} x),\end{aligned}$$

где u_i , v_i , ω_i - компоненты перемещений каждого узла в пределах КЭ; w_k^{ij} - коэффициенты поворота узлов, $b_{(\mu\nu\eta)}^{k'}$ - коэффициенты, которые связывают значения узловых поворотов и степенные функции $\psi^{(pqr)}$. Для кубического КЭ, который имеет единичные метрики измерения, представленного в естественной системе координат, можно определить коэффициенты $b_{\mu\nu\eta}^{k'}$. Так,

$$\begin{aligned}b_{100}^{k'} &= b_{010}^{k'} = b_{001}^{k'} = 2, \\ \text{а } b_{110}^{k'} &= b_{101}^{k'} = b_{011}^{k'} = b_{111}^{k'} = 0.\end{aligned} \quad (9)$$

Для нахождения потенциальной энергии системы воспользуемся формулой, приведенной в [5]. Первоначально преобразуем её к виду:

$$\begin{aligned}\Pi &= \iiint_V |J| \left(\varepsilon_{11} \left(\frac{1}{2} D_{11} \varepsilon_{11} + D_{12} \varepsilon_{22} + D_{13} \varepsilon_{33} \right) + \right. \\ &+ \varepsilon_{22} \left(\frac{1}{2} D_{22} \varepsilon_{22} + D_{23} \varepsilon_{33} \right) + \varepsilon_{33} \left(\frac{1}{2} D_{33} \varepsilon_{33} \right) + \\ &+ \varepsilon_{12} \left(\frac{1}{2} D_{44} \varepsilon_{12} \right) + \varepsilon_{13} \left(\frac{1}{2} D_{55} \varepsilon_{13} \right) + \left. \varepsilon_{23} \left(\frac{1}{2} D_{66} \varepsilon_{23} \right) \right), \quad (10)\end{aligned}$$

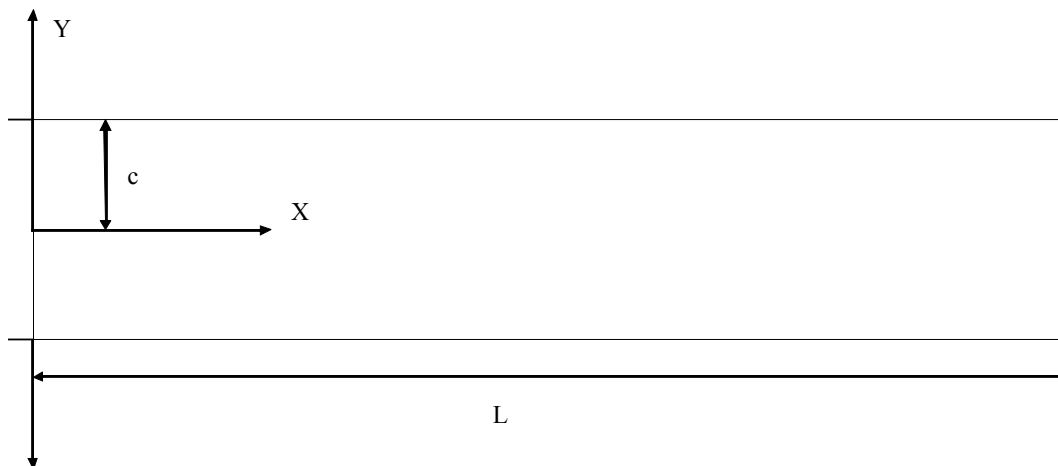


Рис 2. Консоль с жестко заделанным концом

где D_{mn} - коэффициенты матрицы модулей упругости конечного элемента, $m, n = \overline{1,6}$, причём $D_{mn} = D_{nm}$.

Используя (10) получим формулы для вычисления коэффициентов матрицы жёсткости $[K_{ikjm}]$:

$$\begin{aligned}K_{i1j1} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial u_j}, K_{i1j2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial v_j}, K_{i1j3} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial w_j}; \\ K_{i2j1} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_i \partial u_j}, K_{i2j2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_i \partial v_j}, K_{i2j3} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_i \partial w_j}; \quad (11) \\ K_{i3j1} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w_i \partial u_j}, K_{i3j2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w_i \partial v_j}, K_{i3j3} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w_i \partial w_j}.\end{aligned}$$

Представленные формулы были использованы для расчётов в системе автоматизированного проектирования FORTU-FEM [7]. Пример результатов расчёта показаны в следующем разделе.

Пример использования МСКЭ

Рассмотрим следующую простейшую задачу о нахождении изгиба консоли с узким прямоугольным единичным сечением, один конец которой жестко заделан в стену, а другой нагружен силой P (рис 2). Если толщина консоли мала по сравнению с высотой h , то данную задачу можно рассматривать как плоское напряженное состояние. Решим данную задачу при следующих условиях: $L = 10$, $h = 2c = 0.5$, $P = 1$. Коэффициент упругости материала $E = 10^6$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$. Силой тяжести мы для простоты пренебрежем.

Обозначим через $U(x,y)$ - горизонтальную составляющую перемещения, а через $V(x,y)$ - вертикальную.

В таблицах 1 и 2 приведено сопоставление полученного численного решения с известным аналитическим решением данной задачи, приведенной в (). В Таблице 1 сопоставляется расчетное значение вертикальной составляющей перемещения v с аналитически рассчитанным по

$$\bar{v}|_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{PL^2x}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI} + \frac{Pc^2}{2IG}(L-x).$$

Таблица 1.

Относительная погрешность для вертикальной составляющей перемещений

x,y	v	\bar{v}	$\varepsilon, \%$
0,0	-0.03199585	-0.0320750	0.25
1,0	-0.02721236	-0.0272835	0.26
2,0	-0.02252476	-0.0225880	0.28
3,0	-0.01802911	-0.0180845	0.31
4,0	-0.01382151	-0.0138690	0.34
5,0	-0.00999778	-0.0100375	0.39
6,0	-0.00665408	-0.0066860	0.47
7,0	-0.00388638	-0.0039105	0.61
8,0	-0.00179084	-0.0018070	0.89
9,0	-0.00046314	-0.0004715	1.77
10,0	0	0	0.00

Таблица 2

Относительная погрешность для горизонтальной составляющей напряжений

x,y	σ_{xx}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\varepsilon, \%$
0,-0.25	-2.46878589	0.0	-
1,-0.25	-25.08465381	-24.0	4.2
2,-0.25	-46.90945003	-48.0	2.3
3,-0.25	-72.0003141	-72.0	0.0
4,-0.25	-94.92687893	-96.0	1.2
5,-0.25	-121.10594595	-120.0	0.9
6,-0.25	-145.10994279	-144.0	0.8
7,-0.25	-169.10453595	-168.0	0.7
8,-0.25	-190.89481302	-192.0	0.6
9,-0.25	-217.07616722	-216.0	0.5
10,-0.25	-241.81762206	-240.0	0.7

Отметим, что относительная погрешность полученных результатов не превосходит 2%.

В Таблице 2 приведена относительная погрешность, полученная для горизонтальной составляющей напряжения σ_{xx} , которое сравнивается с аналитически рассчитанным по

$$\bar{\sigma}_{xx} = -\frac{3P}{2c^3}xy.$$

Отметим, что для σ_{xx} , полученная максимальная относительная погрешность составляет порядка 4%, что дает возможность говорить о высокой точности полученного решения.

Распределение горизонтальных и вертикальных составляющих перемещений приведены на рис. 3 и 4 в виде полутонового изображения. Здесь черно-белой палитрой цветов закодированы числовые величины по всей области консоли.

На рис. 5 приведено распределение по области консоли горизонтальной составляющей напряжения.

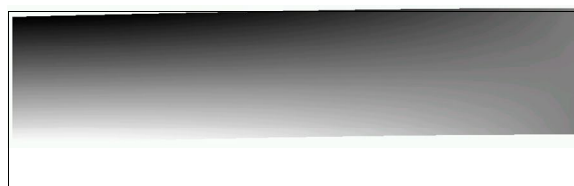


Рис 3. Распределение u

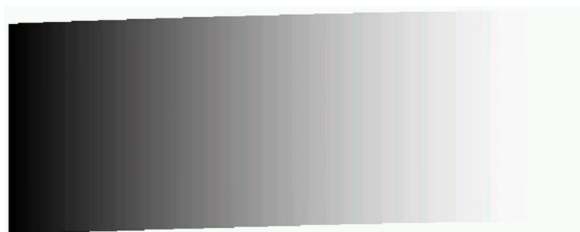


Рис 4. Распределение v

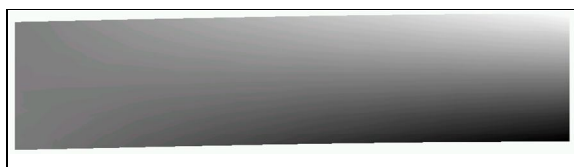


Рис 5. Распределение σ_{xx}

Выводы. Опыт решения различных задач механики деформируемых твёрдых тел на основе МКЭ показал, что традиционный вариант МКЭ нередко обладает медленной сходимостью, в особенности для массивных тел и оболочек сложных криволинейных форм.

В данной статье предложена схема вывода соотношений МКЭ, позволяющая учесть основные свойства жёстких смещений, как для изопараметрических, так и для криволинейных конечных элементов.

Представленная методика нахождения потенциальной энергии системы на основе моментной схемы конечных элементов является универсальной и позволяет численно рассчитывать задачи механики сложных конструкций.

В наших дальнейших работах описанная выше модель численных расчётов будет расширена и реализована в системе автоматизированного проектирования FORTU-FEM [7] с целью использования для расчёта конструкций, находящихся в динамическом состоянии.

Література

1. Вайберг Д. В. Вывод матрицы жёсткостных характеристик дискретного элемента произвольной формы / Д. В. Вайберг, А. С. Сахаров, В. В. Киричевский // Сопrotivlenie materialov i teorija sooruzhenij. – 1971. – Вып. 14. – С. 37–44.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Ричард Галлагер. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
3. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике / О. К. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
4. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В. В. Киричевский. – К. : Наукова думка, 2002. – 655 с.
5. Киричевский В. В. Нелинейные деформации термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров / В. В. Киричевский, А. С. Сахаров. – К. : Будівельник, 1992. – 215 с.
6. Киричевский В. В. Реализация метода конечных элементов в расчете негнотких пластин и оболочек сложной геометрии / В. В. Киричевский, А. С. Сахаров, Г. В. Исаханов // Сопrotivlenie materialov i teorija sooruzhenij. – 1976. – Вып. 28. – С. 148–162.
7. Лаврик В.В. Инструментальная система FORTU-FEM: структура организации и перспективы дальнейшего развития / В. В. Лаврик // Весник Херсонского национального технического университета. Вып. 3(39).– Херсон: ХНТУ.– 2010. – С. 244–251.
8. Лаевский Ю.М. Моделирование фильтрации двухфазной жидкости смешанным методом конечных элементов / Ю. М. Лаевский, П. Е. Попов, А. А. Калинин // Математическое моделирование.– 2010.– Том 22.– № 3.– С. 74 – 90.
9. Сахаров А. С. Модификация метода Рунге для расчета массивных тел на основе полиномиальных разложений с учетом жестких смещений / А. С. Сахаров // Сопrotivlenie materialov i teorija sooruzhenij. – К. : Будівельник, 1974. – Вып. 23. – С. 61–70.
10. Сахаров А. С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений / А. С. Сахаров // Сопrotivlenie materialov i teorija sooruzhenij. – К. : Будівельник, 1974. – Вып. 24. – С. 147–156.
7. Lavrik V.V. Instrumental'naja sistema FORTU-FEM: struktura organizacii i perspektivy dal'nejshego razvitija / V. V. Lavrik // Vesnik Hersonskogo nacional'nogo tehničeskogo universiteta. Vyp. 3(39).– Herson: HNTU.– 2010. – S. 244–251.
8. Laevskij Ju.M. Modelirovanie fil'tracii dvuhfaznoj zhidkosti smeshannym metodom konečnyh jelementov / Ju. M. Laevskij, P. E. Popov, A. A. Kalinkin // Matematicheskoe modelirovanie.– 2010.– Tom 22.– № 3.– S. 74 – 90.
9. Saharov A. C. Modifikacija metoda Runge dlja rasčeta massivnyh tel na osnove polinomial'nyh razloženij s učetom zhestkih smeshenij / A. S. Saharov // Soprotivlenie materialov i teorija sooruzhenij. – K. : Budivel'nik, 1974. – Vyp. 23. – S. 61–70.
10. Saharov A. C. Momentnaja shema konečnyh jelementov (MSKJe) s učetom zhestkih smeshhenij / A. S. Saharov // Soprotivlenie materialov i teorija sooruzhenij. – K. : Budivel'nik, 1974. – Vyp. 24. – S. 147–156.

Лаврик В.В. Використання моментної схеми для скінченно- елементного аналізу об'єктів, які знаходяться у напружено-деформованому стані

У статті наведено аналіз чисельних методів розрахунку задач механіки, заснованих на варіаційному принципі Лагранжа, таких як метод скінчених елементів (МСЕ) і метод моментних схем (МСКЕ). Для МСКЕ виведена схема знаходження матриці жорсткості скінчених елементів. Вона представлена у вигляді формул для знаходження елементів підматриць матриці жорсткості. У такому вигляді вони були інтегровані в систему автоматизованого проектування FORTU-FEM. Наведено приклад розрахунку консольної балки в системі FORTU-FEM і зроблений порівняльний аналіз результатів з аналітичним рішенням.

Ключові слова: метод моментних схем, скінченний елемент, САПР FORTU-FEM.

Lavrik V.V. Using moment scheme for finite element analysis of the objects in the tension-deformation state

This article presents an analysis of the two variational methods: classical method of finite elements (FEM) and the method of moment finite element schemes (MFES). This paper shows the shortcomings of the FEM with respect to MFES. For MFES deduced scheme of finding the finite element stiffness matrix. The resulting formulas are the elements of the submatrices of stiffness matrix. These formulas are programmed and introduced a separate module in computer-aided design FORTU-FEM. The example of calculation cantilever beam in the system FORTU-FEM and make a comparative analysis of the results with the analytical solution. Are presented the vertical and horizontal motion in the form of black-and-white palette. The article describes the conclusions and perspectives for further development of this method in CAD FORTU-FEM.

Key words: method of moment schemes, finite element, CAD FORTU-FEM.

Лаврик Володимир Володимирович – старший викладач кафедри інформатики та програмної інженерії, Бердянський державний педагогічний університет.

Рецензент: **Межуєв В.І.** д.т.н., зав. кафедри інформатики та програмної інженерії інституту ОІПТ.

References

1. Vajberg D. V. Vывod matricy zhjostkostnyh harakteristik diskretnogo jelementa proizvol'noj formy / D. V. Vajberg, A. S. Saharov, V. V. Kirichevskij // Soprotivlenie materialov i teorija sooruzhenij. – 1971. – Vyp. 14. – S. 37–44.
2. Gallager R. Metod konečnyh jelementov. Osnovy / Richard Gallager. – M. : Mir, 1984. – 428 s.
3. Zenkevich O. K. Metod konečnyh jelementov v tehnikе / O. K. Zenkevich. – M. : Mir, 1975. – 541 s.
4. Kirichevskij V. V. Metod konečnyh jelementov v mehanike jelastomerov / V. V. Kirichevskij. – K. : Naukova dumka, 2002. – 655 s.
5. Kirichevskij V. V. Nelinejnye deformacii termomehaniki konstrukcij iz slaboszimaemyh jelastomerov / V. V. Kirichevskij, A. S. Saharov. – K. : Budivel'nik, 1992. – 215 s.
6. Kirichevskij V. V. Realizacija metoda konečnyh jelementov v rasčete netonkih plastin i oboloček slozhnoj geometrii / V. V. Kirichevskij, A. S. Saharov, G. V. Isahanov // Soprotivlenie materialov i teorija sooruzhenij. – 1976. – Vyp. 28. – S. 148–162.