УДК. 621.38; 536.5

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕРОХОВАТОСТИ

Мирошниченко И. В.

PROBABILISTIC CHARACTERISTICS STATIC MATHEMATICAL MODEL OF ROUGHNESS

Miroshnichenko I. V.

Вычисление первых четырех моментов статических математических моделей шероховатости: математического ожидания; второго центрального момента – значения Ra или Rz; третьего начального момента – асимметрии закона распределения и четвертого центрального момента – погрешности вычисления Ra или Rz, позволяет идентифицировать вид закона распределения. Отличие от нуля математического ожидания и третьего момента свидетельствует о нестационарности процесса и необходимости формирования динамической математической модели шероховатости, описывающей последовательности этих состояний.

Ключевые слова: *вычисление первых четырех моментов, математическая модель, асимметрия закона распределения, математическое ожидание.*

Вступление. Необходимость модернизации машиностроения и, в особенности, станкостроения, являющегося, по сути, ядром машиностроения, определяющем его качественный уровень, требует использования новых информационно-сетевых технологий проектирования, изготовления управления и планирования на всех этапах жизненного цикла LT (Life cycle Time) технических систем (ТС). Уменьшение сроков разработки и снижение стоимости высокотехнологичных ТС может быть осуществлено применением CALS-технологий непрерывной информационной поддержки (Continues Acquisition and Life cycle Support – CALS).

В различных сферах человеческой деятельности (проблемных предметных областях – Problem area – PRAR) научной основой проектирования ТС является *математическая модель* (ММ) – формальное описание этих PRAR. Закономерности создания, преобразования, передачи и использования этой информации о PRAR может быть определены как триединство "*математическая модель-алгоритм-программа*", а набор приёмов, использующих математические модели, программы и алгоритмы, называется *информационной технологией* (ИТ). ММ, описывающие состояния PRAR, называются *статическими,* а описывающие последовательности этих состояний – *динамическими.* Несоответствие реальных процессов в PRAR приписываемым им ММ, особенно динамическим, характеризуется *погрешностями классификации* [6], оценка которых является основной задачей большинства научных исследований.

Постановка проблемы. Анализ результаты измерений параметров электрических, акустических, оптических и других сигналов $x(t)$, несущих информацию о процессах в PRAR [6], даёт основания полагать, что ММ процессов во многих PRAR могут быть случайные процессы $\xi(t)$. В такой постановке целью научных исследований является получение оценок $\Theta^*[x(t)]$ значений $\Theta[x(t)]$ вероятностных характеристик (ВХ) этих $\xi(t)$. Оценки $\Theta^*[x(t)]$, называемые также статистическими характеристиками (СХ) или числовыми характеристиками $\xi(t)$, вычисляются в системах обработки экспериментальных данных (СОЭД) по результатам измерения параметров $x(t)$.

Поэтому основными проблемами при проектировании СОЭД являются выбор ММ PRAR или, иначе говоря, выбор вида ВХ, обработка $x(t)$ по алгоритму $\langle q[x(t)]\rangle$ вычисления $\Theta^*[x(t)]$ и оценка погрешности классификации.

Цель работы. В машиностроении одним из параметров, определяющих качество реальной поверхности изделия, является шероховатость, статической ММ которой чаще всего принимается стационарный $\xi(t)$. При представлении шероховатости такими ММ [12], на практике чаще всего встречаются $\xi(t)$ с дифференциальными законами распределения (плотностью вероятности) $W\{x(t)\}$, имеющими конечные значения случайных отклонений ординат *y* профиля шероховатости: нормальным усеченным (Гаусса); равнобедренного треугольника (Симпсона); равномерным (равной вероятности).

Поэтому целью работы является выбор ВХ, обеспечивающей минимум погрешности классификации с учётом погрешностей измерения параметров $x(t)$ и погрешностей алгоритма $\langle q[x(t)]\rangle$ (процедуры) вычисления СХ при разработке ИТ проектирования СОЭД для контроля качества.

Результаты. По межгосударственному стандарту [1] шероховатость оценивается в нормальном поперечном сечении в пределах базовой длины *l* по результатам измерений ординат *y* случайных отклонений (высот неровностей) от средней линии профиля *m* – базовой линии, проведенной по номинальному профилю так, что в пределах *l* СКО её отклонение от профиля минимально. Для количественной оценки отклонений *y* профиля от линии *m* и нормирования шероховатости поверхностей установлено 6 параметров:

1). Три высотных СХ – *Ra* (предпочтительный), *Rz* и *Rmax*:

$Ra = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y|,$ – среднее арифметическое значение абсолютных отклонений неровностей *y* профиля, вычисляемое как среднее арифметическое для *n* выбранных точек профиля на базовой длине *l*;

$Rz = \frac{\sum_{i=1}^{5}|ypmi| + \sum_{i=1}^{5}|yvmi|}{5}$ – высота неровностей *y* профиля по 10 точкам, сумма средних абсолютных значений высот пяти наибольших выступов *ypmi* и глубин *yvmi* пяти наибольших впадин профиля в пределах *l*;

2). Два шаговых параметра для оценки характерных точек неровностей, характеризующих взаимное расположение (расстояние): S_i, –между максимумами *Rmax* профиля, S_{mi} – между точками пересечения профиля со средней линией *m* (нулей профиля);

3). Параметр t_p относительной опорной длины профиля характеризует высоту и форму неровностей профиля, содержит наибольшую информацию о высотных свойствах профиля, позволяя судить о фактической площади контакта шероховатых поверхностей на заданном уровне *p*, аналогичен функции распределения выбросов случайных процессов над порогом [10].

При вычислении параметров шероховатости стандарт [2] рекомендует термины: "Идеальный оператор" (Ideal operator), под которым понимается алгоритм $\langle q[\xi(t)]\rangle$ или процедура получения исходного, теоретически "точного значения" $\Theta[x(t)]$ и "Реальный оператор" (Real operator) – практически реализованный оптимальный оператор (Optimum operator) – алгоритм $\langle q[x(t)]\rangle$ вычисления оценок $\Theta^*[x(t)]$ двух ВХ параметров шероховатости – *Ra* и *Rz*.

В аналого-цифровых СОЭД вычисление *Ra* и *Rz* шероховатости производится по результатам измерений характеристик сигналов $x(t)$ первичных измерительных преобразователей (ПИП), далее – датчиков. Чаще всего применяются аналоговые контактные индукционные датчики профиля *y* шероховатости [3,4], выходные $x(t)$ которых через усилители, устройства нормировки и аналого-цифрового преобразования в цифровом виде должны поступать на вход СОЭД. При этом в сигнал $x(t)$ будут добавляться помехи $n(t)$ – шумы усилителя и активных фильтров, шумы, обусловленные другими физическими эффектами, а также и шумы квантования АЦП и канала связи СОЭД [5]. Влияние измерительного усилия при движении иглы по шероховатой поверхности тоже будет случайным.

Таким образом, можно считать, что методы вычисления характеристик шероховатости по оптимальному оператору – алгоритму $\langle q[x(t)]\rangle$ предполагают работу с вероятностными ММ сигналов $x(t)$, полученных контактным профильным методом [3] и помех $n(t)$. Выбор ВХ *к*-го порядка $\Theta_k[x(t)]$ и погрешностей вычисления их $\Theta_k^*[x(t)]$ определяют структуру СОЭД.

Если в качестве ММ шероховатости принят случайный процесс $\xi(t)$ с плотностью вероятности $W(x)$, удовлетворяющей условиям $W(x) \geq 0$ для всех *x* при нормировке $\int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = 1$, тогда среднее значение функции $\Theta[x(t)]$ определяется [7] как $\Theta^*[x(t)] = \int_{=\infty}^{\infty} x(t)W(x)dx = \Theta_{cp}$

Начальными моментами α_K *к*-го порядка ($k \in \overline{1,\infty}$) называют значения интегралов вида α_K

$$= \langle q[x(t)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^K(t) W(x) dx, \qquad (1),$$

Центральными моментами μ_K центрированного $x_0(t)$ называют значения интегралов вида

$$\mu_K = \langle q[x_0(t)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_0{}^K(t) W(x) dx, \qquad (2)$$

Моменты α_K и μ_K являются однозначными характеристиками $\xi(t)$, однако не у всякого $\xi(t)$ существуют (т.е. являются конечными) все α_K [7]. В предположении, что α_K и μ_K однозначно определяют $\xi(t)$ с заданным $W(x)$, вместо $\xi(t)$ можно рассматривать бесконечный ряд $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ или $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$ и в этом случае говорят о моментном представлении $\xi(t)$.

Поскольку $W(x)$ любого $\xi(t)$ всегда абсолютно интегрируема, постольку всегда существует, функция, сопряженная по Фурье, называемая характеристической функцией

$$\Theta(u) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x) e^{jux} dx = \left\langle e^{jux} \right\rangle, \qquad (3)$$

Обратное преобразование от $\Theta(u)$ к $W(x)$ выражается как

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(u) e^{-jux} du, \qquad (4)$$

причем этот интеграл может и не обладать сходимостью.

Пара Фурье-преобразований (3) и (4) позволяет говорить о $\Theta(u)$ как о тождественном представлении $W(x)$, при этом $\Theta(u)$ должна обладать следующими свойствами [8]:

$\Theta(0) = 1$; $\Theta(u)$ непрерывна для всех u;

$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(u) e^{jux} du \geq 0$;

$|\Theta(u) \leq \Theta(0)|$; $\Theta(-u) = \Theta^*(u)$ – т.е. являются комплексно сопряженными.

Отсюда следует, что моменты α_K можно получить k-кратным дифференцированием $\Theta(u)$ как

$$\alpha_K = j^{-k} \left[\frac{d^k \Theta(u)}{du^k} \right]_{u=0}, \qquad (5)$$

Иначе говоря, коэффициенты разложения $\Theta(u)$ в степенной ряд

$$\Theta(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_K}{K!} (ju)^n, \qquad (6)$$

определяются именно моментами распределения, а $\Theta(u)$ можно записать в виде $\Theta(u) = \exp[B(u)]$, где $B(0) = 0$.

При разложении $[B(u)]$ в степенной ряд

$$B(u) = \ln \Theta(u) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{C^K}{K!} (ju)^K, \qquad (7)$$

а его коэффициенты – *кумулянты C* (или *семиинварианты*) так же, как и моменты α_K и μ_K, являются характеристиками $W(x)$

$$C_K = j^{-K} B^K(0) = J^{-K} \left[\frac{d^K \ln \Theta(u)}{du^K} \right]_{u=0} \qquad (8)$$

Таким образом,

$$\Theta(u) = \exp \left[\sum_{K=1}^{\infty} \frac{C_K}{K!} (ju)^K \right] \qquad (9)$$

Если ряд (8) сходится, то набор C_K тождественно представляет $W(x)$.

При известных α_K и μ_K кумулянты могут быть найдены [8] как:

$$C_1 = \alpha_1 = M; C_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = D;$$
$$C_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^2;$$
$$C_4 = \alpha_4 - 3\alpha^2 - 4\alpha_1\alpha_3 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_1^4 \qquad (10)$$

В свою очередь, моменты α_K и μ_K выражаются через кумулянты:

$$\alpha_1 = C_1; \alpha_2 = C_2 = C_1^2;$$
$$\alpha_3 = C_3 + 3C_1C_2 + C_3^3;$$
$$\alpha_4 = C_4 + 3C_2^2 + 4C_1C_3 + 6C_1^2C_2 + C_1^4 \qquad (11)$$

Взаимосвязь C_K и μ_K получается аналогично при $\alpha_1 = C_1 = 0$

Первые два кумулянта имеют физический смысл – это математическое ожидание и дисперсия, третий кумулянт C_3 можно называть асимметрией, C_4 – эксцессом. Иногда вводят безразмерные кумулянты – *кумулятивные коэффициенты*

$$\gamma_n = \frac{C_n}{C_2^{n/2}} = \frac{C_n}{D^{n/2}} = \frac{C_n}{\sigma^n} \qquad (12)$$

Например, γ_3 и γ_4 называются коэффициентами асимметрии и эксцесса при описании степени отклонения $W(x)$ нормального $W_N(x)$

$$W_N(x) = (2\pi D)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-(x-M)^2/2D\right] \qquad (13)$$

у которого $C_1 = m$ и $C_2 = D$, а

$$C_3 = C_4 = ... = C_n = 0 \qquad (14)$$

При представлении $W(x)$, обладающую в общем случае всеми C_K, через характеристическую функцию вида

$$\Theta(u) = \exp\left[jmu - \frac{D}{2}u^2\right]\left[1 + \sum_{K=3}^{\infty}\frac{(ju)^K}{K!}\beta_K\right], \qquad (15)$$

где

$$\left[1 + \sum_{K=3}^{\infty}\frac{(ju)^K}{K!}\beta_K\right] = \exp\left[\sum_{K=3}^{\infty}\frac{(ju)^K}{K!}C_K\right] \qquad (16)$$

коэффициенты β_K, вычисленные как α_K при условии $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, являются по сути *квазимоментами* и тогда можно записать, что:

$$\beta_3 = C_3; \beta_4 = C_4; \beta_5 = C_5; \beta_6 = C_6 + 10C_3^2;$$
$$\beta_7 = C_7 + 35C_3C_4; \beta_8 = C_8 + 56C_3C_5 + 35C_4^2; ... \qquad (17)$$

Производя над (15) Фурье-преобразование, согласно [8], получим ряд

$$W(x) = W_N(x) + \sum_{K=3}^{\infty}(-1)^K \frac{\beta_K}{K!}W_N^{(K)}(x), \qquad (18)$$

который дает разложение произвольной плотности $W(x)$ по (*К)*-м производным нормального распределения $W_N(x)$

Сравнивая между собой (6), (9) и (16), можно также заметить, что α_K, β_K и C_K образуют ряд вида $\mu_S = \alpha_S$ при условии $C_1 = 0$ и $\beta_S = \alpha_S$ при условии $C_1 = C_2 = 0$. Для первых моментных функций имеются названия [7]:

$C_1(t) = \alpha_1(t) = M[x(t)]$ – среднее значение; $C_2(t) = B[t_1 t_2] = D[x(t)]$ – дисперсия; $C_2(t_1 t_2) = B[t_1 t_2]$ – ковариационная функция; $\alpha_2(t_1 t_2) = R[t_1 t_2]$ – корреляционная функция, $C_4(t_1, t_2, t_3 t_4)$ – *эксцессная функция* [8]

Кумулянты C_K более удобны, чем α_K и μ_K, при аналитических выкладках, т.к. высшими кумулянтами часто можно пренебречь, однако при аппаратурной реализации более простыми оказываются устройства измерения α_K и μ_K [9, 11]. В этом случае принято говорить о моментном представлении $\xi(t)$, которое даёт возможность классификации $\xi(t)$ по результатам вычисления в СОЭД оценок α_K и μ_K.

Например, на практике шероховатость может быть представлении ММ в виде $\xi(t)$ с такими законами распределения отклонения ординат *у* профиля:

а) нормальный усеченный (Гаусса), который описывает, в частности, рассеяние размеров в партии деталей средней точности (9…12 квалитетов), а также погрешности результатов измерений;

б) равнобедренного треугольника (Симпсона) — при обработке деталей с точностью 6...8 квалитетов;

в) равномерный (закон равной вероятности) – при обработке высокоточных деталей (4...5 квалитеты).

Для идентификации таких $\xi(t)$ достаточно вычисления первых четырёх моментов: $C_1(t) = \alpha_1(t) = M[x(t)]$ – математического ожидания, которое представляет собой ординату *m* средней линии профиля, для центрированного $x_0(t)$ ордината *m* =0; $\mu_2 = \Theta^*[x(t)]$ – вычисляемое значение *Ra* (*Rz*); $\alpha_3 = 0$ для стационарного $\xi(t)$; $\mu_4 = \Delta\Theta^*[x(t)]$ – погрешность вычисления *Ra* (*Rz*). Отличие от нуля *m* и α_3 свидетельствует о нестационарности случайных процессов [7, 8] – т.е. о необходимости формирования динамической ММ шероховатости.

Выводы. Приведенные формулы могут позволить оценить погрешность классификации статических математических моделей шероховатости, представляемых в виде стационарных, в том числе и негауссовых, случайных процессов, по результатам вычисления начальных и центральных моментов до четвёртого порядка. Предлагаемая методика может упростить процедуру проектирования СОЭД контроля качества изделий при реализации CALS-технологий.

Л и т е р а т у р а

1. Межгосударственный стандарт ГОСТ 2789-73 "Шероховатость поверхности. Параметры и характеристики" (введен постановлением Госстандарта СССР от 23 апреля 1973 г. N 995)
2. ГОСТ 27964-88 Измерение параметров шероховатости. Термины и определения
3. ГОСТ 19300-86 Средства измерений шероховатости поверхности профильным методом. Профилографы-профилометры контактные Типы и основные параметры
4. Марчук М. О. Проблематика розробки інформаційних технологій контролю якості шорсткості поверхні / Марчук М. О., Мірошниченко І. В. // Науковий журнал Технологічні комплекси № 1, 2 (5, 6) 2012, Луцький національний технічний університет, С. 57 – 61.
5. Детлинг В.С. Система измерения шероховатости поверхностей / Детлинг В. С, Мирошниченко И. В. // V Международная научно-техническая конференция “Гиротехнологии, навигация и управление движением” – Сборник докладов, Киев 21-22 апреля 2005 г. – С. 356 – 360.
6. Цветков Э. И. Основы теории статистических измерений.-2-е изд., перераб. и дополн. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 286 с.
7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Вентцель Е.С. – М.: Наука, 1969. – 576 с
8. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Советское радио, 1978 – 376 с.
9. Мирошниченко В. С. К вопросу об измерении числовых характеристик случайных процессов / Мирошниченко В. С., Тугуз Ю. Р. // Автоматика и электроприборостроение; Вестник Киев. политехн. ин-та. – 1976, вып. 19.
10. Тихонов В. И. Выбросы траекторий случайных процессов / Тихонов В. И., Хиленко В. И. – М.: Наука, 1987 – 303 с.
11. Мирошниченко В. С. О выборе параметров измерителей числовых характеристик случайных процессов / Мирошниченко В. С., Пономаренко В. К. // Радиоэлектроника; Изв. ВУЗов, 1971, № 7. – С. 822 – 824.
12. Детлинг В. С. Математическая модель шероховатости протяженных объектов / Детлинг В. С., Зинченко В. П., Мирошниченко И. В. // Шоста науково-технічна конференція “Приладобудування 2007: стан и перспективи” – Збірник тез доповідей, Киев, 24-25 квітня 2007 р. – С. 151 – 152.

R e f e r e n c e s

1. Mezhgosudarstvennyj standart GOST 2789-73 "Sherohovatost' poverhnosti. Parametry i harakteristiki" (vveden postanovleniem Gosstandarta SSSR ot 23 aprelja 1973 g. N 995)
2. GOST 27964-88 Izmerenie parametrov sherohovatosti. Terminy i opredelenija
3. GOST 19300-86 Sredstva izmerenij sherohovatosti poverhnosti profil'nym metodom. Profilografy-profilometry kontaktnye Tipy i osnovnye parametry
4. Marchuk M. O., Miroshnichenko I. V. Problematika rozrobki informacijnih tehnologij kontrolju jakosti shorstkosti poverhni // Naukovij zhurnal Tehnologichni kompleksi № 1, 2 (5, 6) 2012, Luc'kij nacional'nij tehnichnij universitet, S. 57-61
5. Detling V.S, Miroshnichenko I. V. Sistema izmerenija sherohovatosti poverhnostej // V Mezhdunarodnaja nauchno-tehnicheskaja konferencija “Girotehnologii, navigacija i upravlenie dvizheniem” – Sbornik dokladov, Kiev 21-22 aprelja 2005 g. – S. 356-360
6. Cvetkov Je.I. Osnovy teorii statisticheskih izmere-nij.-2-e izd., pererab. i dopoln. – L.: Jenergoatomizdat, 1986, 286 s.
7. Ventcel' E.S. Teorija verojatnostej. – M.: Nauka, 1969–576 s
8. Malahov A.N. Kumuljantnyj analiz negaussovyh processov i ih preobrazovanij. – M.: Sovetskoe radio, 1978 – 376 s.
9. Miroshnichenko V.S., Tuguz Ju.R. K voprosu ob izmerenii chislovyh harakteristik sluchajnyh processov // Avtomatika i jelektropriborostroenie; Vestnik Kiev. politehn. in-ta, 1976, vyp. 19
10. Tihonov V.I., Hilenko V.I. Vybrosy traektorij sluchajnyh processov – M.: Nauka, 1987 – 303 s.
11. Miroshnichenko V.S., Ponomarenko V.K. O vybore parametrov izmeritelej chislovyh harakteristik sluchajnyh processov // Radiojelektronika; Izv. VUZov, 1971, № 7, S. 822-824
12. Detling V.S., Zinchenko V.P., Miroshnichenko I.V. Matematicheskaja model' sherohovatosti protjazhennyh ob#ektov / Shosta naukovo-tehnichna konferencija “Prila-dobuduvannja 2007: stan i perspektivi” – Zbirnik tez do-povidej, Kiev, 24-25 kvitnja 2007 r., S. 151-152.

Мірошниченко І. В. Імовірнісні характеристики статичної математичної моделі шорсткості

Статичними математичними моделями шорсткості, що описують стан поверхні, можуть бути стаціонарні випадкові процеси з кінцевими значеннями випадкових відхилень ординат профілю шорсткості з законами розподілу: усіченим нормальним, рівномірним і Сімпсона.Для ідентифікації цих процессовв машинобудуванні досить обчислення перших чотирьох моментів: математичного очікування - ординати середньої лінії профілю шорсткості, рівній нулюдля центрованого процесу; другого центрального моменту - значення Ra або Rz, третього початкового моменту - асиметрії закону розподілу і четвертого центрального моменту - похибки обчислення Ra або Rz. Відмінність від нуля математичного сподівання і третього моменту свідчить про нестаціонарності процесу та необхідності формування динамічної математичної моделі шорсткості, яка описує послідовності станів поверхні.

Ключові слова: *обчислення перших чотирьох моментів, математична модель, асиметрія закону розподілу, математичне очікування.*

Miroshnichenko I. V. Probabilistic characteristics static mathematical model of roughness

Static mathematical model of rough, describing the state of the surface can be stationary random processes with finite values of the random variation of the roughness profile ordinates with the laws of distribution: truncated normal, uniform, and the identification of these enough engineering calculation of the first four moments: the expectation - ordinates of the center line roughness profile, equal centered process, the second central moment - the value Ra or Rz; third entry point - the asymmetry of the distribution, and fourth central moment - the calculation error or Ra Rz. Nonzero mean and third moment indicates non-stationary process and the necessity of dynamic mathematical model of roughness, describing the sequence of states of the surface.

Ke ywords: *evaluation of the first four moments, the mathematical model, the asymmetry of distribution law, the expectation.*

Мірошниченко І. В. ст. викладач кафедри АПЕПС ТЄФ НТУУ «КПІ», goodgod@ukr.net

Рецензент: ***Носко П.Л.,*** д.т.н., професор.

Статья подана 21.03.14