

УДК 678.074:620.17

РАСЧЕТ МНОГОСЛОЙНЫХ РЕЗИНОМЕТАЛЛИЧЕСКИХ АМОРТИЗАТОРОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Козуб Ю. Г., Козуб Г. А.

CALCULATION OF MULTILAYER RUBBER-METALL SHOCK- ABSORBERS IN NON-LINEAR POSITION

Kozub Y. G., Kozub G. A.

Для решения задачи динамического деформирования эластомерных элементов разработана математическая модель и разработан метод расчета конструкций с учетом физической и геометрической нелинейности слабосжимаемых вязкоупругих тел. Предложенный метод используется для решения связанной задачи термоупругости и определения долговечности на основе энергетического критерия.

Ключевые слова. Слабая сжимаемость, эластомер, долговечность, метод конечных элементов

Введение. В машиностроении и строительстве широкое распространение получили вязкоупругие демпфирующие элементы конструкций. Для уменьшения осадки таких демпфирующих конструкций их чаще всего изготавливают в виде многослойных резинометаллических пакетов, в которых основную демпфирующую функцию выполняют эластомерные слои. Исследованию вязкоупругих свойств резины, анализу деформирования и разрушения эластомерных элементов конструкций посвящено достаточно большое количество работ отечественных и зарубежных авторов [1-4]. Наиболее эффективным для описания вязкоупругих свойств является применение уравнений Вольтерра. В динамических расчетах следует учитывать эффекты демпфирования резиновых элементов конструкций, случайный характер возмущающих воздействий и наследственно-упругую реакцию на них [3, 5-9]. Чаще всего при исследовании поведения резины вводится гипотеза о несжимаемости этого материала. Однако при стесненных деформациях эта гипотеза неприемлива [10]. Аналитические решения уравнений в задачах о деформировании конструкций при циклическом нагружении получены лишь для одномерного случая, что значительно ограничивает возможности получить надежное решение для элементов конструкций, имеющих сложную форму. В этом случае наиболее эффективным является применение численных

методов решения задач в трехмерной постановке, одним из которых является метод конечных элементов. Целью работы является разработка эффективного метода решения задачи о деформировании и определении долговечности резинометаллических амортизаторов с учетом нелинейных свойств эластомера.

Результаты исследований и их обсуждение.

Деформирование конструкций из эластомеров под действием динамических нагрузок сопровождается существенной диссипацией энергии, которая всюю очередь сопровождается саморазогревом. Источниками теплообразования служат напряжения и скорости деформаций. На основе вариационного уравнения Био уравнение динамики эластомера имеет вид

$$\int_V (P_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dv + \int_S p_i \delta u_i ds = \delta W - \int_V \alpha_T (T - T_0) \delta \theta dv, \quad (1)$$

где P_i , p_i – компоненты объемных и поверхностных сил, ρ – плотность, α_T – коэффициент теплового расширения, $T - T_0$ – приращение температуры, W – функционал энергии тела, u_i – компоненты вектора перемещений, θ – относительное изменение объема. Это уравнение следует дополнить уравнением теплопроводности

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho c T_t dv dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \lambda_{(ij)} g^{ij} T_{,i} T_{,j} dv dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V w_0 T dv dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_S [q + h(T - T^c)] T ds dt \quad (2)$$

где ρ – плотность; c – теплоемкость; λ_{ij} – тензор теплопроводности; w_0 – мощность внутренних источников тепла; q – интенсивность тепловых потоков; h – коэффициент теплопередачи; T^c – температура окружающей среды.

При расчете эластомерных элементов конструкций в большинстве работ принимается гипотеза о несжимаемости материала с применением функционалов энергии несжимаемого тела. Такой подход позволяет получить решение для фиксированного значения коэффициента Пуассона.

Для нелинейного слабосжимаемого материала можно использовать модифицированный закон Гука

$$\sigma^{ij} = \int_0^{\epsilon_{mn}} \left(G^{ki} G^{lj} - \frac{1}{3} G^{ij} G^{kl} \right) d\epsilon_{ij} - \int_0^{G^x} B(\sqrt{I_3} - 1) dG^{mn}, \quad (3)$$

где G^{ij} – компоненты метрического тензора, I_3 – инвариант тензора деформаций. Упругое поведение эластомеров может быть описано с помощью специальных функционалов удельной потенциальной энергии деформации. Для слабосжимаемых материалов наиболее эффективными являются потенциалы Линдли та Пенга-Ландела. В качестве физических констант в них используются параметры Ляме.

Потенциал энергии деформации Пенга-Ландела в работе [11] преобразован к виду

$$W = \frac{\mu j_1}{\sqrt[3]{I_3}} + \frac{1}{2} B (\sqrt{I_3} - 1)^2. \quad (4)$$

Для функционала энергии деформации в законе Линдли используются кратности уклонений [12]

$$W = \frac{\mu}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \frac{B}{2} [(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - c)^2 - (1 - c)^2], \quad (5)$$

где λ_i кратности удлинения.

Законы Пенга-Ландела и Линдли при условии несжимаемости материала ($I_3 = 1$) практически сводятся к закону Гука.

В высокоэластичном состоянии проявляется вязкоупругое поведение эластомера, то есть носит чисто выраженный релаксационный характер. Большая вязкость, выраженный релаксационный характер напряжений, геометрическая и физическая нелинейность деформирования требует привлечения математического аппарата нелинейной трехмерной теории вязкоупругости. Используя принцип Вольтерра связь между компонентами напряжений и деформаций для нелинейного вязкоупругого слабосжимаемого материала можно принять в виде закона Гука, Пенга-Ландела или Линдли, заменяя упругие константы интегральными операторами Вольтерра.

Тогда для вязкоупругого материала имеем - закон Гука

$$\sigma^{ij} = 2\mu \left[g^{mi} g^{nj} \epsilon_{mn} - \frac{1}{3} j_1 g^{ij} - \int_{-\infty}^t R_\mu(t - \tau) \left(g^{mi} g^{nj} \epsilon_{mn} - \frac{1}{3} j_1 g^{ij} \right) d\tau \right] + B \left[(\sqrt{I_3} - 1) g^{ij} - \int_{-\infty}^t R_b(t - \tau) (\sqrt{I_3} - 1) g^{ij} d\tau \right]; \quad (6)$$

- закон Пенга-Ландела

$$\sigma^{ij} = \sqrt{I_3} \left[\mu \left(\left(-I_3^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{9} (I_3 - 1)(I_1 - 2) + \frac{2}{9} (I_3 - 1) \right) G^{ij} + I_3^{-\frac{4}{3}} g^{ij} \right) - \int_{-\infty}^t R_\mu(t - \tau) I_3^{-\frac{4}{3}} g^{ij} d\tau - \int_{-\infty}^t R_\mu(t - \tau) \left(-I_3^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{9} (I_3 - 1)(I_1 - 2) + \frac{2}{9} (I_3 - 1) \right) G^{ij} d\tau + \frac{B}{2} \left((I_3 - 1) G^{ij} - \int_{-\infty}^t R_b(t - \tau) (I_3 - 1) G^{ij} d\tau \right) \right]; \quad (7)$$

- закон Линдли

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \left[\mu \left(g^{ij} - I_3 G^{ij} - \int_{-\infty}^t R_\mu(t - \tau) (g^{ij} - I_3 G^{ij}) d\tau \right) + B \left(\frac{1}{2} c I_3 (I_3 - 1) G^{ij} - \int_{-\infty}^t R_b(t - \tau) \left(\frac{1}{2} c I_3 (I_3 - 1) G^{ij} \right) d\tau \right) \right]. \quad (8)$$

Наиболее полного описания реального процесса деформирования эластомерного элемента конструкции можно добиться используя ядра Работнова и Ржаницына.

Поскольку законы Пенга-Ландела та Линдли в предельном случае имеют вид закона Гука, то нелинейные уравнения можно линеаризовать для случая слабой сжимаемости материала.

Ковариантные компоненты тензора конечных деформаций имеют вид

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(C_j^m \nabla_i u_m + C_i^m \nabla_j u_m + \nabla_i u_m \nabla_j u_n g^{mn} \right),$$

где $\nabla_i u_m = u_{m,i} C_i^k \Gamma_{mk}^l u_l$; $C_i^n = \frac{\partial z^n}{\partial x^i}$; z^n –

координаты базисной системы координат; x^i – координаты местной системы координат.

Тензор деформаций можно представить в виде суммы линейной и нелинейной составляющих

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^l + \epsilon_{ij}^n.$$

Первый инвариант тензора деформаций Коши-Грина так же можно представить в виде суммы линейной и нелинейной составляющих

$$J_1 = J_1^{\prime} + J_1^{\prime\prime} .$$

После подстановки в соотношения для слабосжимаемого материала (например, для закона Пенга-Ландела) можно получить линеаризованные соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & \tilde{\mu}(g^{ij} - G^{ij}) + \tilde{B}j_1^{\prime} G^{ij} - \\ & - \frac{1}{3}\tilde{\mu}(H_1 g^{ij} - H_2 G^{ij}) + \tilde{B}\theta^{\prime} G^{ij} , \end{aligned} \quad (9)$$

или

$$\tilde{\sigma}^{ij} = 2\tilde{\mu}\varepsilon_{ij}^{\prime} + \tilde{B}j_1^{\prime} G^{ij} - \frac{1}{3}\tilde{\mu}(H_1 g^{ij} - H_2 G^{ij}) + \tilde{B}\theta^{\prime} G^{ij}$$

где $H_1, H_2, \theta^{\prime}$ - соотношения, обусловленные нелинейными составляющими инвариантов.

Кроме того, в выражении (9) можно выделить упругую и вязкую составляющие тензора напряжений

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & 2\mu\varepsilon_{ij}^{\prime} + B j_1^{\prime} G^{ij} - \frac{1}{3}\mu(H_1 g^{ij} - H_2 G^{ij}) + B\theta^{\prime} G^{ij} - \\ & - 2\mu \int_{-\infty}^t R_{\mu}(t-\tau)\varepsilon_{ij}^{\prime}(\tau)d\tau - B \int_{-\infty}^t R_b(t-\tau)j_1^{\prime}(\tau)G^{ij}d\tau - \\ & - \frac{1}{3}\mu \int_{-\infty}^t R_{\mu}(t-\tau)(H_1 g^{ij} - H_2 G^{ij})d\tau - B \int_{-\infty}^t R_b(t-\tau)\theta^{\prime} G^{ij}d\tau \end{aligned}$$

Модель вязкоупругой среды определяется включенными в нее упругими и вязкими компонентами. Усложняя структуру модели, можно получить хорошую временную связь между напряжениями и деформациями. При этом в пределе можно рассматривать модели с бесконечным множеством упругих и вязких элементов, что повышает порядок дифференциальных операторов и усложняет их применение при решении практических задач. Связь между напряжениями и деформациями можно установить и с помощью интегральных уравнений состояния. Пропорциональность между приращением деформаций и напряжений в интегральных уравнениях устанавливается с помощью функции, которая называется ядром уравнения. Наибольшее распространение при расчете эластомеров получило ядро релаксации Ю.Н. Работнова

$$R(z) = z^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n z^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]} .$$

Рассматриваем трехэлементную модель вязкоупругой среды.

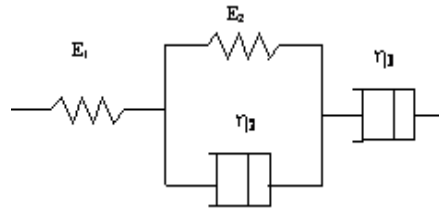


Рис. 1. Трехэлементная модель

Рассматривая поведение стареющего материала на основе приведенной схемы, для ее третьего элемента имеем $\sigma(t) = \eta_3(t)\varepsilon^p(t)$, откуда

$$\varepsilon^p(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta_3(t)} .$$

Функцию $\eta_3(t)$ представим в виде $\eta_3(t) = \eta_3(0)\varphi = \eta_{30}\varphi$, где φ - функция старения, соответствует кривой изменения во времени $E = E(t)$ - модуля упругости. Для расчета долговечности необходимо иметь аналитическое представление данной функции. Общей аппроксимацией экспериментальных данных для эластомеров является экспоненциальная зависимость []:

$$\varphi(t) = \frac{E(t)}{E(0)} = \exp\left[\left(k_1 - k_2 \int_0^t W(t)dt\right)t\right] ,$$

где k_1, k_2 - коэффициенты аппроксимации, $W(t)$ - функция, пропорциональная накопленной за время t энергии деформации.

Критериальное уравнение состояния при циклическом нагружении имеет вид:

$$\Delta U_p^* = \int_0^{t^*} (\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\chi} - \dot{q})dt , \quad (10)$$

где ΔU_p^* предельное (критическое) значение плотности энергии, идущей на разрушение резины; \dot{q} - тепловой поток; $\dot{\chi}$ - энергия внешней агрессивной среды; t^* - время до локального разрушения.

Для определения долговечности эластомеров используется следующий алгоритм расчета:

1. Расчет напряженно-деформированного и температурного состояний эластомерной конструкции.

2. Определение опасной точки.

3. Решение критериального уравнения (10) в опасной точке.

Конструкции из эластомеров, работающие в динамическом режиме нагружения, подвержены

интенсивному диссипативному разогреву. Источниками теплообразования в этом случае являются напряжения $\sigma^{ij}(t)$ и скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}(t)$ в вязкоупругом теле.

Для решения задачи о динамическом равновесии эластомерного элемента конструкции следует вначале решить задачу о свободных колебаниях.

Для большинства задач о свободных колебаниях упруго-наследственного тела используется уравнение в виде

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0,$$

$$\text{где } \omega^2 \varphi(t) = \omega_0^2 \left[\varphi(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right].$$

Рекуррентная формула для решения характеристического уравнения имеет вид

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 \left[1 - R \left(\frac{1}{i\omega_n - 1} \right) \right].$$

После проведения преобразований Фурье получим

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 [1 - A(\omega_{n-1}) + iB(\omega_{n-1})],$$

где

$$A(\omega) = \int_0^\infty K(z) \cos \omega z dz = \operatorname{Re} K \left(\frac{1}{i\omega} \right),$$

$$B(\omega) = \int_0^\infty K(z) \sin \omega z dz = -\operatorname{Im} K \left(\frac{1}{i\omega} \right).$$

$$1 - A(\omega_0) = \frac{E(\omega_0)}{E_0}, \quad B(\omega_0) = \frac{\psi(\omega_0)}{2\pi},$$

где E_0 – мгновенный модуль упругости; $E(\omega_0)$ – динамический модуль при $\omega = \omega_0$; $\psi(\omega_0)$ – технический коэффициент поглощения при $\omega = \omega_0$.

Для изучения термонапряженного состояния такого рода конструкций предполагается совместное решение задач термоупругости и теплопроводности. Наиболее эффективным методом решения таких задач является метод конечных элементов. Построение разрешающих уравнений метода конечных элементов для трехмерной задачи строится на основе использования интерполяционных функций формы для описания полей перемещений, скоростей и ускорений

$$(u : \dot{u} : \ddot{u})_k = \sum_{s=1}^8 N_{(s)} (u : \dot{u} : \ddot{u})_k^{(s)},$$

где $N_{(s)}$ – степенные функции формы для s -го узла конечного элемента; $(u : \dot{u} : \ddot{u})_k^{(s)}$ – векторы перемещений, скоростей и ускорений s -го узла конечного элемента по k направлению в базисной системе координат.

Для обеспечения высокой точности и эффективности процесса решения широкого класса задач иногда целесообразно повысить степень аппроксимирующих функций.

Тогда уравнение движения (1) можно записать в виде системы дифференциальных уравнений

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Gu = f(t), \quad (11)$$

где M – матрица масс; C – матрица демпфирования; G – матрица жесткости; $f(t)$ – вектор узловых сил.

Для определения компонент матрицы жесткости вариацию потенциальной энергии деформации можно записать в виде

$$\delta\Pi = \int_V \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} dv.$$

Используя тройную аппроксимацию полей перемещений, деформаций и функции изменения объема [3] получаем матрицу жесткости конечного элемента, моделирующего процесс деформирования слабосжимаемого эстомера

$$\delta\Pi = \delta\{u_s\}^T \{N\} [D_{ij}^s]^T [C^{ijkl}] [D_{kl}^t] \{N\}^T \{u_t\} + \\ + \delta\{u_s\}^T \{N\} [D_0^s]^T [C^0] [D_0^t] \{N\}^T \{u_t\} = \delta\{u_s\}^T [G] \{u_t\},$$

где $[C^{ijkl}]$, $[C^0]$ – матрицы упругих констант; $[D]$ – матрица дифференцирования; $\{u_t\}$ – вектор узловых перемещений.

Матрицу масс вычисляем по формуле

$$M = \int_V \{N\} \rho \{N\}^T dv.$$

Определение матрицы матрицы демпфирования с помощью матриц, описывающих свойства конечных элементов не представляется возможным. Поэтому чаще всего ее приближенно вычисляют в виде линейной комбинации матриц жесткости и масс.

Если известны n коэффициентов демпфирования соответствующих форм собственных колебаний, матрицу демпфирования можно приближенно вычислить по формуле

$$C = M \sum_{i=0}^{n-1} a_i (M^{-1}G)^i,$$

где коэффициенты a_i определяются из решения уравнений

$$h_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_{k-1} \omega_i^{2k-3}).$$

Для $n = 2$ выражение приводится к формуле релеевского демпфирования.

Для прямого интегрирования уравнений динамического деформирования чаще всего используется метод Ньюмарка, согласно которому векторы перемещений, скоростей и ускорений на концах временного отрезка $[t; t + \Delta t]$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{u}_{t+\Delta t} &= \dot{u}_t + [(1 - \delta)\ddot{u}_t + \delta\ddot{u}_{t+\Delta t}]\Delta t, \\ u_{t+\Delta t} &= u_t + \dot{u}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{u}_t + \alpha\ddot{u}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2, \end{aligned}$$

где $\delta \geq 0,5$, $\alpha \geq 0,25(0,5 + \delta)^2$ – условия, при которых рассматриваемая схема интегрирования устойчива.

Выражая из скорость и ускорение в конечный момент времени $t + \Delta t$ получаем рекуррентное соотношение относительно перемещений в этот момент времени

$$\begin{aligned} Mb_1 u_{t+\Delta t} + Cb_1 b_5 u_{t+\Delta t} + Gu_{t+\Delta t} &= f(t + \Delta t) + \\ + M(b_1 u_t + b_2 \dot{u}_t + b_3 \ddot{u}_t) &+ \\ + C(b_1 b_5 u_t + (b_2 b_5 - 1)\dot{u}_t + (b_3 b_5 - b_4)\ddot{u}_t) & \end{aligned}$$

где $b_1 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}$, $b_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$, $b_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$, $b_4 = \Delta t(1 - \delta)$, $b_5 = \delta \Delta t$.

Определив перемещения на конце временного интервала можно определить скорости и ускорения в этот же момент времени

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{t+\Delta t} &= b_1(u_{t+\Delta t} - u_t) - b_2 \dot{u}_t - b_3 \ddot{u}_t, \\ \dot{u}_{t+\Delta t} &= \dot{u}_t + b_4 \ddot{u}_t + b_5 \ddot{u}_{t+\Delta t}. \end{aligned}$$

Температурное поле саморазогрева эластомерной конструкции с использованием метода конечных элементов определяется по следующему алгоритму:

1. Решается задача термоупругости при заданной амплитуде колебаний

$$[K^{ij}] \{u_j\} = \{P^i\} + \{Q^i\},$$

где $[K^{ij}]$ – глобальная матрица жесткости конструкции; $\{u_j\}$ – обобщенный вектор перемещений; $\{P^i\}$ – вектор нагрузки от

вынужденных смещений на поверхности тела; $\{Q^i\}$ – вектор температурной нагрузки.

2. Вычисляем мощность внутренних источников теплообразования как осредненную за цикл колебания по формуле

$$w_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma^{ij}(t) \dot{\epsilon}_{ij}(t) dt,$$

где ω – частота колебания.

3. Температуру саморазогрева определяем для момента наступления теплового равновесия между конструкцией и окружающей средой путем решения задачи стационарной теплопроводности:

$$[H]\{T\} = -\{R\},$$

где $[H]$ – глобальная матрица теплопроводности конструкции; $\{T\}$ – обобщенный вектор узловых температур; $\{R\}$ – эквивалентный вектор тепловой нагрузки.

4. Для учета связности полей напряжений и температур процесс решения повторяется, начиная с пункта 1. Удовлетворительное решение получается уже с первым приближением.

В результате реализации приведенного алгоритма получаем поле узловых температур, поле интенсивности внутренних источников и термоупругих напряжений в центрах конечных элементов, которые являются исходными данными для определения долговечности эластомеров.

Наибольшее влияние на долговечность эластомеров оказывают механические напряжения и температура. Если имеется n точек с различными значениями удельной потенциальной энергии деформации $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ и различными температурами $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$, расчет долговечности производится для всех n точек. В большинстве случаев нет необходимости рассчитывать долговечность для каждой точки конструкции. Расчет ведется относительно опасной точки, т.е. той, в которой разрушение начинается в первую очередь.

Практически опасная точка определяется следующим образом: выбираются две точки $O_1(U_1, T_1)$ и $O_2(U_2, T_2)$, причем в одной из точек $U_1 = \max$, а в другой $T_2 = \max$ и расчет производится для этих точек.

Рассмотрим задачу о деформировании резинометаллического амортизатора опорного узла тепловоза

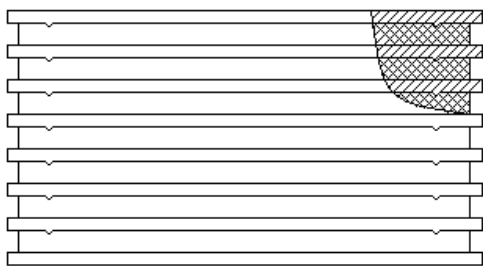


Рис.2. Резинометаллический амортизатор

Радиус армирующего металлического слоя и резинового элемента 0,14м, толщина резинового элемента 0,035м, металлического слоя – 0,004м., количество элементов – 7.

Для снижения осадки используются металлические пластины с буртом размером 0,01м, ус по бурту 0,1м. На рис.3. приведены эпюры напряжений.

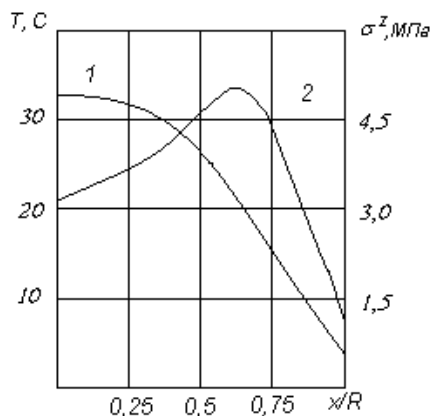


Рис.3. Распределение температур и нормальных напряжений в резиновом элементе: 1 – температура; 2 – нормальные напряжения в срединном сечении резинового слоя

Решение критериального уравнения долговечности (10) дает оценочное значение срока службы резинометаллического амортизатора при вибрационной нагрузке порядка 4,5 года.

Выводы. Для анализа процессов динамического деформирования конструкций из эластомеров разработан метод расчета конструкций с учетом физической и геометрической нелинейности.

Определение долговечности элементов конструкций выполняется на основе решения связанной задачи термоупругости слабосжимаемого вязкоупругого тела.

Л и т е р а т у р а

1. Определение реологических параметров эластомерных материалов / [В. И. Дырда, Ю. Г. Козуб, А. С. Кобец и др.]// Геотехническая механика. – 2007. – Вып. 70. – С. 56-88.
2. Влияние физической нелинейности на резонансные

колебания и диссипативный разогрев жестко опертой толстостенной вязкоупругой цилиндрической панели / Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Сичко В. М., Завгородний А. В. // Акустичний вісник. – 2010. – т. 13. – №2. – С. 28-33.

3. Вынужденные резонансные колебания и диссипативный разогрев трехслойной толстостенной шарнирно опертой вязкоупругой цилиндрической панели с независимыми от температуры свойствами / Козлов В. И., Карнаухов В. Г., Сичко В. М., Завгородний А. В. // Акустичний вісник. – 2010. – т. 13. – №1. – С. 22-29.
4. Сичко В. М. Вынужденные резонансные изгибные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругой прямоугольной толстой пластины / В. М. Сичко, А. В. Завгородний, М. И. Вертелецкий // Доп.НАНУ. – 2010. – №9. – С. 44-49.
5. Аврамов К. В. Нелинейные колебания круглых пластин с вырезами. Метод R-функций / К. В. Аврамов // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №2 – С. 118-127.
6. Шопа Т. В. Дослідження частот власних коливань трансверсально-ізотропної циліндричної панелі з круговим отвором / Т. В. Шопа // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №2 – С. 128-137.
7. Сметанкіна Н. В. Нестационарні коливання багатопарових ортотропних оболонок неканонічної форми / Н. В. Сметанкіна // Вібрації в техніці та технологіях. – 2009. – №3(55). – С. 38-41.
8. Івасишен С. Д. Задача Коші для рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова багатовимірного марковського процесу / С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, №1 – С. 15-22.
9. Бреславский И. Д. Вынужденные колебания пологой цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми и свободными краями / И. Д. Бреславский, К. В. Аврамов // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – №36. С. 20-29.
10. Приближенная реологическая модель материала тонкослойного эластомерного подшипника/ [Лейканд М. А., Лавендел Э. Э., Львов С. В. и др.]// Вопр. динамики и прочности. – 1980.– Вып. 36. – С. 157-168.
11. Адамов А. А. К выбору функционала для описания поведения вязкоупругого материала при конечных деформациях / А. А. Адамов // Научн. Тр. Кубан. гос. ун-та. – 1980. – т. 3: Механика эластомеров. – С. 56-59.
12. Бартенева Г. М. Физика и механика полимеров / Г. М. Бартенева, Ю. В. Зеленев. – М.: Высш. шк., 1983. – 391с.

References

1. Opredelenie reologicheskikh parametrov jelastomernyh materialov / [V. I. Dyrda, Ju. G. Kozub, A. S. Kobec i dr.]// Geotekhnicheskaja mehanika. – 2007. – Vyp. 70. – S. 56-88.
2. Vlijanie fizicheskoj nelinejnosti na rezonansnye kolebanija i dissipativnyj razogrev zhestko opertoj tolstostennoj vjazkouprugoj cilindricheskoj paneli / Karnauhov V. G., Kozlov V. I., Sichko V. M., Zavgorodnij A. V. // Akustichnij visnik. – 2010. – t. 13. – №2. – S. 28-33.
3. Vynuzhdennye rezonansnye kolebanija i dissipativnyj razogrev trehslojnoj tolstostennoj sharnirno opertoj vjazkouprugoj cilindricheskoj paneli s nezavisjashhimi ot temperatury svojstvami / Kozlov V. I., Karnauhov V. G., Sichko V. M., Zavgorodnij A. V. // Akustichnij visnik. –

2010. – т. 13. – №1. – С. 22-29.
4. Sichko V. M. Vynuzhdennye rezonansnye izgibnye kolebanija i dissipativnyj razogrev vjazkouprugoj prjamougol'noj tolstoj plastiny / V. M. Sichko, A. V. Zavgorodnij, M. I. Verteleckij // Dop.NANU. – 2010. – №9. – С. 44-49.
 5. Avramov K. V. Nelinejnye kolebanija kruglih plastin s vyrezami . Metod R-funkcij / K. V. Avramov // Mat. metodi ta fiz.-meh. polja. – 2009. – 52, №2 – С. 118-127.
 6. Shopa T. V. Doslidzhennja chastot vlasnih kolivan' transversal'no-izotropnoi cilindrichnoi peneli z krugovim otvorom / T. V. Shopa // Mat. metodi ta fiz.-meh. polja. – 2009. – 52, №2 – С. 128-137.
 7. Smetankina N. V. Nestacionarni kolivannja bagatosharovich ortotropnih obolonok nekanonichnoi formi / N. V. Smetankina // Vibracii v tehnicі ta tehnologijah. – 2009. – №3(55). – С. 38-41.
 8. Ivasishen S. D. Zadacha Koshi dlja rivnjannja Fokkera-Planka-Kolmogorova bagatovimirnogo markov'skogo procesu / S. D. Ivasishen, G. S. Pasichnik // Mat. metodi ta fiz.-meh. polja. – 2010. – 53, №1 – С. 15-22.
 9. Breslavskij I. D. Vynuzhdennye kolebanija pologoj cilindricheskoj obolochki s sharnirno opertymi i svobodnymi krajami / I. D. Breslavskij, K. V. Avramov // Vestnik NTU «HPI». – 2008. – №36. С. 20-29.
 10. Priblizhennaja reologicheskaja model' materiala tonkoslojnjogo jelastomernogo podshipnika/ [Lejkand M. A., Lavendel Je. Je., L'vov S. V. i dr.]// Vopr. dinamiki i prochnosti. – 1980.– Vyp. 36. – С. 157-168.
 11. Adamov A. A. K vyboru funkcionala dlja opisanija povedenija vjazkouprugogo materiala pri konechnyh deformacijah / A. A. Adamov // Nauchn. Tr. Kuban. gos. un-ta. – 1980. – т. 3: Mehanika jelastomerov. – С. 56-59.
 12. Bartenev G. M. Fizika i mehanika polimerov / G. M. Bartenev, Ju. V. Zelenev. – М.: Vyssh. shk., 1983. – 391s.

Козуб Ю. Г., Козуб Г. О. Розрахунок багатшарових гумометалевих амортизаторів у нелінійній постановці

Для розв'язання задачі динамічного деформування еластомірних елементів розроблено математичну модель та метод розрахунку конструкції з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності слабостисливих в'язкопружних тіл. Запропонований метод використовується для рішення зв'язаної задачі термопружності і визначення довговічності на основі енергетичного критерію.

Ключові слова. Слабка стисливість, еластомір, довговічність, метод скінченних елементів.

Kozub Y. G., Kozub G. A. Calculation of multilayer rubber-metall shock-absorbers in non-linear position

The elastomeric elements of constructions are shown by such properties as viscoelasticity, weak compressibility. Especially these properties show up for think layer constructions. For the decision of task of dynamic deformation of elastomeric elements a mathematical model is developed and the method of calculation of constructions is developed taking into account physical and geometrical non-linearity of weak compressible viscoelastic bodies on the basis of finite element method. The offered method is used for the decision of the linked problem of thermoelasticity and calculation of longevity on the basis of power criterion.

Keywords. Weak compressibility, elastomer, longevity, finite element method.

Козуб Юрій Гордійович, к. т. н., доцент, доцент кафедри технологій виробництва і професійної освіти Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Козуб Галина Олександрівна, к. т. н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій і систем Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Рецензент: **Рач В.А.**, д.т.н., професор.

Стаття подана 16.06.14