УДК 510.21:378.147

ПРОБЛЕМА КОНЕЧНОГО И БЕСКОНЕЧНОГО В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Бродский А.Л.

THE PROBLEM OF FINITE AND INFINITE IN THE TEACHING OF MATHEMATICS

Brodsky A.L.

В статье анализируются некоторые аспекты проблемы конечного и бесконечного в математике. Дано краткое описание методических проблем преподавания математики в средней и высшей школах. Приведено доказательства, что математика способствует формированию абстрактного мышления у школьников и студентов. Наличие в математике проблем философского характера обязывает усилить философскую подготовку преподавателей математики, а также обучить их адаптировать изложение материала под разные уровни подготовки слушателей.
Ключевые слова: *математика, философия, бесконечное, случайность.*

1. Введение

Математика – специфический способ теоретического описания действительности, область знаний, имеющая свой особый статус в системе наук.

Абстрактный характер объектов математики, неопровержимость её доказательств еще тысячи лет назад привлекали внимание философов.

Основным философским вопросом математики является вопрос об отношении математических понятий, аксиом теорий, правил к реальному миру. Ответ на этот вопрос определяет и решение других философских вопросов внутри самой математики. Отсутствие полной и общепринятой философской разрешимости этих проблем, наличие нескольких конкурирующих теорий обоснования математики (структурализм, конструктивизм и т.п.) не должно препятствовать построению логически непротиворечивого и доступного математического образования.

Особенно важна такая доступность для обязательного школьного курса математики, а также для курсов математической подготовки специалистов-нематематиков.

2. Цель работы — рассмотрение в изложенном ракурсе проблемы конечного и бесконечного в математике, в том числе в методиках её преподавания.

Некоторые аспекты этой проблемы имеются в работах древнегреческих ученых (“Ахилл и черепаха” у Зенона). В средние века наблюдаем исследование понятия *бесконечность*, в частности выделены отдельно “потенциальная бесконечность” — как некий результат неограниченно повторяющейся процедуры, и “актуальная бесконечность” — как нечто противоположное по содержанию конечному и уже реализованное на данный момент. Появление в математике исчисления бесконечно малых (инфинитиземалей) вновь привлекло математиков и философов к проблеме конечного и бесконечного. Несмотря на прекрасные практические результаты, гениальное открытие Лейбница и Ньютона не было признано многими учеными.

Однако, диалектика развития науки и образования через несколько веков сделали теорию бесконечномалых (и её продолжения) основой современного математического анализа.

Этапы (блоки) математического образования в основном повторяют в динамике этапы развития самой математики. Так в начальной школе к абстрактному понятию “число” приходят постепенно в процессе решения конкретных задач с конечным числом предметов или людей. Таким образом, реализуется вполне доступная для понимания концепция реализма, где первичным является некоторое количество реальных объектов, а вторичным — соответствующее математическое описание (модель).Несколько позже (7кл.) впервые появляется упоминание о бесконечности (процедура продолжения параллельных прямых).С точки зрения соответствующей классификации, речь идет о *потенциальной бесконечности*. Такой же является и множество всех натуральных чисел N (9кл.), где алгоритм $n \to n+1$ обеспечивает для *любого* натурального числа вычисление следующего.

Однако, рассмотрение множества всех действительных чисел R уже является примером *актуальной бесконечности*. Интересно, что соответствующий геометрический образ — числовая прямая даже в изображении отрезка не теряет характеристики актуальной бесконечности, поскольку *любой* отрезок *уже* содержит бесконечное множество точек. Парадоксы теории множеств не рассматриваются в школьной математической программе. В своей практической работе математики-преподаватели средней (и высшей) школы игнорируют утверждения о несуществовании актуальной бесконечности, подкрепленные доказательствами с опорой на классическую логику и "здравый смысл". Дело в том, что упомянутые "логика" и "смысл" действительно являются надежными инструментами человеческой практики. Но это практика работы с *конечными* множествами объектов, предметов, событий и т.п. Поэтому, с точки зрения математики выглядит достаточно наивным, например, высказывание "если множество бесконечно, то к нему нельзя добавить элемент".

Математики рассматривают важное понятие — *мощность* бесконечного множества (аналог *количества* элементов конечного множества). Между множествами одинаковой мощности можно установить взаимно-однозначное соответствие — *эквивалентность*. Таким образом, например отрезок $[0,1]$ эквивалентен отрезку $[0,2]$, функции $y = 2x$ и $x = \frac{y}{2}$ для прямого и обратного соответствия. Именно такие результаты, озвученные как "часть равна целому" и противоречат "здравому смыслу".

В дисциплине "Высшая математика" неоднократно встречаются противоречия и взаимодействия конечного и бесконечного. Так, в разделе "Введение в математический анализ" изучается понятие бесконечно малой величины. Противоречивость данного понятия в том, что переменная величина (последовательность) в процессе своего изменения может стать по модулю меньше *любого* заранее заданного положительного числа. Таким образом потенциальная бесконечность *количества значений* этой величины реализуется в конкретный результат — число ноль. Бесконечно малые величины являются, в свою очередь, надежным основанием таких понятий как "предел функции", "определенный интеграл", "сумма ряда".

Раздел "Теория вероятностей" занимает особое положение в силу специфики предмета и метода. Событие называется *случайным*, если оно может произойти в результате испытания (эксперимента). Если событие не может произойти в таких условиях, его называют *невозможным*. *Вероятность* понимается как количественная характеристика (мера) возможности появления случайного события. Соответственно, для невозможного события его вероятность равна нулю. Однако, обратное утверждение может быть неверным. *Случайной величиной* называется переменная величина, которая в результате испытания принимает одно из своих возможных значений. Если такие значения изолированы — величина называется дискретной; если *целиком* заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал — *непрерывной*.

Рассмотрим некоторую случайную величину X с интервалом возможных значений $[a,b]$. Несложно доказать, что вероятность следующего события $A: X \in [a,b]$ равна 1 (такие события называются достоверными). По условию *весь* интервал состоит из значений случайной величины X, т.е. возможна *любая* реализация $X = x^*$, $x^* \in [a,b]$, т.е. вероятность этого события положительна. Однако доказывается противоположный результат: $P(B^*: X = x^*) = 0$. Противоречие связано с *бесконечным* числом точек отрезка $[a,b]$ по которому "размазана" общая вероятность, равная 1 так, что каждой точке "достается" исчезающе малая (нулевая) вероятность. Данная проблема снимается *запретом* на вопрос о вероятности попадания случайной величины X в данную точку. Корректным объявляется вопрос о вероятности попадания X в интервал $[\alpha,\beta]$ с $[a,b]$; такая вероятность *всегда* будет положительной.

Выводы. Математика является основным, базовым предметом для развития у школьников и студентов способностей к абстрактному мышлению, моделированию реальных практических задач. Наличие внутри самой математики ряда проблем философского характера не должно влиять на качество математического образования. Одним из условий обеспечения этого качества можно считать достаточную философскую подготовку преподавателей школ и ВУЗов; их умение адаптировать изложение соответствующих разделов математики к возрасту и уровню подготовки школьников и студентов.

Литература

1. Катасонов В.Н. Бесконечность // Новая философская энциклопедия -М., Мысль, 2010, -Т. 1-281с.
2. Беляев Е.А., Перминов В.Я. Философские и методологические проблемы математики, МГУ, 1981.-214с.
3. Грасиан Э. Открытие без границ. Бесконечность в математике –М., Де Агостини, 2014-144с. (Мир математики Т. 18)
4. Антология философии математики.- М., Добросвет, 2002, 420с.

References

1. Katasonov V.N. Beskonechnost // Novaya filosofskaya entsiklopediya -M., Myisl, 2010, -T. 1-281s.
2. Belyaev E.A., Perminov V.Ya. Filosofskie i metodologicheskie problemyi matematiki, MGU, 1981.-214s.
3. Grasian E. Otkryitie bez granits. Beskonechnost v matematike –M., De Agostini, 2014-144s. (Mir matematiki T. 18)
4. Antologiya filosofii matematiki.- M., Dobrosvet, 2002, 420s.

Бродський О.Л. Проблема кінцевого і нескінченного в викладанні математики

У статті аналізуються деякі аспекти проблеми кінцевого і нескінченного в математиці. Дано короткий опис методичних проблем викладання математики в середній та вищій школах. Наведено докази, що математика сприяє формуванню абстрактного мислення у школярів і студентів. Наявність в математиці проблем філософського характеру зобов'язує посилити філософську підготовку викладачів математики, а також навчити їх адаптувати виклад матеріалу під різні рівні підготовки слухачів.

Ключові слова: *математика, філософія, нескінченне, випадковість.*

Brodsky A.L. The problem of finite and infinite in the teaching of mathematics

In the article, some aspects of the problem of finite and infinite in mathematics are analyzed. The aim of the work is to consider, in the foregoing perspective, the problem of finite and infinite in mathematics, including in the methods of its teaching. In the discipline of "Higher Mathematics" there are repeatedly contradictions and interactions of the finite and the infinite. Mathematicians consider an important concept - the power of an infinite set (an analog of the number of elements of a finite set). Between sets of the same cardinality one can establish a one-to-one correspondence-equivalence. It is shown that mathematics contributes to the formation of abstract thinking in schoolchildren and students. The presence in mathematics of problems of a philosophical nature obliges to strengthen the philosophical preparation of mathematics teachers, and to teach them to adapt the presentation of the material to different levels of training of listeners.

Keywords: *mathematics, philosophy, infinite, randomness.*

Бродський Олександр Львович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри програмування та математики Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля, 93400, Луганська обл., м. Сєвєродонецьк, вул. Донецька, 41, лабораторний корпус

Рецензент: д.т.н., професор ***Глікін М. А.***

Стаття подана 30.03.2017