УДК: 51:378.147

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИМЕРОВ И КОНТРПРИМЕРОВ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Бродский А.Л.

THE USE OF EXAMPLES AND COUNTEREXAMPLES IN THE TEACHING OF MATHEMATICS

Brodskiy A.L.

Рассматривается одна из главных проблем преподавания математики в ВУЗах- необходимость доступности изложения при сохранении достаточной строгости и точности. Обсуждается возможность использования в разных темах соответствующих примеров и контрпримеров. Приведены конкретные результаты для шести разделов курса высшей математики.

Ключевые слова: *математика, доказательство, пример, контрпример*

1. Введение. Математика является базовой дисциплиной современного инженерно-технического образования. Более того, потребности многих гуманитарных специальностей привели к необходимости изучения отдельных математических дисциплин (разделов, тем).

Проблемы методики преподавания математики, по-видимому, так же стары, как и сама математика. Вопросам математического образования студентов в последнее время уделяли внимание ведущие математики-методисты, в том числе Т.С.Максимова, В.А.Петрук, З.И.Слепкань и др. Следует отметить также серьезные исследования [1],[2],[3]. Появление новых компьютерных, информационных технологий не может полностью решить эти проблемы, потому что их сутью является, в основном, вопросы содержания изучаемого материала и методов его рассмотрения, а не реализация того и другого в соответствующих формах.

Неоднократная попытка организовать изучение математики в ВУЗах для нематематических специальностей по проблемно-ориентированному принципу, эксперименты по решению конкретных задач экономики, социологии, инженерных дисциплин вместо(или вместе) с математической теорией можно считать успешно провалившимися. Подтверждением этого является, например, исчезновение таких учебных дисциплин, как «Математика для экономистов» и др.

Таким образом, в очередной раз жизнью подтвержден главный принцип математического образования: сначала теория (определения, теоремы, свойства, следствия), а потом приложения- решение конкретных примеров и задач. И адаптация общей математической теории для соответствующей специальности может быть реализована только в упрощении теоретического материала, а не в его исключении или «переводе» с абстрактного математического языка на язык конкретной задачи.

2. Формулировка проблемы. Главным элементом математической теории является теорема: логическая конструкция, состоящая из условия (условий) и утверждения. Истинность теоремы устанавливается ее доказательством. «Доказательства…представляют собой цепочки умозаключений, ведущих от истинных посылок (исходных для данного доказательства суждений) к доказываемым (заключительным) тезисам».[4]

«Математическое доказательство - рассуждение с целью обоснования истинности какого-либо утверждения (теоремы), цепочка логических умозаключений, показывающая, что при условии истинности некоторого набора аксиом и правил вывода утверждение верно».[5]

Значительное уменьшение доказательств в курсе «Высшая математика» для студентов инженерных специальностей вызвано двумя главными причинами. Первая из них -«внешняя»: сокращение количества аудиторных (в том числе, лекционных) часов, что, в свою очередь, имеет ряд причин. Вторая – «внутренняя» - это изменение уровня и содержания математической подготовки поступающих в ВУЗы на соответствующие специальности. Ориентация на тесты, на «ответ» без обязательного объяснения, решения, доказательства делает выпускников средних школ слабо подготовленными (или практически неподготовленными) как для понимания содержания математических доказательств, так и для осознания их важности и необходимости.

Поэтому перед преподавателем математики в ВУЗе возникает проблема: совместить в сложившихся условиях простоту и доступность с необходимой строгостью и точностью, заменить доказательства теорем (признаков, свойств) чем-то другим, менее сложным и затратным по времени.

Чаще всего для такой замены используются специально разработанные (подобранные) примеры и контрпримеры.

3. Результаты работы. Как известно, никакой пример (или несколько примеров) в математике не равносильны доказательству теоремы или признака. Контрпример может быть доказательством неверности обратного утверждения или, в общем случае, обязательности одного или нескольких условий теоремы.

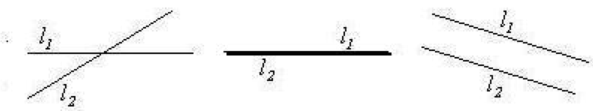
Сочетание примеров и контрпримеров и является хорошим методическим приемом для достижения поставленной цели: доступно и наглядно пояснить некоторый математический результат без приведения полного формального доказательства. Рассмотрим иллюстрацию изложенного принципа на конкретных примерах из различных разделов курса «Высшая математика».

I. Раздел «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

Формулируется теорема Кронекера-Капелли, затем – ее более доступный вариант.

Теорема. Если определитель системы трех уравнений с тремя неизвестными не равен нулю, система имеет единственное решение. Если определитель системы рамен нулю и все определители неизвестных также равны нулю – система имеет множество решений. Если в последнем случае хотя бы один из определителей неизвестных не равен нулю, система не имеет решений (несовместна).

Далее достаточно показать три картинки,



которые являются иллюстрацией теоремы для двумерного случая и решить три системы уравнений

$$а)\begin{cases} 2x+3y=12 \\ x-\ y=1 \end{cases} \quad б)\begin{cases} 4x-2y=5 \\ 8x-4y=10 \end{cases} \quad в)\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=0 \end{cases}$$

II. Раздел «Введение в математический анализ»

Утверждение. Если существует предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Контрпример (доказательство необходимости ограниченности последовательности для существования предела):

$x_n = n$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, т.е. не существует в первичном смысле (конечный предел)

Пример недостаточности ограниченности последовательности для существования ее предела:

$x_n = (-1)^n$; $\lim\limits_{n\to} x_n \neq$. Предел не существует, хотя $|x_n| = 1$, $n \in N$.

III. Раздел «Производная и ее приложения»

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Контрпример. $y = |x|$, $x_0 = 0$.Отсутствие производной в точке непрерывности показывает необходимость непрерывности в данной точке для существования производной в этой точке.

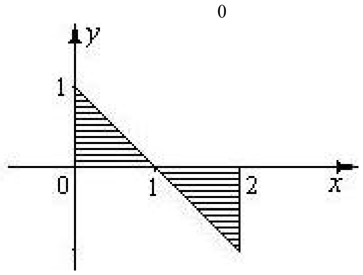
Теорема. Если $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то производная $f'(x_0) = 0$ или не существует.

Примером является та же функция $y = |x|$ с минимумом в точке $x_0 = 0$ при отсутствии производной в этой точке.

IV. Раздел «Определенный интеграл»

Свойство. $\int\limits_a^b f(x)dx = S_{тр}$, если $f(x) > 0$.

Контрпример. $\int\limits_0^2 (1-x)dx = 0$



- обязательность условия $f(x) > 0$.

Теорема. Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ необходимо условие $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Контрпример (недостаточность условия $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$):

$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}dx = \infty$ - расходящийся интеграл.

V. Раздел «Числовые ряды»

Теорема. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Это необходимый признак сходимости числового ряда.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2=\infty$ - не выполнено условие $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

Контрпример (недостаточность необходимого признака):

гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, хотя условие $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ выполнено.

VI. Раздел «Теория вероятностей»

Свойство. Если X-дискретная случайная величина с набором значений $x_1,x_2,\ldots x_n$ $\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, то сумма соответствующих вероятностей равна единице $\sum_{k=1}^{n}p_k=1$ (или $\sum_{n=1}^{\infty}p_n=1$).

Пример. Стрелок производит выстрелы по мишени до первого попадания. Составить закон распределения случайной величины X - количества сделанных выстрелов, если вероятность попадания в каждом выстреле равна p, $p\in(0,1)$.

Получаем следующий результат,

X	1	2	3	…	n	…
p	q	qp	qp^2	…	qp^{n-1}	…

где $q=1-p$ - дополнительная вероятность (вероятность промаха).

Следовательно,

$$q+qp+qp^2+\cdots+qp^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}qp^{n-1}=q\sum_{n=1}^{\infty}p^{n-1}=$$

$=q\frac{1}{1-p}=1$, что и утверждается в данном свойстве.

4. Выводы. Использование примеров и контрпримеров в курсе «Высшая математика» дает возможность увеличить доступность изложения теоретического материала с достаточной экономией времени.

Литература

1. Крилова Т.В., Стеблянко П.О. Професійно орієнтоване навчання математики в технічному вузі – першочергова задача сьогодення / Т.В. Крилова, П.О. Стеблянко // Вісник Черкаського університету. Науковий журнал. Педагогічні науки. – 2008. - №127. – С. 98-101.
2. Амброзяк О.В. Компоненти методичної системи евристичного формування геометричних понять/О.В. Амброзяк // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : збірник наукових праць. Випуск XI : в 3-х томах. – Кривий Ріг : Видавничий відділ КМІ, 2013. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики - С. 3-12.
3. Рендюк С. П. Особливості викладання математичних дисциплін у вищих технічних навчальних закладах [Електронний ресурс] / С. П. Рендюк // Науковий вісник Донбасу : електронне наук. фахове вид. – 2013.– № 1 (21).
4. Большая Советская Энциклопедия, т.8, стр.399.
5. Математический энциклопедический словарь. Mathematical-Encyclopedia-cover /Гл. ред. Ю. В. Прохоров.— М.: Сов. энциклопедия, 1988. -С.211.

References

1. Krilova T.V., Stebljanko P.O. Profesijno oriєntovane navchannja matematiki v tehnichnomu vuzi – pershochergova zadacha s'ogodennja / T.V. Krilova, P.O. Stebljanko // Visnik Cherkas'kogo universitetu. Naukovij zhurnal. Pedagogichni nauki. – 2008. - №127. – S. 98-101.
2. Ambrozjak O.V. Komponenti metodichnoї sistemi ev-ristichnogo formuvannja geometrichnih ponjat'/O.V. Amb-rozjak // Teorija ta metodika navchannja matematiki, fiziki, informatiki : zbirnik naukovih prac'. Vipusk XI : v 3-h tomah. – Krivij Rig : Vidavnichij viddil KMI, 2013. – T. 1: Teorija ta metodika navchannja matematiki - S. 3-12.
3. Rendjuk S. P. Osoblivosti vikladannja matematichnih disciplin u vishhih tehnichnih navchal'nih zakladah [Elektronnij resurs] / S. P. Rendjuk // Naukovij visnik Donbasu : elektronne nauk. fahove vid. – 2013.– № 1 (21).
4. Bol'shaja Sovetskaja Jenciklopedija, t.8, str.399.
5. Matematicheskij jenciklopedicheskij slovar'. Mathematical-Encyclopedia-cover /Gl. red. Ju. V. Prohorov.— M.: Sov. jenciklopedija, 1988. -S.211.

Бродський О.Л. Використання прикладів та контрприкладів при викладанні математики

Розглядається одна з головних проблем викладання математики у ВНЗ – необхідність доступності при збереженні строгості та точності. Обговорюється можливість використання відповідних прикладів та контрприкладів в різних темах. Наведені конкретні результати для шістьох розділів курсу вищої математики.

Ключові слова: *математика, доказ, приклад, контрприклад*

Brodskiy A.L. The use of examples and counterexamples in the teaching of mathematics

We consider one of the main problems in the teaching of mathematics in University – the need for accessibility while maintaining rigor and accuracy. The possibility of some examples and counterexamples using is discussed. Real results for six parts of the course of mathematics are given.

Keywords: *mathematics, proof, example, counterexample*

Бродський Олександр Львович – к.ф-м.н., доцент, доцент кафедри математики та програмування Східноукраїнського Національного університету імені В. Даля, brai@list.ru

Рецензент: д.т.н., проф. ***Суворін О.В.***

Статья подана 1.04.2018