УДК 539.3

ЗМІШАНА ПРОСТОРОВА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРИШАРОВИХ ПЛАСТИН

Галич В.А.

MIXED SPATIAL PROBLEM THEORY OF ELASTICTY FOR THREE-LAYER PLATES

Galich V.

У статті розглянуто питання пошуку потенціального рішення змішаної тривимірної задачі теорії пружності для тришарової пластини, симетричної відносно серединної площини будови. Пластина може бути послаблена отворами. Шари пластини вважаються ізотропними. Переміщення на торцевих поверхнях пластини дорівнюють нулю, а між шарами пластини існує ідеальний механічний контакт. На бічній поверхні задаються напруги, які симетричні відносно поперечної координати (задача типу розтягу-стискання). У кінцевому підсумку проблема зводиться до задачі по знаходженню власних значень і власних функцій.

***Ключові слова**: змішана задача, тришарова пластина, ідеальний механічний контакт, потенціальне рішення, переміщення.*

Вступ. Багатозв'язкові пластини знаходять широке застосування в якості елементів конструкцій в багатьох галузях сучасної промисловості. Особливу роль серед них відіграють шаруваті композиційні матеріали, зокрема тришарові пластині.

Постановка проблеми. Для розрахунку таких пластин на міцніть використовуються, як правило, прикладні двовимірні теорії, в яких напруги і переміщення усереднюються по товщині пластини. Такий підхід приводить до значних похибок при оцінці напружено-деформованого стану пластин. Тому більшу увагу слід приділяти розвитку методів розв'язку задач теорії пружності для багатошарових пластин в просторовій постановці.

Аналіз останніх досліджень і результатів. Перші результати по знаходженню напружено-деформованого стану тришарових пластин в тривимірній постановці були отримані в працях І.І. Воровича, Кадомцева І.Г., Устинова Ю.А. Для цього ними був застосований метод однорідних рішень за допомогою якого напружено-деформований стан був представлений у вигляді суми трьох складових: бігармонічної, потенціальної та вихрової. Подальший розвиток цей напрямок досліджень знайшов в працях вчених донецької школи механіків: О.С.Космодаміанського, В.А. Шалдирвана, Є.В. Алтухова, В.А. Галича. Зокрема, були отримані розв'язки задач про напружено-деформований стан тришарових пластин с трансверсально-ізотропними шарами, а також з урахуванням впливу температури на розподіл напруг в пластині.

Мета статті. Отримати потенціальну складову напружено-деформованого стану для тришарової пластини з однорідними умовами на торцевій поверхні в переміщеннях.

Постановка задачі. Розглянемо симетричну відносно серединної площини тришарову пластину, що складається з ізотропних шарів. Пластина може бути як безкінечною, так і обмеженою зовнішньою циліндричною бічною поверхнею Ω_0, а також внутрішніми циліндричними поверхнями Ω_i. Віднесемо пластину до прямокутної системи координат x_i ($i=1,2,3$), при цьому координати x_1, x_2 сумістимо з серединною площиною пластини, а вісь x_3 направимо в поперечному напрямку по товщині пластини. Таким чином, $-(h_1+h_2) \le x_3 \le h_1+h_2$, де $h_1 -$ товщина однакових зовнішніх шарів, $2h_2 -$ товщина внутрішнього шару пластини. В подальшому величини, що відносяться до зовнішніх шарів будемо позначати індексом 1, а до внутрішнього шару – 2. Пружні характеристики шарів характеризуються модулями зсуву G_j^* і коефіцієнтами Пуассона ν_j , де $j -$ номер шару. Припускаємо, що пластина деформується лише за рахунок зовнішніх зусиль, що прикладені до бічної поверхні, а на торцевій плоскій поверхні переміщення дорівнюють нулю (змішана задача теорії пружності). Будемо також вважати, що між шарами пластини існує ідеальний механічний контакт.

Виклад основного матеріалу досліджень. Введемо наступні безрозмірні величини:

$$\xi=\frac{x_1}{R},\ \eta=\frac{x_2}{R},\ \varsigma=\frac{x_3}{h}=\frac{1}{\lambda}\frac{x_3}{R},$$
$$\lambda=h/R,\ h=h_1+h_2,\ \lambda_1=h_1/h \qquad (1)$$
$$\lambda_2=h_2/h,\ u_{kj}=u^*_{mj}/R,\ \sigma_{klj}=\sigma^*_{mnj}/2G^*_1,$$

де $k,l=\xi,\eta,\varsigma;\quad m,n=1,2,3;\quad G_j=G^*_j/G^*_1;\quad u_{kj},\sigma_{klj}$ – безрозмірні переміщення і напруги j – ого шару, R – характерний лінійний розмір пластини в площині ξ,O,η.

Задача зводиться до інтегрування рівнянь рівноваги в переміщеннях

$$M_{1j}\partial^2U_j+\lambda M_{2j}\partial U_j+\lambda^2M_{3j}U_j=0, \qquad (2)$$

де

$$M_{1j}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\mu_{2j}\end{Vmatrix},\quad M_{2j}=\begin{Vmatrix}0&0&\mu_{1j}\partial_1\\0&0&\mu_{1j}\partial_2\\\mu_{1j}\partial_1&\mu_{1j}\partial_2&0\end{Vmatrix},$$

$$M_{3j}=\begin{Vmatrix}D^2+\mu_{1j}\partial_1^2&\mu_{1j}\partial_1\partial_2&0\\\mu_{1j}\partial_1\partial_2&D^2+\mu_{1j}\partial_2^2&0\\0&0&D^2\end{Vmatrix},\quad U_j=\begin{Vmatrix}u_{\xi j}\\u_{\eta j}\\u_{\varsigma j}\end{Vmatrix},$$

$$\partial_1=\frac{\partial}{\partial\xi},\quad \partial_2=\frac{\partial}{\partial\eta},\quad D^2=\partial_1^2+\partial_2^2,\quad \partial=\frac{\partial}{\partial\varsigma},$$

$$\mu_{1j}=\frac{1}{1-2\nu_j},\quad \mu_{2j}=\frac{2(1-\nu_j)}{1-2\nu_j}.$$

Граничні умови жорсткого защемлення торців пластини мають вигляд

$$U_1\big|_{\varsigma=1}=0. \qquad (3)$$

Умови ідеального механічного контакту шарів пластини можна представити так:

$$U_1=U_2\big|_{\varsigma=\lambda_2},\quad \sigma_1=\sigma_2\big|_{\varsigma=\lambda_2}, \qquad (4)$$

де $\sigma_j=\begin{Vmatrix}\sigma_{\varsigma\varsigma j}\\\sigma_{\varsigma\xi j}\\\sigma_{\eta\varsigma j}\end{Vmatrix}$.

Формула (2) представляє собою систему диференціальних рівнянь в приватних похідних відносно переміщень. Відомо, що в змішаних задачах теорії пружності для пластин з однорідними граничними умовами на торцевій поверхні загальне рішення можна представити у вигляді суми двох складових: потенціальної та вихрової. В даній роботі зосередимось на пошуку потенціального рішення системи (2) з урахуванням граничних умов (3) і (4).

Для знаходження потенціального рішення системи рівнянь рівноваги застосуємо на пів обернений метод. Відповідно до нього переміщення будемо шукати у вигляді

$$u^{\Pi}_{\xi j}=n_j(\varsigma)\partial_1C(\xi,\eta),\ u^{\Pi}_{\eta j}=n_j(\varsigma)\partial_2C(\xi,\eta),$$
$$u^{\Pi}_{\varsigma j}=q_j(\varsigma)C(\xi,\eta), \qquad (5)$$

де функція $C(\xi,\eta)$ задовольняє метагармонійному рівнянню

$$D^2C-\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2C=0. \qquad (6)$$

Вимагаючи, щоб переміщення (5) задовольняли системі (2), отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $n_j(\varsigma),q_j(\varsigma)$:

$$\partial^2n_j+\gamma^2\frac{2(1-\nu_j)}{1-2\nu_j}n_j+\lambda\frac{1}{1-2\nu_j}\partial q_j=0,$$
$$\partial^2q_j+\gamma^2\frac{1-2\nu_j}{2(1-\nu_j)}q_j+\frac{\gamma^2}{\lambda}\frac{1}{2(1-\nu_j)}\partial n_j=0. \qquad (7)$$

Із рівнянь (3),(4) випливають граничні умови для функцій $n_j(\varsigma),q_j(\varsigma)$.:

$$n_1(1)=0,q_1(1)=0,n_1(\lambda_2)=n_2(\lambda_2),q_1(\lambda_2)=q_2(\lambda_2),$$
$$\lambda q_1(\lambda_2)-G_2\lambda q_2(\lambda_2)+\partial n_1(\lambda_2)-G_2\partial n_2(\lambda_2)=0,$$
$$\partial q_1(\lambda_2)-G_2\frac{1-\nu_2}{1-2\nu_2}\frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1}\partial q_2(\lambda_2)+\frac{\gamma^2}{\lambda}\frac{\nu_1}{1-\nu_1}* \qquad (8)$$
$$*n_1(\lambda_2)-G_2\frac{\gamma^2}{\lambda}\frac{\nu_2}{1-2\nu_2}\frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1}n_2(\lambda_2)=0.$$

При отриманні співвідношень (8) були використані рівняння закону Гука у вигляді

$$\sigma_{\varsigma\varsigma j}=G_j\left[\frac{\nu_j}{1-2\nu_j}(\partial_1u_{\xi j}+\partial_2u_{\eta j})+\lambda^{-1}\frac{1-\nu_j}{1-2\nu_j}\partial u_{\varsigma j}\right],$$
$$\sigma_{\xi\varsigma j}=\frac{G_j}{2}(\partial_1u_{\varsigma j}+\lambda^{-1}\partial u_{\xi j}),\ \sigma_{\eta\varsigma j}=\frac{G_j}{2}(\partial_2u_{\varsigma j}+\lambda^{-1}\partial u_{\eta j}).$$

Система диференціальних рівнянь (7) при граничних умовах (8) представляють собою задачу штурма-ліувілівського типу на власні функції $n_j(\varsigma),q_j(\varsigma)$ і власні значення γ. Функції $n_j(\varsigma),q_j(\varsigma)$ будемо шукати у вигляді

$$n_1(\varsigma) = a_1 \cos\gamma\varsigma + a_2 \sin\gamma\varsigma + a_3\varsigma \cos\gamma\varsigma + a_4\varsigma \sin\gamma\varsigma,$$
$$q_1(\varsigma) = b_1 \cos\gamma\varsigma + b_2 \sin\gamma\varsigma + b_3\varsigma \cos\gamma\varsigma + b_4\varsigma \sin\gamma\varsigma,$$
$$n_2(\varsigma) = a_5 \cos\gamma\varsigma + a_6\varsigma \sin\gamma\varsigma,$$
$$q_2(\varsigma) = b_5 \sin\gamma\varsigma + b_6\varsigma \cos\gamma\varsigma.$$

Вимагаючи, щоб дані функції задовольняли системі рівнянь (7), отримаємо

$$q_1(\varsigma) = -a_1 \frac{\gamma}{\lambda} \sin\gamma\varsigma + a_2 \frac{\gamma}{\lambda} \cos\gamma\varsigma + a_3\left[\frac{-3+4\nu_1}{\lambda} * \right.$$
$$\left. * \cos\gamma\varsigma - \frac{\gamma}{\lambda}\varsigma \sin\gamma\varsigma\right] + a_4\left[\frac{-3+4\nu_1}{\lambda} \sin\gamma\varsigma + \frac{\gamma}{\lambda}\varsigma \cos\gamma\varsigma\right],$$
$$q_2(\varsigma) = -a_5 \frac{\gamma}{\lambda} \sin\gamma\varsigma + a_6\left[\frac{-3+4\nu_2}{\lambda} \sin\gamma\varsigma + \frac{\lambda}{\lambda}\varsigma \cos\gamma\varsigma\right].$$

Підставляючи знайдені функції $n_j(\varsigma), q_j(\varsigma)$ в граничні умови (8), отримаємо лінійну однорідну систему шести рівнянь відносно шести невідомих

$$a_1 \cos\gamma + a_2 \sin\gamma + a_3 \cos\gamma + a_4 \sin\gamma = 0,$$
$$-a_1\gamma \sin\gamma + a_2\gamma \cos\gamma + a_3((-3+4\nu_1)\cos\gamma -$$
$$-\gamma \sin\gamma) + a_4\left[(-3+4\nu_1)\sin\gamma + \gamma\cos\gamma\right] = 0,$$
$$a_1 \cos\gamma\lambda_2 + a_2 \sin\gamma\lambda_2 + a_3\lambda_2 \cos\gamma\lambda_2 +$$
$$+ a_4\lambda_2 \sin\gamma\lambda_2 - a_5 \cos\gamma\lambda_2 - a_6\lambda_2 \sin\gamma\lambda_2 = 0,$$
$$-a_1\gamma \sin\gamma\lambda_2 + a_2\gamma \cos\gamma\lambda_2 + a_3((-3+4\nu_1) *$$
$$* \cos\gamma\lambda_2 - \gamma\lambda_2 \sin\gamma\lambda_2) + a_4((-3+4\nu_1)\sin\gamma\lambda_2 +$$
$$\gamma\lambda_2 \cos\gamma\lambda_2) + a_5\gamma \sin\gamma\lambda_2 - a_6((-3+4\nu_2) *$$
$$* \sin\gamma\lambda_2 + \gamma\lambda_2 \cos\gamma\lambda_2) = 0,$$
$$-a_1 2\gamma \sin\gamma\lambda_2 + a_2 2\gamma \cos\gamma\lambda_2 + a_3((-2+4\nu_1) *$$
$$* \cos\gamma\lambda_2 - 2\gamma\lambda_2 \sin\gamma\lambda_2) + a_4((-2+4\nu_1)\sin\gamma\lambda_2 +$$
$$+ 2\gamma\lambda_2 \cos\gamma\lambda_2) + a_5 2G_2\gamma \sin\gamma\lambda_2 - a_6 G_2 *$$
$$* ((-2+4\nu_2)\sin\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2 \cos\gamma\lambda_2) = 0,$$
$$a_1 \frac{2\nu_1 - 1}{1-\nu_1}\gamma^2 \cos\gamma\lambda_2 + a_2 \frac{2\nu_1 - 1}{1-\nu_1}\gamma^2 \sin\gamma\lambda_2 +$$
$$+ a_3(2(1-2\nu_1)\gamma \sin\gamma\lambda_2 + \frac{2\nu_1 - 1}{1-\nu_1}\gamma^2\lambda_2 \cos\gamma\lambda_2) +$$
$$+ a_4(-2(1-2\nu_1)\gamma \cos\gamma\lambda_2 + \frac{2\nu_1 - 1}{1-\nu_1}\gamma^2\lambda_2 *$$
$$* \sin\gamma\lambda_2) + a_5 G_2 \frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1}\gamma^2 \cos\gamma\lambda_2 + a_6 G_2 *$$
$$* \frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1}(2(1-\nu_2)\cos\gamma\lambda_2 + \gamma^2\lambda_2 \sin\gamma\lambda_2) = 0.$$

$a_1, a_2, ..., a_6$:

Для того, щоб ця система мала нетривіальне рішення необхідно прирівняти її визначник нулю. В результаті отримаємо трансцендентне рівняння для знаходження власних значень задачі γ :

$$\Delta(\gamma) \equiv \gamma(G_2^2 \frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1}\lambda_2 \cos\gamma\lambda_2((-3+4\nu_1)\sin\gamma\lambda_2 +$$
$$+ \gamma\lambda_2 \cos\gamma\lambda_2)(4(1-\nu_2)\gamma \sin\gamma\lambda_2 \cos\gamma\lambda_2 + 2\gamma^2\lambda_2 *$$
$$* \sin^2\gamma\lambda_2 + (-2+4\nu_2)\gamma^2 \sin\gamma\lambda_2 \cos\gamma\lambda_2 + 2\gamma^3\lambda_2 *$$
$$* \cos^2\gamma\lambda_2) - ...) + ... - (-3+4\nu_1)\sin^2\gamma(2G_2^2 *$$
$$* \frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1}\gamma \sin\gamma\lambda_2 \cos\gamma\lambda_2((-3+4\nu_1)\cos\gamma\lambda_2 - \gamma\lambda_2 *$$
$$* \sin\gamma\lambda_2)(2(1-\nu_2)\cos\gamma\lambda_2 + \gamma^2\lambda_2 \sin\gamma\lambda_2) + ...$$
$$+ G_2\gamma\lambda_2 \sin^2\gamma\lambda_2(\frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1}\gamma^2 \cos\gamma\lambda_2((-2+4\nu_1) * \qquad (9)$$
$$* \cos\gamma\lambda_2 - 2\gamma\lambda_2 \sin\gamma\lambda_2) - 2\gamma \sin\gamma\lambda_2(2(1-2\nu_1)\gamma *$$
$$* \sin\gamma\lambda_2 + \frac{2\nu_1 - 1}{1-\nu_1}\gamma^2\lambda_2 \cos\gamma\lambda_2))) = 0.$$

Корні γ_p трансцендентного рівняння (9) розташовані на комплексній площині симетрично відносно координатних осей. При цьому кожному кореню γ_p відповідає і комплексно пов'язаний корінь $\bar{\gamma}_p$.

Знаючи числа γ_p , можна знайти функцію С, що задовольняє мета гармонійному рівнянню (6). Так, у випадку осесиметричної задачі для полого циліндру ця функція має вигляд

$$C_p(r) = A_p K_0(\gamma_p r/\lambda) + B_p I_0(\gamma_p r/\lambda), \qquad (10)$$

де K_0, I_0 − модифіковані функції Бесселя, r − полярний радіус. Невідомі коефіцієнти A_p, B_p дозволяють задовольнити граничним умовам на бічній поверхні пластини.

Висновок. Потенціальний напружено-деформований стан тришарової пластини із нульовими переміщеннями на торцях зводиться до знаходження власних функцій і власних значень для задачі штурма-ліувілівського типу, а також до розв'язку мета гармонійного рівняння. Розв'язок мета гармонійного рівняння для ряду областей може бути представленим через модифіковані функції Бесселя.

Л і т е р а т у р а

1. Космодамианский А.С. Толстые многосвязные пластины/ А.С. Комодамианский, В.А. Шалдырван. - Киев: Наукова думка, 1978. – 240 с.
2. Галич В.А. Изгиб транстропных трехслойных плит/ В.А. Галич, А.С. Космодамианский, В.А. Шалдырван// Доклады АН УССР. – 1981. - №1.- С. 35-39.
3. Галич В.А. Метод однородных решений в смешанных задачах теории упру гости и термоупругости для толстых многосвязных пластин/ В.А. Галич, А.С. Космодамианский, Е.В. Алтухов// Доклады АН УССР. – 1981. - №3. – С. 62-65.
4. Галич В.А. Однородные решения задач теории упру гости для трехслойных плит с транстропными слоя-

ми/В.А. Галич// Теоретическая и прикладная механiка. – Киев-Донецк: Выща школа, 1982. - №1. – С. 11-15.
5. Галич В.А. Однородные решения задач термоупругости для трехслойных пластин при неидеальном тепловом контакте слоїв/ В.А.Галич, А.С. Космодамианский// Доклады АН УССР. – 1982. - №3. – С. 26-28.
6. Галич В.А. К определению трехмерного напряженого состояния трехслойных пластин с трансверсально-изотропными слоями/ В.А. Галич, В.А. Шалдырван// Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. - №6. – С. 131-134.
7. Галич В.А. Смешанная задача теории упругости для изотропного цилиндра/ В.А. Галич, К.И. Горохов, А.С. Космодамианский // Доклады АН УССР. – 1986. -№7. – С. 36-39.
8. Ворович И.И. Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты/ И.И. Ворович, И.Г. Кадомцев// Прикладная математика и механика. – 1970. – Вып.5. – С. 870-876.

R e f e r e n c e s

1. Kosmodamiansky AS Thick multiply plates / A.S. Komodamiansky, V.A. Shaldyrvan. - Kiev: Naukova Dumka, 1978. - 240 p.
2. Galich V.A. Bend of transtropic three-layer plates / V.A. Galich, A.S. Kosmodamiansky, V.A. Shaldyrvan // Reports of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. - 1981. - №1.- P. 35-39.
3. Galich V.A. The method of homogeneous solutions in mixed problems of the theory of elasticity and thermoelasticity for thick multiply connected plates / V.A. Galich, A.S. Kosmodamiansky, E.V. Altukhov // Reports of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. - 1981. - №3. - P. 62-65.
4. Galich V.A. Homogeneous solutions of problems of the theory of elasticity for three-layer plates with transtropic layers / V.A. Galich // Theoretical and applied mechanics. - Kiev-Donetsk: Higher School, 1982. - №1. - P. 11-15.
5. Galich V.A. Homogeneous solutions of thermoelasticity problems for three-layer plates with non-ideal thermal contact of layers / V.A. Galich, A.S. Cosmodamian // Reports of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. - 1982. - №3. - P. 26-28.
6. Galich V.A. On the determination of the three-dimensional stress state of three-layer plates with transversely isotropic layers / V.A. Galich, V.A. Shaldyrvan // News of the Academy of Sciences of the USSR. Solid mechanics. - 1982. - №6. - P. 131-134.
7. Galich V.A. Mixed problem of the theory of elasticity for an isotropic cylinder / V.A. Galich, K.I. Gorokhov, A.S. Cosmodamian // Reports of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. - 1986. -№7. - P. 36-39.
8. Vorovich I.I. Qualitative study of the stress-strain state of a three-layer plate / I.I. Vorovich, I.G. Kadomtsev // Applied Mathematics and Mechanics. - 1970. - Issue 5. - P. 870-876.

Галич В.А. Смешанная пространственная задача теории упругости для трехслойных пластин.

В статье рассмотрены вопросы поиска потенциального решения смешанной трехмерной задачи теории упругости для трехслойной пластины, симметричного относительно срединной плоскости строения. Пластина может быть ослаблена отверстиями. Слои пластины считаются изотропными. Перемещение на торцевых поверхностях пластины равны нулю, а между слоями пластины существует идеальный механический контакт. На боковой поверхности задаются напряжения, которые симметричны относительно поперечной координаты (задача типа растяжения-сжатия). В конечном итоге проблема сводится к задаче по нахождению собственных значений и собственных функций.

Ключевые слова: *смешанная задача, трехслойная пластина, идеальный механический контакт, потенциальное решение, перемещения.*

Galich V.A. Mixed spatial problem theory of elasticity for three-layer plates.

The article deals with the search for a potential solution of the mixed three-dimensional problem of the theory of elasticity for a three-layer plate that is symmetrical with respect to the median plane of the structure. The plate may be weakened by the holes. Layers of the plate are considered isotropic. The displacement on the end surfaces of the plate is zero, and between the layers of the plate there is an ideal mechanical contact. On the side surface, stresses are specified that are symmetrical with respect to the transverse coordinate (a problem of the type of tension-compression). In the end, the problem is reduced to the problem of finding eigenvalues and eigenfunctions.

Keywords*: mixed problem, three-layer plate, ideal mechanical contact, potential solution, displacements.*

Галич В.А. – к. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри «Програмування та математики» СНУ ім.. Володимира Даля, tetatet_teta@ukr.net

Рецензент: д.т.н., проф., ***Глікін М.А.***

Стаття подана 10.12.2018.