УДК 621.371:621.398

ОПЕРАТИВНЫЙ КОНТРОЛЬ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. В. Авраменко, *доцент;*
Н. Ю. Слепушко, *ассистент,*
Сумский государственный университет, г. Сумы

По известным в текущий момент времени колебаниям $x(t)$ *и их производным, а также по известным параметрам внешнего воздействия можно осуществлять оперативный контроль параметров нелинейных колебательных систем с помощью функции непропорциональности.*

Ключевые слова: *непропорциональность, оперативный контроль, нелинейные колебательные системы.*

За відомими у поточний момент часу коливаннями $x(t)$ *та їх похідними, а також за відомими параметрами зовнішнього впливу можна здійснювати оперативний контроль нелінійних коливальних систем за допомогою функцій непропорційності.*

Ключові слова: *непропорційність, оперативний контроль, нелінійні коливальні системи.*

ВВЕДЕНИЕ

Существует широкий класс динамических объектов, в которых возникают колебания вследствие внешних периодических воздействий. В частности, внешние воздействие может быть гармоническим. К таким объектам относятся различные механические системы, состоящие из инерционной массы, демпфирующего устройства и пружин с нелинейной зависимостью жесткости от величины сжатия или растяжения. Движение этой системы описывается уравнением Дуффинга [1]:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\alpha\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x+hx^3=G\cos(\omega_1 t+\theta)\,, \qquad (1)$$

где α – коэффициент диссипации (демпфирования);

ω_0, h – коэффициенты, зависящие от параметров системы;

G, ω_1, θ – амплитуда, частота и фаза внешнего воздействия.

Это уравнение также описывает работу последовательной электрической цепи, содержащей емкость и индуктивность при условии, что один из этих элементов нелинейный.

Одним из явлений, наблюдаемых в системах, описываемых уравнением Дуффинга, является скачкообразное изменение амплитуды колебаний, возможное даже при плавном и непрерывном изменении частоты или амплитуды возмущения. В это же время возбуждаются высшие гармоники, кратные частоте возмущения [1]. Даже при неизменных параметрах возмущающего воздействия скачки амплитуды колебаний в объекте могут происходить вследствие неконтролируемых изменений во времени его параметров $\alpha,\ \omega_0,\ h$. Так, в механической системе могут изменятся масса, условия для трения в демпфере, жесткость пружины. Оперативное определение значений этих параметров непосредственно во время работы объектов позволяет избежать возникновения скачков амплитуды колебаний и поддерживать заданный режим. Такое определение возможно, если осуществляется контроль текущих значений параметров внешнего воздействия, а также текущих колебаний $x(t)$.

ПОСТАНОВКА И ХОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Дано $G,\ \omega_1, \theta$ и $x(t)$. Определить текущие значения коэффициентов α, ω_0, h в уравнении (1). Предполагается, что $x(t)$ гладкая и имеет необходимые производные. Для решения задачи используется алгоритм, предложенный в [2]. В нем используется функция непропорциональности по производной первого порядка [3]. Для заданных от параметра функций $x(t)$ и $y(t)$ непропорциональность функции $y(t)$ по $x(t)$ описывается выражением

$$@\, d^{(1)}_{x(t)} y(t) = \frac{y(t)}{x(t)} - \frac{dy/dt}{dx/dt}\ , \tag{2}$$

где @ - символ вычисления непропорциональности;

d - от англ. derivative – производная.

Читается «эт d один $y(t)$ по $x(t)$».

Для случая пропорциональной связи между функциями, непропорциональность (2) равняется нулю независимо от значений коэффициента пропорциональности.

В соответствии с алгоритмом вводятся обозначения:

$$f_0(t) = G\cos(\omega_1 t + \theta); f_1(t) = x^3(t), \quad f_2(t) = x(t), \quad f_3(t) = \frac{dx}{dt}, \quad f_4(t) = \frac{d^2x}{dt^2},$$

где t t – время.

Соответственно $k_1 = h,\ k_2 = \omega_{0_1}^2,\ k_3 = 2\alpha,\ k_4 = 1$. С учетом обозначений уравнение (1) примет вид

$$f_0(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + k_3 f_3(t) + k_4 f_4(t)\,. \tag{3}$$

По условию коэффициенты $k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$ неизвестны, и их необходимо найти по $f_0(t)$ и контролируемым колебаниям $f_2(t)$.

Вначале вычисляется непропорциональность (2) функции $f_0(t)$ по $f_1(t)$:

$$F_{01}(t) = @\, d^{(1)}_{f_1(t)} f_0(t) = \frac{f_0(t)}{f_1(t)} - \frac{f_0\,'}{f_1\,'}\,. \tag{4}$$

Также вычисляются непропорциональности (2): $F_{21}(t)$, $F_{31}(t)$ и $F_{41}(t)$ соответственно функциям $f_2(t)$, $f_3(t)$ и $f_4(t)$ по $f_1(t)$. В результате, учитывая, что $F_{11}(t) = 0$, получаем

$$F_{01}(t) = k_2 F_{21}(t) + k_3 F_{31}(t) + k_4 F_{41}(t)\,. \tag{5}$$

На втором этапе вычисляются непропорциональности $F_{0121}(t)$, $F_{3121}(t)$ и $F_{4121}(t)$ функций $F_{01}(t)$, $F_{31}(t)$ и $F_{41}(t)$ по $F_{21}(t)$. Получаем

$$F_{0121}(t) = k_3 F_{3121}(t) + k_4 F_{4121}(t)\,. \tag{6}$$

На следующем этапе вычисляются непропорциональности $F_{01213121}(t)$, $F_{41213121}(t)$ функций $F_{0121}(t)$, $F_{4121}(t)$ по $F_{3121}(t)$. Результат имеет вид

$$F_{01213121}(t) = k_4 F_{41213121}(t)\,. \tag{7}$$

Выражение (7) описывает пропорциональную зависимость между функциями.

Далее вычисляется непропорциональность $F_{0121312141213121}(t)$ функции $F_{01213121}(t)$ по $F_{41213121}(t)$. Получаем

$$F_{0121312141213121}(t) = @\, d^{(1)}_{F_{41213121}(t)} F_{01213121}(t)\,. \tag{8}$$

Выражение (8) должно быть равным нулю. В противном случае это может означать наличие в системе переходного процесса (по его завершению непропорциональность станет равной нулю) или же хотя бы одна функция $f_2(t) - f_4(t)$ изменила свой вид, например, вследствие появления неконтролируемой нелинейности. Кроме того, эта непропорциональность может быть неравной нулю вследствие погрешностей при вычислениях, например, при делении чисел, близких к нулю, или делении большого числа на число, близкое к нулю. Из уравнений (7), (6), (5) и (4) находим неизвестные коэффициенты:

$$k_4 = \frac{F_{01213121}(t)}{F_{41213121}(t)}\,,$$

$$k_3 = \frac{F_{0121}(t) - k_4 F_{4121}}{F_{3121}(t)}\,,$$

$$k_2 = \frac{F_{01}(t) - k_3 F_{31}(t) - k_4 F_{41}}{F_{21}(t)}\,,$$

$$k_1 = \frac{f_0(t) - k_2 f_2(t) - k_3 f_3(t) - k_4 f_4}{f_1(t)}\,.$$

ВЫВОДЫ

Таким образом, задача нахождения значений коэффициентов в уравнении Дуффинга по известным в текущий момент времени колебаниям $x(t)$, возмущающему воздействию и их производным решена.

Работоспособность предполагаемого метода проверена с помощью компьютерного моделирования. Для этого предварительно задавались значения коэффициентов α, ω_0, h , а также внешнего воздействия G, ω_1, θ . Методом Рунге-Кутта 4-го порядка решалась задача Коши. В результате получали $x(t)$ и $\frac{dx}{dt}$. Первую производную дифференцировали численным методом Ньютона-Стирлинга, чтобы получить $\frac{d^2x}{dt^2}$. Полученные $x(t)$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, а также G, ω_1, θ использованы в качестве исходных данных для проверки работы метода оперативного контроля параметров нелинейных динамических объектов. В случае, когда погрешности вычислений незначительные и коэффициенты α, ω_0, h постоянные, вычисленные с помощью предлагаемого метода коэффициенты уравнения (1) практически совпадают с заданными, как видно из таблицы 1.

Таблица 1 – Заданные и оперативно вычисленные коэффициенты

t	Непроп. (8)	k_1		k_2		k_3		k_4	
		задан.	выч.	задан.	выч.	задан.	выч.	задан.	выч.
0,31	1,91E-06	0,13	0,1301	0,1	0,0995	0,23	0,2294	1	1
0,79	-3,09E-06	0,13	0,1298	0,1	0,1012	0,45	0,4509	1	0,9996

Незначительные отклонения связаны с выбором шага квантования времени при моделировании и вычислении производных.

На рисунке 1 приведен график изменения непропорциональности (8) на скачкообразное изменение значения параметра 2α от 0,23 до 0,45 в момент времени 0,57 с. Это привело к тому, что непропорциональность (8) перестала быть нулевой. По окончанию в момент времени $t = 0{,}67$ переходного процесса значение непропорциональности (8) снова стали равняться нулю, а коэффициент k_3 принял установившееся значение 0,45.

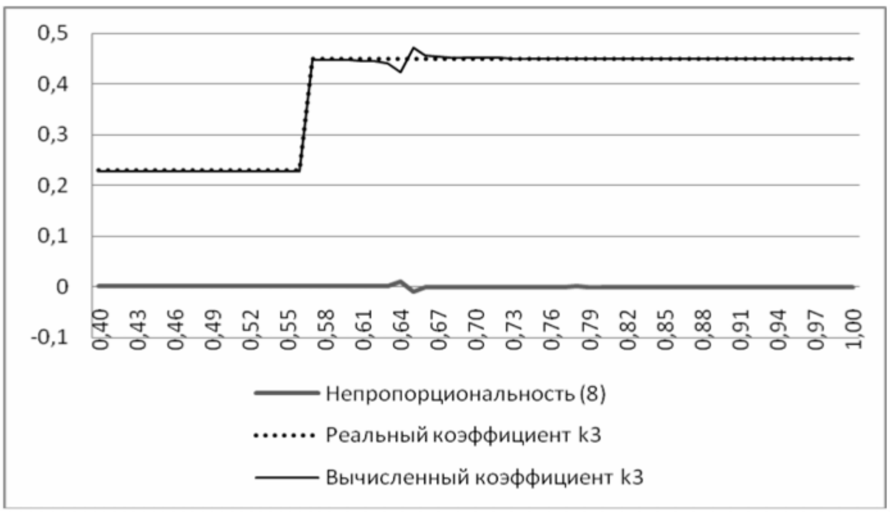

Рисунок 1 – Значения непропорциональности (8) и оперативно вычисленного коэффициента k_3 во времени

На рисунке 2 показано постепенное изменение во времени коэффициента k_3 от 0,23 до 0,45 при $t = 0{,}57$ до $t = 0{,}82$. Соответственно изменяется найденный оперативно коэффициент k_3.

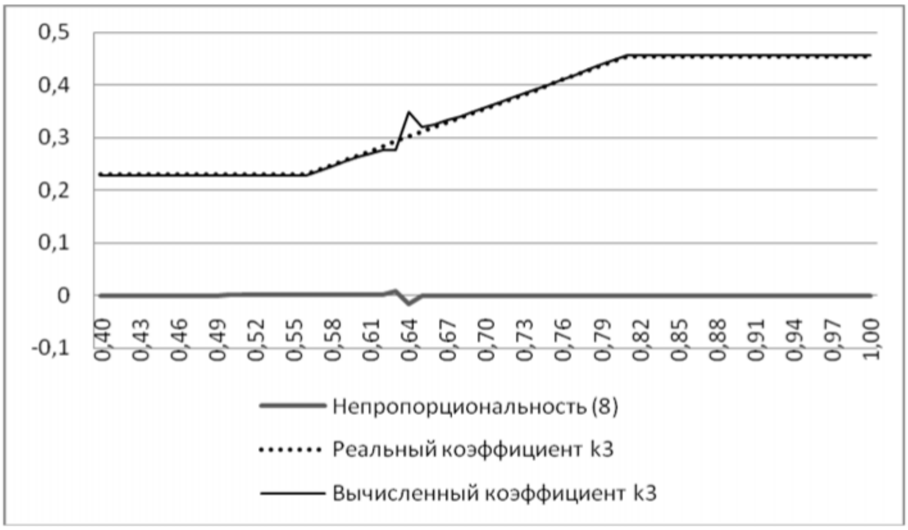

Рисунок 2 – Значения непропорциональности (8) и оперативно вычисленного коэффициента k_3 во времени

Приведенные примеры свидетельствуют о работоспособности предлагаемого метода. По известным в текущий момент времени колебаниям $x(t)$ и их производным, а также известным параметрам внешнего воздействия можно осуществлять оперативный контроль параметров нелинейных колебательных систем.

SUMMARY

OPERATIONAL CONTROL PARAMETERS OF NONLINEAR OSCILLATORY SYSTEMS

V. V. Avramenko, M. Y. Slipushko,
Sumy State University, Sumy

As known in the current moment fluctuations and their derivatives, as well as the known parameters of external exposure can be made operational control of the parameters of nonlinear oscillatory systems using the disproportionality.

Key words: *disproportionality, operational control, nonlinear oscillatory systems*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем / В. Каннингхэм. – М. - Л.: Гостэнергоиздат, 1962. – 456 с.
2. Авраменко В. В. Оперативный контроль квазистационарных динамических объектов с помощью функций непропорциональностей / В. В. Авраменко, Н. Ю. Слепушко // Вісник Сумського державного університету. Серія Технічні науки. – 2006. – № 10(94). – С. 5-–13.
3. Авраменко В. В. Характеристики непропорциональности числовых функций и их применения при решении задач диагностики / В. В. Авраменко // Вісник СумДУ. – 2000. – № 16. – С. 12–20.

Поступила в редакцию 14 февраля 2012 г.