УДК 511.78:621.3.037

К ВОПРОСУ О СЛОЖЕНИИ БИНОМИАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

И. А. Кулик, *канд. техн. наук, доцент,*
Сумский государственный университет, г. Сумы,
E-mail: kulik@pe.sumdu.edu.ua

В статье предлагается новый подход к сложению двоичных биномиальных чисел, основанный на представлении чисел упорядоченными кортежами и матрицами, что позволяет операции над биномиальными коэффициентами заменить достаточно простыми операциями над их параметрами. Построены математическая модель и алгоритм биномиального сложения, которые демонстрируют эффективность предложенных решений.

Ключевые слова: *биномиальная система счисления, биномиальная арифметика, весовой коэффициент, матрица весов.*

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Значительные объемы данных в информационно-управляющих системах представляются кодовыми последовательностями, структуру которых составляют биномиальные числа. К таким последовательностям относятся равновесные и квазиравновесные коды, коды-сочетания с ограничениями не только на значения составляющих их элементов, но и на их расположение в пределах кодовых комбинаций [1, 2]. Методы их обработки сведены к малочисленному набору операций, таких как перечисление, генерирование и упорядочивание. Но существует практическая потребность, с одной стороны, снижения трудоемкости упомянутых операций, а с другой, - введения более сложных, полезных методов обработки кодов-сочетаний, связанных, к примеру, с арифметическими операциями над биномиальными числами, лежащими в их основе. Так, при генерировании равновесных комбинаций осуществляется переход к биномиальным числам (в худшем случае, к двоичным числам) и путем прибавления к ним или вычитания от них единицы достигается необходимое биномиальное число (или двоичное), которое является основой требуемой равновесной комбинации и к которому осуществляется обратное преобразование [3, 4]. Во множестве случаев, особенно при больших разрядностях, получить новую равновесную комбинацию можно быстрее, используя операцию сложения биномиальных чисел. Весьма перспективным является создание специализированных биномиальных процессоров, которые решали бы с наибольшей эффективностью такие сложные задачи, как комбинаторная оптимизация, поиск кодов-сочетаний с заданным кодовым расстоянием, генерирование различных комбинаторных объектов и др.

Известно, что любая система счисления должна обеспечивать выполнение арифметических операций над числами. Но для биномиальной системы счисления задача проведения арифметических операций над биномиальными числами, отличными от единицы, вообще не решена. Отсутствие полноценной биномиальной арифметики нивелирует достоинства биномиальной системы счисления, что, в свою очередь, сдерживает ее применение на практике. На сегодняшний день хорошо разработанной является теория биномиального счета, что дополнительным образом подтверждает наличие такой арифметики и указывает на возможность ее разработки для биномиальных чисел [3].

Таким образом, дальнейшее развитие теории биномиальных систем счисления, заключающееся в разработке биномиальной арифметики, представляется весьма актуальным и отвечающим потребностям практики, связанной с созданием новых информационных технологий на базе биномиальных чисел.

Целью данной работы является повышение эффективности применения биномиальных систем счисления, что подразумевает расширение области использования биномиальных чисел и снижения затратности методов обработки информации на их основе.

Для достижения сформулированной цели предлагается решить следующие задачи:

1) выработать подход к исследованию и разработке биномиальных арифметических операций;

2) разработать модели биномиальных чисел и биномиального сложения на основе предложенного подхода.

В данной работе будет уделяться внимание именно сложению биномиальных чисел, поскольку из него проистекают все остальные арифметические операции.

1. МОДЕЛЬ СЛОЖЕНИЯ БИНОМИАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Для разработки математической модели сложения биномиальных чисел необходимо выбрать и обосновать "удобные", т. е. пригодные к применению, модели самих двоичных биномиальных чисел. В этой связи числовую функцию F_X двоичной (n,k)-биномиальной системы счисления [5], которая позволяет вычислить количественный эквивалент биномиального числа X, запишем с помощью переменных α_i и β_i:

$$F_X = \sum_{i=1}^{n-1} x_i C_{n-i}^{k-q_i} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i C_{\beta_i}^{\alpha_i}, \tag{1}$$

где $\alpha_i = k - q_i$ и $\beta_i = n - i$ – верхний и нижний параметры i-го весового коэффициента $C_{n-i}^{k-q_i}$ двоичного биномиального числа X; q_i – сумма единичных разрядов числа X, начиная с первого по $(i-1)$-й разряд.

Исходя из (1), рассматриваются равномерные (n,k)-биномиальные числа $X = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{n-1}$ длины $n-1$ двоичных разрядов x_i. Диапазон P биномиальных чисел – $P = C_n^k$. Таким образом, имеется множество A двоичных (n,k)-биномиальных чисел вида

$$A = \left\{ X = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_{n-1} \,/ \sum_{i=1}^{n-1} x_i \le k, 0 \le F_X \le C_n^k \right\}.$$

Очевидно, пары параметров α_i и β_i однозначно определяют значения весовых коэффициентов $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$. В соответствии с этим для их представления предлагается использовать двухэлементные кортежи (α_i, β_i). Разность $\Delta_i = \beta_i - \alpha_i$ будем называть смещением параметров весовых коэффициентов. Отсюда записи кортежей (α_i, β_i) и (α_i, Δ_i) являются равнозначными и представляют один и тот же коэффициент $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$.

Любое двоичное биномиальное число X можно представить как упорядоченную q-элементную выборку S_X (q-кортеж) из множества C

всех выборок весовых коэффициентов, возможных для биномиальных чисел с параметрами n и k:

$$S_X = \left(\left(\alpha_i, \Delta_i\right)^{(1)}, \left(\alpha_i, \Delta_i\right)^{(2)}, \ldots, \left(\alpha_i, \Delta_i\right)^{(u)}, \ldots, \left(\alpha_i, \Delta_i\right)^{(q)} \right), \qquad (2)$$

где $0 \le q \le k$, $u = \overline{1, q}$, $1 \le i \le n-1$, $S_X \in C$. При этом если $q = 0$, то кортеж S_X является пустым и соответствует числу $X = 00\ldots0$.

Принимая во внимание вид (2) q-элементной выборки, множество C возможных кортежей весовых коэффициентов можно выразить как теоретико-множественное произведение:

$$C = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_u \times \ldots \times U_q, \qquad (3)$$

где $U_1 = \left\{ \left(\alpha_i, \beta_i\right) : \alpha_i = k \right\}$ – множество биномиальных коэффициентов с верхним параметром $\alpha_i = k$, возможных для биномиального числа X, $1 \le i \le n-k$; $U_u = \left\{ \left(\alpha_i, \beta_i\right) : \alpha_i = k - u + 1, \beta_i < \beta_i^{(u-1)}, \left(k - u + 2, \beta_i^{(u-1)}\right) \in U_{u-1} \right\}$ – множество биномиальных коэффициентов, у которых верхний параметр $\alpha_i = k - u + 1$, а нижний должен удовлетворять условию, что каждая последующая u-я единица, соответствующая параметрам $\left(k - u + 1, \beta_i\right)$, должна располагаться в разрядах биномиального числа X правее предыдущей $\left(u-1\right)$-й единицы, где $u = \overline{1, q}$ и $u \le i \le n - k + \left(u - 1\right)$.

Поскольку значения весовых коэффициентов зависят от двух параметров α_i и Δ_i, то удобной моделью для представления множества C и самих упорядоченных кортежей S_X являются матрицы, координатами ячеек которых являются параметр α_i и смещение Δ_i параметров биномиальных коэффициентов.

Матрицы, отображающие кортежи $S_X \in C$ биномиальных чисел $X \in A$, оказываются удобными не только для их представления, но и для проведения операций над самими биномиальными числами. Таким образом, в работе предлагается операцию суммирования биномиальных чисел X и Y проводить, используя матричное представление соответствующих им кортежей S_X и S_Y.

На основании того, что $\alpha = \alpha_i = \overline{k, 1}$ и $\Delta = \beta_i - \alpha_i = \overline{n - k - 1, 0}$, введем матрицу $\left\| C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} \right\|$ весовых коэффициентов (4):

$$\left\| C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} \right\| = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline C_{n-1}^{k} & C_{n-2}^{k-1} & \ldots & C_{\alpha+n-k-1}^{\alpha} & \ldots & C_{n-k}^{1} \\ \hline C_{n-2}^{k} & C_{n-3}^{k-1} & \ldots & C_{\alpha+n-k-2}^{\alpha} & \ldots & C_{n-k-1}^{1} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline C_{k+\Delta}^{k} & C_{k-1+\Delta}^{k-1} & \ldots & C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} & \ldots & C_{1+\Delta}^{1} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline C_{k}^{k} & C_{k-1}^{k-1} & \ldots & C_{\alpha}^{\alpha} & \ldots & C_{1}^{1} \\ \hline \end{array}, \qquad (4)$$

число столбцов которой k, а строк $\left(n-k\right)$. q-элементная упорядоченная выборка S_X, соответствующая биномиальному числу X, будет отображаться $(0,1)$-матрицей, построенной на основе матрицы весов $\left\| C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} \right\|$. Наличие того или иного весового коэффициента $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$ в записи биномиального числа X в $(0,1)$-матрице указывается размещением единицы в соответствующей ячейке (α,Δ). Остальные ячейки при этом заполняются нулями.

Очевидно, что не любая $(0,1)$-матрица относится к множеству матриц (n,k)-биномиальных чисел. Вид таких матриц определяется числовой функцией (1) и системами ограничений биномиальных чисел [5]. При этом в качестве определяющих свойств $(0,1)$-матриц (n,k)-биномиальных чисел можно сформулировать следующие.

1. Координаты α единичных ячеек (α,Δ), т.е. верхние параметры α_i соответствующих весовых коэффициентов $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$, относящихся к биномиальному числу X, должны составлять строго монотонно убывающую последовательность значений:

$$k > k-1 > k-2 > \ldots > 1, \tag{5}$$

или ее префиксную часть, начиная со значения $\alpha = k$. Это означает, что в столбцах $(0,1)$-матрицы будет присутствовать только одна единица. Кроме того, из данного свойства следует, что число q единичных ячеек (α,Δ) должно удовлетворять неравенству $0 \le q \le k$.

2. Для соседних по столбцам ячеек матрицы с координатами $(\alpha+1,\Delta'')$ и (α,Δ'), относящихся к биномиальному числу X, должно соблюдаться неравенство

$$\Delta' < \Delta'' + 1. \tag{6}$$

Данное свойство дополняет предыдущее и отражает тот факт, что строго монотонно убывающей последовательности верхних параметров α_i биномиальных коэффициентов $C_{\beta_i}^{\alpha_i}$ или ее префиксной части (5) должна соответствовать строго монотонно убывающая последовательность нижних параметров $\beta_i^{(1)} > \beta_i^{(2)} > \ldots > \beta_i^{(u)} > \ldots. > \beta_i^{(q)}$ или ее соответствующая префиксная часть. Другими словами, каждая последующая единичная ячейка в $(0,1)$-матрице не должна располагаться выше по строке предыдущей ячейки, содержащей единицу.

Если складываются два биномиальных числа X и Y, каждое из которых характеризуется q-кортежем весовых коэффициентов S_X и S_Y соответственно, то результатом будет биномиальное число Z, которое также должно представляться q-кортежем S_Z вида (2). При этом длина q-кортежей для биномиальных чисел X, Y и Z может быть совершенно разной. Результат сложения Z также должен представляться соответствующей $(0,1)$-матрицей биномиального числа, отвечающей свойствам (5) и (6).

С учетом свойства симметрии $X+Y=Y+X$ и того, что рассматривается случай только двух слагаемых, исходной для получения результата Z будет неупорядоченная выборка:

$$G=\left[S_X,S_Y\right]=\begin{bmatrix}\left(\left(\alpha_i,\Delta_i\right)_X^{(1)},\left(\alpha_i,\Delta_i\right)_X^{(2)},\ldots,\left(\alpha_i,\Delta_i\right)_X^{(u)},\ldots,\left(\alpha_i,\Delta_i\right)_X^{(q_X)}\right),\\ \left(\left(\alpha_i,\Delta_i\right)_Y^{(1)},\left(\alpha_i,\Delta_i\right)_Y^{(2)},\ldots,\left(\alpha_i,\Delta_i\right)_Y^{(h)},\ldots,\left(\alpha_i,\Delta_i\right)_Y^{(q_Y)}\right)\end{bmatrix}. \quad (7)$$

где $\left(\alpha_i,\Delta_i\right)_X^{(u)}$, $\left(\alpha_i,\Delta_i\right)_Y^{(h)}$ – весовые коэффициенты, относящиеся к биномиальным числам X и Y соответственно.

Дополнительно условимся, что биномиальные числа $X,Y\in A$, которые соответствуют элементам выборки G, при суммировании должны приводить к биномиальному числу Z из того же множества A.

Как показывает анализ сложения биномиальных чисел, перенос двоичной единицы из младших разрядов, начиная с $(i+1)$-го, в старший i-й разряд выполняется по результату формирования серии из $k-q_i+1$ единиц, начиная от $(i+1)$-го разряда и заканчивая разрядом, номер которого вычисляется как $(i+1)+(k-q_i)$, где $0\le q_i\le k-1$. Вес единицы, полученной в результате переноса, определяет выражение общего вида:

$$C_{n-i}^{k-q_i}=C_{n-(i+1)}^{k-q_i}+C_{n-(i+2)}^{(k-q_i)-1}+\ldots+C_{n-(i+k-q_i)}^{1}+C_{n-(i+k-q_i+1)}^{0}. \quad (8)$$

Соответственно, процесс сложения двоичных биномиальных чисел можно представить как процесс формирования серий двоичных единиц с целью получения на основе (8) весовых коэффициентов с наибольшим значением $\Delta_i=\beta_i-\alpha_i$. Выражение (8), определяющее при сложении переносы единиц из разряда в разряд, будем называть V-преобразованием, или преобразование переноса.

Серия единиц должна завершаться единицей, которой соответствует биномиальный коэффициент с верхним параметром $\alpha_i=0$ (8). Для формирования такой единицы применяется равенство

$$C_{\alpha_i}^{\alpha_i}=C_{\gamma_i}^{\gamma_i}=C_{\chi_i}^{0}, \quad (9)$$

где $\alpha_i\ne\gamma_i\ne\chi_i$, $1\le\alpha_i,\gamma_i,\chi_i\le k$. Кроме того, равенство (9) используется и для формирования серии единиц со смещением $\Delta_i=0$. Равенство (9) будем называть W-преобразованием, или преобразованием сдвига.

При невозможности использования V- и W-преобразований для выполнения сложения биномиальных чисел X и Y, когда в соответствующих им q-элементных выборках S_X и S_Y изначально или в процессе суммирования обнаруживаются одинаковые биномиальные коэффициенты со смещением $\Delta_i\ne 0$, предлагается применять равенства

$$C_{\beta_i}^{\alpha_i}=C_{\beta_i}^{\beta_i-\alpha_i}, \quad (10)$$

$$C_{\beta_i}^{\alpha_i}=C_{\beta_i-1}^{\alpha_i}+C_{\beta_i-1}^{\alpha_i-1}. \quad (11)$$

Выражение (10) представляет собой преобразование симметрии, которое будем называть B-преобразованием. Равенство (11), которое используется для генерирования биномиальных коэффициентов, необходимых для формирования серий единиц, является преобразованием разложения, или D-преобразованием.

Матрица $\left\| C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} \right\|$ для неупорядоченной выборки $G = \left[S_X, S_Y \right]$, которая представляет собой оба слагаемых X и Y, будет характеризоваться тем, что в ее ячейках (α, Δ) могут располагаться уже не одна, а несколько единиц в отличие от $(0,1)$-матриц. Это связано с тем, что, во-первых, в своем представлении биномиальное число X может иметь весовые коэффициенты, совпадающие с коэффициентами биномиального числа Y, а во-вторых, одинаковые биномиальные коэффициенты могут появиться в результате преобразований, проводимых в процессе сложения. Кроме того, в отличие от $(0,1)$-матриц биномиальных чисел в матрицу $\left\| C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} \right\|$, характеризующих выборку G, необходимо ввести дополнительный столбец с $\alpha = 0$, в ячейках которого будут размещаться единицы, завершающие серии единиц.

Матрица $\left\| C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} \right\|$, которая имеет размер $(k+1)\times(n-k)$ и отображающая выборку $G = \left[S_X, S_Y \right]$, называется матрицей биномиального сложения и будет обозначаться как $(0,1 1 \ldots 1)$ -матрица (12):

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
C_{n-1}^{k} & C_{n-2}^{k-1} & \ldots & C_{\alpha+n-k-1}^{\alpha} & \ldots & C_{n-k-1}^{0} \\
\hline
C_{n-2}^{k} & C_{n-3}^{k-1} & \ldots & C_{\alpha+n-k-2}^{\alpha} & \ldots & C_{n-k-2}^{0} \\
\hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
C_{k+\Delta}^{k} & C_{k-1+\Delta}^{k-1} & \ldots & C_{\alpha+\Delta}^{\alpha} & \ldots & C_{\Delta}^{0} \\
\hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
C_{k}^{k} & C_{k-1}^{k-1} & \ldots & C_{\alpha}^{\alpha} & \ldots & C_{0}^{0} \\
\hline
\end{array} . \qquad (12)$$

Таким образом, математическая модель сложения двух биномиальных чисел X и Y выглядит следующим образом.

Пусть заданы q-элементные кортежи S_X, S_Y и S_Z весовых коэффициентов вида

$$S = \left((\alpha_i, \Delta_i)^{(1)}, (\alpha_i, \Delta_i)^{(2)}, \ldots, (\alpha_i, \Delta_i)^{(u)}, \ldots, (\alpha_i, \Delta_i)^{(q)} \right),$$

соответствующие (n,k)-биномиальным числам X, Y и Z. Заданные кортежи являются элементами множества

$$C = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_u \times \ldots \times U_q$$

возможных упорядоченных выборок из q-биномиальных коэффициентов для (n,k)-биномиальных чисел, $S_X, S_Y, S_Z \in C$.

Сложение биномиальных чисел $Z = X + Y$ представляется как сюръективное отображение

$$\varphi' : M' \to C,$$

которое является сужением отображения $\varphi : C^2 \to C$ при $M' \subseteq C^2$ и $\varphi'(G) = \varphi(G)$ для всех пар $G = \left[S_X, S_Y \right] \in M'$, где множество M' определяется как $M' = \left\{ G \in C^2 \,/\, \sum\limits_X C_{\beta_i}^{\alpha_i} + \sum\limits_Y C_{\beta_i}^{\alpha_i} < C_n^k \right\}$.

Заданное отображение φ' необходимо реализовать с помощью набора преобразований $\langle V, W, B, D\rangle$, где V – преобразование переноса единицы из $(i+1)$-го разряда в i-й разряд, W – преобразование сдвига параметров α_i и β_i весовых коэффициентов, B – преобразование симметрии весовых коэффициентов, D – преобразование разложения весовых коэффициентов. Целью применения совокупности преобразований $\langle V, W, B, D\rangle$ является получение q-элементного кортежа $S_Z \in C$, весовые коэффициенты которого имеют наибольшее значение смещения $\Delta_i = \beta_i - \alpha_i$ при ограничениях:

1) верхние параметры α_i весовых коэффициентов (α_i, Δ_i) должны составлять строго монотонно убывающую последовательность $k > k-1 > k-2 > \ldots > 1$;

2) для соседних элементов $(\alpha+1, \Delta'')$ и (α, Δ') q-кортежа S_Z должно выполняться неравенство $\Delta' < \Delta'' + 1$.

В матричном представлении реализация сюрьективного отображения $\varphi' : M' \to C$ означает приведение с помощью набора преобразований $\langle V, W, B, D\rangle$ $(0,11\ldots1)$-матрицы биномиального сложения $X+Y$ к $(0,1)$-матрице биномиального числа –результата суммирования Z.

Сформулированная математическая модель сложения биномиальных чисел X и Y приводит к следующему теоретическому алгоритму.

1. Из q-кортежей S_X и S_Y формируется неупорядоченная выборка $G = [S_X, S_Y]$, $G \in M'$.

2. Строится из весовых коэффициентов, которые берутся из выборки G, последовательность (11) длины $(k+1)$ с наибольшим значением Δ.

3. В случае, если требуемый весовой коэффициент с заданным α_i отсутствует и больше по значению содержащихся в G, то выполняется декрементация $\Delta = \Delta - 1$ и строится последовательность биномиальных коэффициентов, начиная с заданного α_i, при новом значении смещения $(\Delta - 1)$ параметров весовых коэффициентов.

4. В случае, если требуемый весовой коэффициент с заданным α_i отсутствует, а по значению равен или меньше оставшихся из G, то выполняются преобразования W, или B, или D в соответствии с равенствами (12), (13) и (14).

5. По окончанию построения серии биномиальных коэффициентов применяется V-преобразование (11) с целью получения биномиального коэффициента с заданными α_i и Δ.

6. Если выполняются неравенства (5) и (6) для оставшихся биномиальных коэффициентов, то q-элементный кортеж S_Z результата суммирования Z считается сформированным и процесс сложения завершается. В противном случае осуществляется переход к шагу 3.

Матричной реализации теоретического алгоритма свойственно более высокое быстродействие. Это связано с тем, что область весовых коэффициентов складываемых биномиальных чисел X и Y; область биномиальных коэффициентов, получаемых в результате преобразований $\langle V, W, B, D\rangle$ и область весовых коэффициентов, относящихся к результату суммирования Z, совмещаются, что приводит к упрощению перехода между биномиальными коэффициентами разных областей, существенному снижению количества пересылок между областями и, вследствие этого, уменьшению времени биномиального сложения.

Пример. Необходимо сложить два $(6,3)$-биномиальных числа $X = 01010$ и $Y = 01110$, используя их матричное представление.

Решение. Исходя из (4), матрица весов $\left\|C_{\alpha+\Delta}^{\alpha}\right\|$ размерностью $k \times (n-k) = 3 \times 3$ для $(6,3)$-биномиальных чисел имеет следующий вид:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline C_5^3 & C_4^2 & C_3^1 \\ \hline C_4^3 & C_3^2 & C_2^1 \\ \hline C_3^3 & C_2^2 & C_1^1 \\ \hline \end{array}.$$

Тогда в матричном представлении заданные числа $X = 01010$ и $Y = 01110$ отображаются как

$$\|X\| = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \|Y\| = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Используя построенную матрицу весов, можно определить, что количественные эквиваленты биномиальных чисел X и Y соответственно равны $F_X = 5$ и $F_Y = 9$.

На основании (12) и вида матриц $\|X\|$ и $\|Y\|$ матрица биномиального сложения ($(0,11\ldots1)$-матрица), размерность которой $(k+1)\times(n-k) = 4\times3$, запишется в виде

$$\|X+Y\| = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 11 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Последовательно применяя над ячейками $(0,11\ldots1)$-матрицы преобразования V, W, B и D, в результате получаем $(0,1)$-матрицу $(6,3)$-биномиального числа, которая удовлетворяет неравенствам (5), (6) и представляет собой матричное представление результирующего биномиального числа Z:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 11 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Преобразование W над ячейкой

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 11 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Преобразование V над строкой

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Преобразование D над ячейкой

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Преобразование W над ячейкой

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Окончательный вид матрицы сложения

$$\|Z\| = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Матрица результата

По весовым коэффициентам, которые соответствуют единичным ячейкам матрицы результата, получаем результирующее биномиальное число $Z = 10101$. Просуммировав теперь эти весовые коэффициенты, обнаружим, что количественный эквивалент результата сложения $Z = 10101$ равен $F_Z = 14$. Таким образом, $F_Z = F_X + F_Y = 5 + 9 = 14$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход к разработке биномиальной арифметики основан на: 1) представлении весовых коэффициентов в виде упорядоченных кортежей, компоненты которых соответствуют верхнему и нижнему параметрам биномиальных коэффициентов; 2) матричном представлении биномиальных чисел, над которыми производятся арифметические операции; 3) матричной модели процесса выполнения арифметических операций, в которой вычисления весов – биномиальных коэффициентов − заменяются намного более простыми операциями над значениями их параметров. Реализованные в работе модель и алгоритм биномиального сложения подтверждают обоснованность предложенного подхода, поскольку позволяет эффективно с точки зрения ограниченного числа шагов и небольших временных затрат находить сумму биномиальных чисел.

ДО ПИТАННЯ ЩОДО ДОДАВАННЯ БІНОМІАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

І. А. Кулик,
Сумський державний університет, м. Суми

У статті пропонується новий підхід до додавання двійкових біноміальних чисел, що базується на поданні чисел упорядкованими кортежами і матрицями, що дозволяє операції над біноміальними коефіцієнтами замінити достатньо простими операціями над їх параметрами. Побудовані математична модель та алгоритм біноміального додавання, які демонструють ефективність запропонованих рішень.

Ключові слова: *біноміальна система числення, біноміальна арифметика, ваговий коефіцієнт, вагова матриця.*

TO THE PROBLEM ON ADDITION OF BINOMIAL NUMBERS

I. A. Kulyk,
Sumy State University, Sumy

New approach to addition of binary binomial numbers is proposed in the paper. It is based on representation of the numbers by ordered tuple-structured data and matrices that make it possible to substitute operations on binomial coefficients by simple enough operations over their parameters. A mathematical model and algorithm for binomial addition are developed. They demonstrate efficiency of the proposed solutions.

Key words: *binomial notation, binomial arithmetic, weighting coefficient, weighting matrix.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амелькин В. А. Методы нумерационного кодирования / В. А. Амелькин. − Новосибирск: Наука, 1986. − 155 с.
2. Кулик И. А. Генерирование кодов-сочетаний для решения информационных задач ИУС/ И. А. Кулик, Е. М. Скордина, С. В. Костель // АСУ и приборы автоматики. Всеукр. межведомст. сборник, 2011. – № 155. – С. 15-23.
3. Борисенко А. А. Биномиальный счет. Теория и практика: монография / А. А. Борисенко. – Сумы: ИТД "Университетская книга", 2004. – 170 с.
4. Jon T. Butler. High-Speed Constant Weight Codeword Generators / Butler T. Jon, Sasao Tsutomu // ARC 2011, LNCS 6578, 2011. – P. 193-205.
5. Борисенко А. А. Биномиальное кодирование: монография / А. А. Борисенко, И. А. Кулик. – Сумы: Изд-во СумГУ, 2010. – 206 с.

Поступила в редакцию 30 августа 2012 г.