УДК 621.24

ВЫБОР ТОЛЩИНЫ ЛОПАСТИ РАБОЧЕГО КОЛЕСА ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЛОПАСТНОЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ МАШИНЫ[1]

С. Д. Косторной, *д-р техн. наук, профессор;*
Н. С. Мартынова, *канд. техн. наук,*
Сумский государственный университет,
ул. Римского-Корсакова, 2, г. Сумы, 40007, Украина

В прикладных задачах построение математической модели – это один из наиболее сложных и ответственных этапов работы. Опыт показывает, что правильно выбрать модель – значить решить проблему более чем наполовину.

Ключевые слова: *математическая модель (ММ); проектирование гидравлических машин; обратная, прямая задачи; потенциальное, сложно-слоистое, винтовое течения.*

ВВЕДЕНИЕ

Величина энергии жидкости, передаваемой рабочим колесом (РК) насоса и называемая теоретическим напором H_T, определяется основным уравнением Эйлера, записанного выражением (1)

$$H_T = U_2 V_{u2} - U_1 V_{u1} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}, \qquad (1)$$

где W, U, V, V_u – относительная, переносная, абсолютная скорости и проекция соответствующей скорости на переносную скорость; индексы 1,2 – вход и выход на лопасть РК.

Данное уравнение справедливо в предположении, что течение жидкости осесимметричное, жидкость невязкая, толщина лопасти соизмерима с линией тока и поэтому количество лопастей предполагается бесконечно большим. Общепринятая модель РК обосновывается тем, что, например, при 1500 оборотов в минуту или 25 оборотов в секунду, реальная скорость экспериментально определяется в проточной части (ПЧ) за гораздо более продолжительный срок и может быть адекватной только осредненной по времени и пространству. Поэтому при проектировании ПЧ вводят понятия осредненной скорости. Сечения ПЧ, в которых выполняется уравнение неразрывности, должны быть перпендикулярными к линиям тока. Эти сечения называют «живыми сечениями». Нестационарные и переменные явления заменяют осредненными. Принятые условия в математической модели рабочего колеса соответствуют модели осесимметричного течения рабочей жидкости в рабочем колесе.

Трудность этапа проектирования состоит в том, что он требует соединения математических моделей (ММ) и специальных знаний. Но ММ никогда не является тождественной рассматриваемому объекту. Она не передает всех его свойств и особенностей. Основанная на упрощении, идеализации, она является приближенным описанием объекта. Поэтому результаты, полученные при анализе модели, всегда носят для объекта приближенный характер. Их точность определяется степенью соответствия, адекватности модели и объекта. Вопрос о точности, о достоверности результатов – это один из самых тонких вопросов

[1] *Редакція журналу разом із сторонніми рецензентами не поділяє підходу шановних авторів що до визначення товщини лопатей, тому виносить статтю на розгляд читачів*

прикладной математики. Наиболее просто он решается в случаях, когда хорошо известны законы, определяющие поведение и свойства объекта и имеется большой практический опыт их применения. Тогда можно априори, т. е. до начала решения математической задачи оценить точность результатов, которую обеспечивает рассматриваемая модель. Для их проверки необходимо сопоставить результаты исследований модели со всей имеющейся информацией об изучаемом объекте. Степень близости расчетных величин экспериментальным данным позволяет судить о качестве гипотетической модели, о справедливости или ошибочности исходных предположений. Таким образом, вопрос применимости некоторой математической модели к изучению рассматриваемого объекта не является чисто математическим вопросом и не может быть решен математическими методами. Основным критерием истинности является эксперимент, практика в самом широком смысле этого слова. Только критерий практики позволяет сравнивать различные гипотетические модели и выбирать из них ту, которая является наиболее простой и в то же время в рамках требуемой точности правильно передает свойства изучаемого физического явления.

1 Кинематические условия течения жидкости в проточной части

Для обоснования предлагаемой модели течения жидкости в ПЧ примем особенности осесимметричного двухпараметрического течения жидкости, которые будем характеризовать тремя системами кривых линий: траекториями, линиями тока и вихревыми линиями. Для этого представим вектор вихря в виде суммы двух векторов:

$$\bar{\Omega} = \Omega_\tau + \Omega_n = \left(\frac{\bar{V}\cdot\bar{\Omega}}{V\cdot V}\right)\cdot\bar{V} + \frac{\bar{V}\times\left(\bar{\Omega}\times\bar{V}\right)}{\bar{V}\cdot\bar{V}}, \tag{2}$$

где Ω_τ и Ω_n - проекция вектора вихря по линии тока и нормали к ней.

Так как $div\bar{\Omega} = 0$, $div\bar{V} = 0$, $\bar{V}\cdot\bar{V} = V^2$,

$$-\bar{V}grad\left(\frac{V\cdot\Omega}{V^2}\right) = div\left[\frac{V\times\left(V\times\bar{\Omega}\right)}{V^2}\right], \tag{3}$$

Уравнение (3) запишем в виде скорости развития винтового течения:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\Omega_\tau}{V}\right) = -\frac{1}{V}div\left[\frac{V\times\left(\Omega\times V\right)}{V^2}\right]. \tag{4}$$

Чтобы увязать изменение величины $\dfrac{\Omega_\tau}{V}$ воль линии тока с её геометрическими параметрами, правую часть уравнения (4) преобразуем к виду [1-3]:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\Omega_\tau}{V}\right) = \frac{2\Omega_n}{V\cdot r} - \frac{\bar{\tau}}{V^2}rot\left(\bar{V}\times\bar{\Omega}\right), \tag{5}$$

где $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ – единичные векторы касательной и главной нормали к линии тока, r – радиус кривизны линии тока.

Уравнение (5) представляет собой кинематическое решение, выражающее изменение вихря по потоку в направлении течения при установившемся движении через компоненту вихря по главной нормали и величину ротора Громеки-Ламба по направлению течения. Оно показывает, что $\frac{\Omega_\tau}{V}$ может развиваться не только вследствие неравномерного поля скоростей в живом сечении, которое выражено величиной Ω_n, но и когда $\bar{\tau} \cdot rot\left[\bar{V} \times \bar{\Omega}\right]$ не обращается в нуль, даже в случаях, когда линии тока прямолинейные.

Чтобы учесть влияние вязкости на развитие винтового течения, выразим вектор $rot\left(\bar{V} \times \bar{\Omega}\right)$ из уравнения движения жидкости. Для стационарного течения вязкой жидкости имеем уравнение Навье-Стокса:

$$\bar{V} \times \bar{\Omega} = grad\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + U\right) - \nu\nabla^2\bar{V}. \tag{6}$$

Применив операцию ротора к (6), получим:

$$rot\left(\bar{V} \times \bar{\Omega}\right) = -\nu\nabla^2\bar{\Omega}. \tag{7}$$

Подставив значение $rot\left(\bar{V} \times \bar{\Omega}\right)$ из (7) в (5) получим выражение для изменения $\frac{\Omega_\tau}{V}$ вдоль линии тока в вязкой жидкости.

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\Omega_\tau}{V}\right) = \frac{2\Omega_n}{V \cdot r} + \nu\frac{\nabla^2\Omega_\tau}{V^2}. \tag{8}$$

Уравнение (8), справедливое в общем случае стационарного движения жидкости, может быть использовано для развития винтового течения, как в идеальной, так и в вязкой жидкости.

Выражение $\frac{2\Omega_n}{V \cdot r}$ характеризует взаимодействие кривизны линии тока и градиента неравномерной скорости. Его можно рассматривать как «источник» направленной по потоку завихренности Ω_τ. Влияние вязкости сводится к отводу или диссипации Ω_τ. Поэтому, вязкость, будучи диссипативной, не может сама по себе создавать дополнительную закрутку или противотоки, хотя и является причиной резкого градиента скорости. В общем случае течения жидкости величина $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\Omega_\tau}{V}\right) = \frac{1}{V} div\left[\frac{\bar{V} \times \left(V \times \Omega\right)}{V^2}\right]$ равняется нулю, что характеризует отсутствие винтового течения лишь при условиях:

а) $\bar{\Omega} \times \bar{V} = 0$ – винтовой поток, (9)

б) $\bar{\Omega} \cdot \bar{V} = 0$ – сложнослоистый (квазипотенциальный) поток. (10)

2 Уравнения вихревого и винтового двухпараметрических потоков в криволинейной ортогональной системе координат

Установившийся осесимметричный двухпараметрический вихревой поток невязкой жидкости в ортогональной криволинейной системе координат q_1, q_2, q_3 (рис. 1) определяется следующей системой уравнений [4]:

$$\left.\begin{aligned}
&H_2H_3V_1=\frac{\partial\psi}{\partial q_2},\, H_3H_1V_2=-\frac{\partial\psi}{\partial q_1};\\
&H_3V_3=\varphi(\psi);\\
&E=-F(\psi);\\
&\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1}{H_2H_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)+\frac{H_1H_2}{H_3}\cdot\varphi(\psi)\cdot\varphi'(\psi)+H_1H_2H_3F'(\psi)=0,
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

где ψ – функция тока;

H_1, H_2, H_3 – коэффициенты Лямэ;

ϕ, F – произвольные функции.

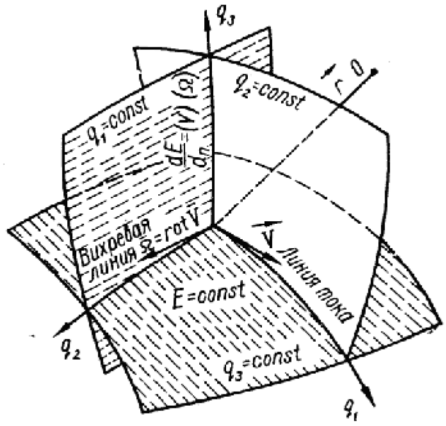

Рисунок 1 – Криволинейная система координат

Полученные в [4] уравнения (11) при сделанных предположениях вполне заменяют собой исходную систему движения жидкости Эйлера [5]:

$$\frac{d\vec{V}}{dt}\equiv\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}grad\ p \quad (12)$$

Установившийся двухпараметрический неоднородный винтовой поток невязкой жидкости в принятой системе координат соответствует следующей системе уравнений [4]:

$$\left.\begin{aligned}
&H_2H_3V_1=\frac{\partial\psi}{\partial q_2};\\
&H_3H_1V_2=-\frac{\partial\psi}{\partial q_1};\, H_3V_3=\Phi(\varphi);\\
&\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1}{H_2H_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)+\frac{H_1H_2}{H_3}\Phi\left(\psi\right)\Phi'\left(\psi\right)=0.
\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Особенностью осесимметричных потоков, подчиняющихся приведенным уравнениям, является выполнение закона площадей для окружной скорости $V_ur=const$ на каждой поверхности $\psi=const$.

Системы уравнений (11), (13) и вытекающие из неё результаты представляют значительный интерес для исследования потоков в ПЧ, характерной чертой которых является существование поперечной циркуляции. Для ПЧ гидравлической машины поперечными скоростями будут V_2 и V_3, а продольной – V_1.

Большой интерес эти уравнения представляют для исследования различных осесимметричных потоков с окружной скоростью $V_u \neq 0$, встречающихся в гидравлических машинах.

Уравнение (10) удовлетворяет необходимому и достаточному условиям существования криволинейной системы координат [5, 6] и выполнению основного уравнения Эйлера (1) передачи энергии жидкости рабочим колесом.

В случае осесимметричного движения жидкости в такой системе координат q_1, q_2, q_3 (рис.1) оно имеет вид

$$\frac{V_1}{H_2 H_3}\frac{\delta\left(H_3 V_3\right)}{\delta q_2}+\frac{V_2}{H_1 H_3}\frac{\delta\left(H_3 V_3\right)}{\delta q_1}+\frac{V_3}{H_1 H_2}\left[\frac{\delta\left(H_2 V_2\right)}{\delta q_1}-\frac{\delta\left(H_1 V_1\right)}{\delta q_2}\right]=0. \qquad (14)$$

Так как в выбранной системе координат ось q_1 совпадает с линией тока меридианного потока, то $V_1=V_m$, $V_3=V_u$, $H_3 = r$, $V_2=0$ уравнение (14) будет иметь вид

$$H_1 V_m \frac{\delta\left(V_u r\right)}{\delta q_2}+V_u r\left(-\frac{\delta\left(H_1 V_m\right)}{\delta q_2}\right)=0, \qquad (15)$$

решая которое относительно $V_u r$, получим выражение

$$V_u r=\psi\left(q_1\right) H_1 V_m, \qquad (16)$$

где ψ (q_1) – произвольная постоянная функция от q_1.

Для определения функции ψ (q_1) примем, что на исходной линии тока меридианного потока (например, линии тока «С») величина $V_u r$ в соответствии с уравнением (1) известна как граничное условие. Из (16) получим закон изменения $V_u r$ на соседней линии тока *В-В* и аналогично на всех остальных линиях тока.

$$\left(V_u r\right)_b=\frac{\left(V_u r\right)_c}{\left(H_1 V_m\right)_c}\left(H_1 V_m\right)_b, \qquad \left(V_u r\right)_a=\frac{\left(V_u r\right)_c}{\left(H_1 V_m\right)_c}\left(H_1 V_m\right)_a,$$

где $\left(V_u r\right)_c$ – заданное граничное условие.

Таким образом, решение обратной задачи – профилирование бесконечно тонкой лопасти РК – сводится к определению поверхности тока, удовлетворяющей всем условиям принятой ММ течения жидкости (10), а модель (9) винтового и потенциального потоков, для которых величина $V_u r$ не изменяется на линии тока [4], допустима для отводящих и подводящих элементов ПЧ.

При решении обратной задачи - проектирование реальной лопастной системы, которая отличается от поверхности тока толщиной и количеством лопастей, ее выполняют, как правило, на основе опыта проектировщика, и обосновывают конкретными практическими соображениями (условиями прочности, безотрывного обтекания и др.). Поэтому в реальной ПЧ расчетные параметры проектируемой машины будут отличаться и не согласовываться с оптимальными, так как кинематические параметры потока должны отличаться от расчетных.

Ниже предлагается способ, который позволит во второй итерации выбором количества лопастей и законом распределения их толщины восстановить условия течения жидкости в реальном РК. Для этого во второй итерации проектирования – выбор числа лопастей и закона распределения их толщины – необходимо решить прямую трехмерную задачу в реальной ПЧ РК и восстановить требуемую структуру квазипотенциального потока посредством задания закона коэффициента стеснения потока, согласовывающего с интегрирующим множителем $\mu(x,y)$.

3 Интегрирующий множитель

Всякое дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$, можно записать в дифференциальной форме $dy-f(x,y)dx=0$, или в виде

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \tag{17}$$

Может случиться, что левая часть дифференциального уравнения $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ является полным дифференциалом функции $u(x,y)$:

$$du(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy.$$

В этом случае уравнение (17) принимает вид $du(x,y)=0$. Если функция $y(x)$ является решением уравнения (17), то $du(x,y(x))\equiv 0$ и, следовательно, $u(x,y(x))=c$, где c - произвольная постоянная, которая является общим интегралом исходного уравнения. Если даны начальные значения $y(x_0)=y_0$, то постоянная c определяется из (17) $c=u(x_0,y_0)$, а $u(x,y)=u(x_0,y_0)$ является искомым частным интегралом. Если $\dfrac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)\neq 0$ в точке (x_0,y_0), то уравнение (17) определяет y как неявную функцию x.

Для того чтобы левая часть уравнения (17) являлась полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{18}$$

Если это условие выполнено, то уравнение (17) легко интегрируется. При вычислении интеграла $\int M(x,y)dx$ величина y рассматривается как постоянная, поэтому $c(y)$ является произвольной функцией y.

Для определения функции $c(y)$ дифференцируем найденную функцию $u(x,y)$ по y и, так как $\dfrac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)+c'(y)=N(x,y).$$

Из этого уравнения определяем $c'(y)$ и, интегрируя, находим $c(y)$.

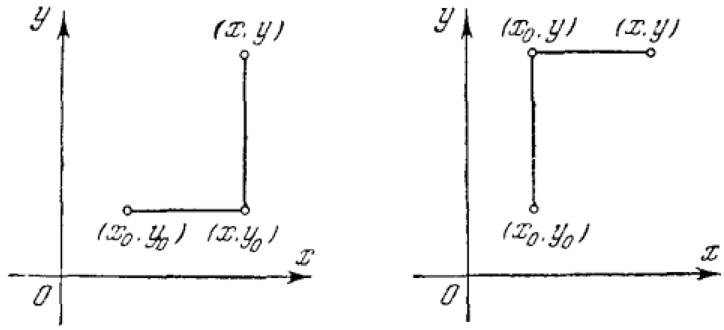

Рисунок 2 - Выбор пути интегрирования

Функцию $u(x,y)$ можно определить по ее полному дифференциалу $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$, взяв криволинейный интеграл $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ между некоторой фиксированной точкой (x_0, y_0), и точкой с переменными координатами (x,y) по любому пути. В качестве пути интегрирования удобно брать линию, составленную из двух звеньев, параллельных осям координат или из начала координат (рис. 2). В этом случае

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Mdx + Ndy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} Mdx + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} Ndy.$$

Если дифференциальное уравнение $Mdx + Ndy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах, но существует такая дифференцируемая функция $\mu = \mu(x,y)$, что уравнение

$$\mu(Mdx + Ndy) = 0 \tag{19}$$

представляет собой дифференциальное уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}, \tag{20}$$

то эта функция называется интегрирующим множителем дифференциального уравнения (17). Если интегрирующий множитель μ определен, то интегрирование дифференциального уравнения сводится к определению общего интеграла полученного уравнения в полных дифференциалах. Из уравнения (20) следует, что интегрирующий множитель μ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных:

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \quad (21)$$

Определение интегрирующего множителя всегда возможно для функции $u(x,y)$.

В общем случае для определения интегрирующего множителя надо подобрать хотя бы одно не равное тождественно нулю частное решение уравнения в частных производных $\frac{\partial\mu M}{\partial y}=\frac{\partial\mu N}{\partial x}$ или в развернутом виде

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}N+\frac{\partial N}{\partial x}\mu. \quad (22)$$

Во многих случаях решение уравнения (22) легко определяется, если интегрирующий множитель является функцией только одного аргумента (например, только $x+y$ или только x^2+y^2, или функцией только x, или только y и т. д.). Тогда можно проинтегрировать уравнение (22) и указать условия, при которых интегрирующий множитель рассматриваемого вида существует. Тем самым выделяются классы уравнений, для которых интегрирующий множитель легко может быть найден. Например, из условия, при котором уравнение $Mdx+Ndy=0$ имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, $\mu=\mu(x)$ уравнение (22) упрощается и приобретает вид $-\frac{d\ln\mu}{dx}N=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$, откуда, считая $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ непрерывной функцией x, получим:

$$\ln\mu=\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx+\ln c,$$

$$\mu=ce^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}. \quad (23)$$

Можно считать $c=1$, так как достаточно иметь лишь один интегрирующий множитель. Интегрирующий множитель типа $\mu=\mu(x)$ существует, например, для линейного уравнения $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$ или $\left[p(x)y-f(x)\right]dx+dy=0$. Действительно, $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=p(x)$ и, следовательно, $\mu=e^{\int p(x)dx}$.

Аналогично могут быть найдены интегрирующие множители вида:

$\mu(y)$; $\mu(x\pm y)$; $\mu\left(x^2\pm y^2\right)$; $\mu(x\cdot y)$; $\mu\left(\frac{x}{y}\right)$ и т. д.

Существование интегрирующего множителя, или ненулевого решения уравнения в частных производных (22) в некоторой области, если функции M и N имеют непрерывные производные и, по крайней мере, одна из этих функций не обращается в нуль, доказано в [6]. Поэтому метод интегрирующего множителя рассматривают как общий метод интегрирования уравнений вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

Если рассматривать непрерывное векторное поле скоростей $\vec{F}$ при решении обратной задачи

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}, \tag{24}$$

где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – единичные векторы осей координат, а векторные линии (линии тока) этого поля

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}, \tag{25}$$

тогда поверхности, составленные из векторных линий и имеющих хотя бы одну общую точку с поверхностью (рис. 3), принимаются за поверхность бесконечно тонкой лопасти в первой итерации.

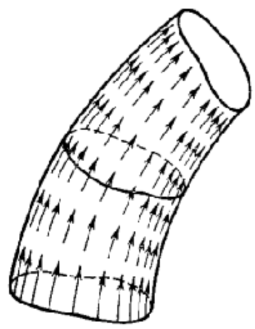

Рисунок 3 – Поверхность тока

Так как векторная поверхность характеризуется условием ортогональности вектора $\vec{N}$, направленного по нормали к поверхности, тогда в любой точке поверхности выполняется условие:

$$\left(\vec{N} \cdot \vec{F}\right) = 0. \tag{26}$$

Если векторная поверхность определяется уравнением $z = f(x,y)$, то вектор

$$\vec{N} = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} - \vec{k}$$

и условие (26) принимает вид:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z). \tag{27}$$

Если векторная поверхность задается уравнением $u(x,y,z) = 0$ и вектор $\vec{N} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, то уравнение (27) приобретает вид:

$$P(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{28}$$

Следовательно, для нахождения векторных поверхностей надо проинтегрировать квазилинейное уравнение (27) или линейное однородное уравнение (28) в зависимости от того, ищем ли мы уравнение искомых векторных поверхностей в явном или неявном виде.

Так как векторные поверхности составлены из векторных линий, то интегрирование уравнения (27) или (28) сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений векторных линий (25).

Пусть $\psi_1(x,y,z)=c_1$ и $\psi_2(x,y,z)=c_2$ – два независимых первых интеграла системы (26). Выделяя из двухпараметрического семейства векторных линий $\psi_1(x,y,z)=c_1$, $\psi_2(x,y,z)=c_2$, называемых характеристиками уравнений (27) или (28), произвольным способом однопараметрическое семейство $\Phi(c_1,c_2)=0$ и устанавливая какую-нибудь непрерывную зависимость между параметрами c_1 и c_2, получим искомое уравнение векторных поверхностей:

$$\Phi\left(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z)\right)=0\ . \tag{29}$$

Если требуется найти не произвольную векторную поверхность поля $\vec{F}$, а поверхность, проходящую через заданную линию, определяемую уравнением $\Phi_1(x,y,z)=0$ и $\Phi_2(x,y,z)=0$, то функция Φ в (29) уже не будет произвольной, а определится путем исключения переменных x,y,z из системы уравнений:

$$\Phi_1(x,y,z)=0,\ \ \Phi_2(x,y,z)=0,$$
$$\psi_1(x,y,z)=\ _1,\ \psi_2(\ ,\ ,\ )=\ _2.$$

Эта система должна удовлетворяться в точках линии $\Phi_1=0$ и $\Phi_2=0$, через которую мы проводим характеристики $\psi_1(x,y,z)=c_1$ и $\psi_2(x,y,z)=c_2$. Задача станет неопределенной, если заданная линия $\Phi_1(x,y,z)=0$, $\Phi_2(x,y,z)=0$ является характеристикой, так как в этом случае эту линию можно включить в различные однопараметрические семейства характеристик и тем самым получить различные интегральные поверхности, проходящие через эту линию. Итак, интеграл квазилинейного уравнения $P(x,y,z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$, зависящий от произвольной функции Ф, может быть вычислен следующим образом:

1) интегрируем вспомогательную систему уравнений $\dfrac{dx}{P(x,y,z)}=\dfrac{dy}{Q(x,y,z)}=\dfrac{dx}{R(x,y,z)}$ и, находя два независимых первых интеграла этой системы: $\psi_1(x,y,z)=c_1$ и $\psi_2(x,y,z)=c_2$, получим искомый интеграл в виде $\Phi\left(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z)\right)=0$, где Φ - произвольная функция.

Уравнение интегральной поверхности того же квазилинейного уравнения, проходящей через заданную линию, определяемую уравнениями $\Phi_1(x,y,z)=0$ и $\Phi_2(x,y,z)=0$, можно найти, взяв упомянутую выше функцию Φ не произвольно, а определив функции $\Phi(c_1,c_2)$ путем исключения x,y,z из уравнений:

$$\Phi_1(x,y,z)=0,\ \Phi_2(x,y,z)=0,$$
$$\psi_1(x,y,z)=\ _1,\ \psi_2(\ ,\ ,\ )=\ _2,$$

в результате чего получим уравнение $\Phi(c_1,c_2)=0$, и искомым интегралом будет $\Phi(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z))=0$.

4 Уравнение Пфаффа. Необходимое и достаточное условия ортогональных к векторным линиям семейства поверхностей (живых сечений)

При проектировании проточной части, обеспечивающей требуемое распределение поля скоростей $\vec{F}=P(x,y,z)\imath+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$, возникают задачи о нахождении векторных поверхностей и семейства поверхностей, ортогональных к векторным линиям (живых сечений). Уравнения таких поверхностей $U(x,y,z)=c$ называют уравнениями Пфаффа [6, 7].

Их можно записать в виде обобщения уравнения (17) на три переменные:

$$(\vec{F}\cdot\vec{t})=0,\ P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0, \tag{30}$$

где P,Q и R – заданные функции (x,y,z), $\vec{t}$ – вектор, расположенный в касательной плоскости к искомым поверхностям $t=\imath dx+jdy+kdz$.

Если выполнены условия:

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\equiv 0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\equiv 0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 0, \tag{31}$$

то левая часть уравнения (30) есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y,z)$, определяемой выражением:

$$U=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz, \tag{32}$$

а криволинейный интеграл (32) не зависит от пути интегрирования между выбранной фиксированной точкой (x_0,y_0,z_0) и точкой с переменными координатами (x,y,z).

Геометрически выражение (32) определяет семейство поверхностей в пространстве. Если же левая часть (30) не есть полный дифференциал, то найдя интегрирующий множитель $\mu(x,y,z)$, чтобы левая часть уравнения $\mu(Pdx+Qdy+Rdz)=0$ была полным дифференциалом или выполнялись условия:

$$\frac{\partial(\mu R)}{\partial y}-\frac{\partial(\mu Q)}{\partial z}=0;\qquad \frac{\partial(\mu P)}{\partial z}-\frac{\partial(\mu R)}{\partial x}=0;\qquad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}-\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=0, \tag{33}$$

которые можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned}\mu\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)&=Q\frac{\partial \mu}{\partial z}-R\frac{\partial \mu}{\partial y},\\ \mu\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)&=R\frac{\partial \mu}{\partial x}-P\frac{\partial \mu}{\partial z},\\ \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)&=P\frac{\partial \mu}{\partial y}-Q\frac{\partial \mu}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Умножая каждое уравнение (34), соответственно на P, Q, R и складывая их, после деления на μ получим выражение, которому должны удовлетворять проекции скорости P, Q, R :

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0 \text{ или } \left(\vec{F}\cdot rot\vec{F}\right)=0\,, \qquad (35)$$

где вектор $rot\vec{F}$ - вихрь поля, который определяется равенством:

$$rot\vec{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\,.$$

Так как выражения (33) не всегда могут выполняться, равенство (35) определяет необходимое и достаточное условие существования такого множителя [6, 7] и называется оно условием полной интегрируемости уравнения (30). Геометрический смысл уравнения (35) и его общего интеграла (33), когда последний существует, состоит в том, что функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ определяют в каждой точке некоторый вектор $\vec{V}(x,y,z)$, проекциями которого на оси координат они являются. Система дифференциальных уравнений $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ определяет семейство некоторых линий (L) в пространстве, в каждой точке которых соответствующий вектор $\vec{V}$ направлен по касательной. Их называют векторными линиями, или линиями тока для жидкости. Уравнение (30) выражает условие перпендикулярности векторов $\vec{F}$ и $\vec{t}$ и определяет в каждой точке некоторый плоский элемент, перпендикулярный к $\vec{V}$, лежащий в нормальной плоскости к той из линий (L), которая проходит через взятую точку. Так как интеграл (32) определяет семейство поверхностей, касательные плоскости к которым в каждой точке нормальны к $\vec{V}$, то поверхности (32) (живые сечения) будут ортогональны к линиям (L), которые называют линиями тока.

ВЫВОДЫ

1. Для существования семейства поверхностей $U(x,y,z)=c$, ортогональных векторным линиям векторного поля $\vec{F}$, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\vec{F}$ и $rot\vec{F}$ были бы ортогональны, т.е. $\left(\vec{F}\cdot rot\vec{F}\right)\equiv 0$.

2. Условие $\left(\vec{F}\cdot rot\vec{F}\right)=0$ называется условием интегрируемости уравнения Пфаффа $Pdx+Qdy+Rdz=0$ одним соотношением

$U(x,y,z)=c$. Так как на искомых поверхностях $U(x,y,z)=c$ должно обращаться в тождество уравнение $Pdx+Qdy+Rdz=0$ и на этих поверхностях криволинейный интеграл $\int_L Pdx+Qdy+Rdz$ должен быть равен нулю по любому пути, то правильно выбрав его, всегда можно определить интегрирующий множитель и восстановить в реальной ПЧ принятую модель течения жидкости.

CHOOSING THE THICKNESS OF THE IMPELLER IN THE DESIGN OF THE HYDRAULIC MACHINE

S. D. Kostornoy, N. S. Martynova,
Sumy State University,
2 Rimsky-Korsakov Str., 40007 Sumy, Ukraine

In the applied tasks building of the mathematical model is one of the most complex and responsible work stages. Experience shows that choosing the right model means solving a greater part of the task.

Key words: *mathematical model (MM); designing of hydraulic machines; reverse, direct task; potential, multiple-bedded, corkscrew flow.*

ВИБІР ТОВЩИНИ ЛОПАТІ РОБОЧОГО КОЛЕСА ПРИ ПРОЕКТУВАННІ ЛОПАТЕВОЇ ГІДРАВЛІЧНОЇ МАШИНИ

С. Д. Косторной, Н. С. Мартинова,
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007, Україна

Побудова математичної моделі в прикладних задачах є складним та відповідальним етапом роботи. Досвід свідчить, що вірно вибрати модель –значить розв'язати більше , чим половину задачі.

Ключові слова: математична модель (ММ); проектування гідравлічних машин; обернена, пряма задачі; потенційна, складна шарова, гвинтова течія.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Косторной С. Д. Построение лопасти радиально-осевой турбины / С. Д. Косторной // Гидравлические машины. – Харьков,1968. — Вып. 2. — С. 116-122.
2. Косторной С. Д. О применении естественной ортогональной системы координат в теории решеток / С. Д. Косторной. — Гидравлические машины. – Харьков, 1968. — Вып. 2 — С. 48-52.
3. Косторной С. Д. Выбор формы течения жидкости при профилировании решеток / С. Д. Косторной // Гидравлические машины. – Харьков, 1971. — Вып. 5. — С. 8-12.
4. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков / О. Ф Васильев. – М-Л. : ГЭИ. – 1958. – 144 с.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М. : Наука,1987. – 904 с.
6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В Степанов. — М.,1959. — 468 с.
7. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. — М. : Наука, 1965. — 424 с.

Поступила в редакцию 5 ноября 2012 г.