ЖУРНАЛ ІНЖЕНЕРНИХ НАУК
JOURNAL OF ENGINEERING SCIENCES
ЖУРНАЛ ИНЖЕНЕРНЫХ НАУК
Web site: http://jes.sumdu.edu.ua/
Том 3, № 2 (2016)

УДК 621.914.6:621.824.43

Повышение точности червячных шлицевых фрез путем аппроксимации теоретического профиля участком эвольвенты окружности

М. В. Фролов[1)]

[1)] *Запорожский национальный технический университет, ул. Жуковского, 64, 69063, г. Запорожье, Украина*

Article info:
Paper received: 29 November 2016
The final version of the paper received: 09 December 2016
Paper accepted online: 22 December 2016

Correspondent Author's Address:
[1)] mc.frolov@gmail.com

Одним из наиболее распространенных и эффективных методов изготовления прямобочных шлицевых валов является их нарезание червячными фрезами методом обкатки. При этом теоретический профиль фрезы с учетом его нетехнологичности традиционно аппроксимируется (заменяется) участком одной окружности либо участками двух окружностей. В ряде случаев такой подход не обеспечивает точности замены либо усложняет процесс изготовления фрезы. Альтернативой традиционному подходу к аппроксимации теоретического профиля является его замена участком эвольвенты окружности. В работе предложен подход к такой замене, который базируется на равенстве радиусов кривизны теоретического и заменяющего профилей в расчетных точках; разработаны методики и алгоритмы расчета параметров заменяющей эвольвенты, а также оценки точности такой замены. Приведен результат расчета, демонстрирующий более чем в 20 раз высшую точность аппроксимации в сравнении с заменой участком окружности.

Ключевые слова: прямобочный шлицевый вал, червячная фреза, теоретический профиль, заменяющая окружность, эвольвента окружности, смещение систем координат, угол развернутости, основная окружность, точность аппроксимации.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обработка прямобочных шлицевых валов червячными фрезами методом обкатки является одним из наиболее производительных, точных и технологичных методов, в том числе благодаря непрерывности процесса обработки до полного изготовления детали. При этом достигаются высокие эксплуатационные характеристики поверхностного слоя [1].

1.1. Состояние проблемы и постановка задачи

Преимущества нарезания шлицевых валов червячными фрезами несколько нивелируются тем, что теоретический профиль фрезы представляет собой сложную кривую, которую нельзя реализовать на практике. В этой связи теоретический профиль аппроксимируется более технологичным. Традиционно теоретический профиль заменяют дугой окружности, которую формируют шлифовальным кругом, профиль которого, в свою очередь, получается в результате правки алмазом. Правку проводят на приспособлении с одним равномерным вращательным движением, где ось вращения проходит через державку алмаза. Результатом замены является возникновение погрешности профиля фрезы, которая в соответствии с ГОСТ 8027–86 не должна превышать 1/3 допуска на ширину шлица. Этим же стандартом устанавливается, что отклонение профиля допускается «только в плюс», что при замене дугой окружности обеспечивается не на всей его длине. В том случае, когда путем замены окружностью не удается достичь требуемой точности – теоретический профиль аппроксимируется дугами двух окружностей, что усложняет процесс правки. Процедура подбора заменяющей/заменяющих окружностей подробно описана в литературе. Кроме этого, процедура контроля фрез в соответствии с тем-же стандартом путем нарезания и контроля так называемых пробных колец представляется достаточно трудозатратной. Отсюда видно, что задача аппроксимации теоретического профиля с наибольшей точностью является весьма актуальной. Профиль фрезы можно пытаться заменять разными кривыми, задавая траекторию движения алмаза в процессе правки при помощи копира. Однако интерес представляет подбор такой заменяющей кривой, которую в процессе правки, как и окружность, можно получить за счет простых движений – равномерных вращательного и поступательного, и которая обеспечит не только существенно более высокую точность замены, но и отклонение профиля в плюс. Принимая во внимание кинематику процесса фрезерования прямобочного профиля методом обкатки, есть смысл рассмотреть возможность замены теоретического профиля участком эвольвенты окружности.

1.2. Цель работы

Исходя из вышеизложенного, целью настоящей работы является оценка возможности замены теоретического профиля червячной фрезы для нарезания прямобочных шлицевых валов участком эвольвенты окружности. Для этого необходимо разработать методики и алгоритм расчета (подбора) параметров заменяющей эвольвенты. Результатом применения такой методики будет повышение точности червячных фрез для обработки прямобочных шлицевых валов.

2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Исходными данными для расчета являются модифицированные (расчетные) размеры шлицевого вала (для валов, которые не будут шлифоваться после фрезерования) – внутренний диаметр d_p, внешний диаметр D_p и ширина шлица b_p [2]:

$$d_p = d_{\min} + 0{,}25 \cdot T_d\,,$$
$$D_p = D_{\max} - 2c_{\min}, \qquad (1)$$
$$b_p = b_{\min} + 0{,}25 \cdot T_b\,,$$

где d_{min}, D_{max}, c_{min}, b_{min} – предельно допустимые размеры соответственно внутреннего диаметра, внешнего диаметра, фаски и ширины шлица; T_d, T_b – допуски на соответственно внутренний диаметр и ширину шлица.

Теоретический профиль фрезы описывается параметрическими уравнениями от углового параметра α (рис. 1). Здесь и далее индекс «p» относится к системе координат профиля [2]:

$$X_p = R_0\{\alpha - [\sin(\alpha+\gamma) - \sin\gamma]\cdot\cos(\alpha+\gamma)\} \qquad (2)$$
$$Y_p = R_0[\sin(\alpha+\gamma) - \sin\gamma]\cdot\sin(\alpha+\gamma).$$

В уравнении (2) R_0 – радиус начальной окружности:

$$R_0 = \frac{1}{2}\sqrt{D_p^2 - 0{,}75\cdot b_p^2}\,, \qquad (3)$$

γ – профильный угол:

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{b_p}{2\cdot R_0}\right). \qquad (4)$$

Предельные значения углового параметра α, исходя из рабочей высоты шлица, определяются, основываясь на зависимостях из работы [2], следующим образом (α_{min} соответствует радиусу начальной окружности R_0):

$$\alpha_{\min} = \gamma\,,$$

$$\cos\alpha_{\max} = \frac{d_p}{2R_0}\,, \qquad (5)$$

$$\sin\delta_2 = \frac{b_p}{d_p}\,.$$

Уравнение эвольвенты в параметрическом виде, где параметром является угол развернутости q, в своей системе координат имеет вид [3] (рис.1):

$$X_e = -R_b[\cos(q+\beta) + q\sin(q+\beta)], \qquad (6)$$
$$Y_e = R_b[\sin(q+\beta) - q\cos(q+\beta)].$$

Здесь и далее индекс «e» относится к системе координат эвольвенты; R_b – радиус основной окружности эвольвенты; β – угол поворота эвольвенты.

При замене теоретического профиля (рис. 1) прежде всего на нем выбираются две точки – «1» и «2», задаваемые параметрами α_1 и α_2 (находящимися в пределах от α_{min} до α_{max}), координаты которых соответственно (X_{p1}, Y_{p1}) и (X_{p2}, Y_{p2}) определяются из уравнений (2). Далее, на эвольвенте необходимо выбрать свои точки «1» и «2», которые в результате ее поворота на угол β и смещения по осям X и Y соответственно на величины X_0 и Y_0 должны совпасть с соответствующими точками профиля (на рис.1 перемещения показаны пунктиром). Тогда смещение начала координат системы эвольвенты $X_eO_eY_e$ относительно системы координат профиля $X_pO_pY_p$ будет определяться следующим образом:

$$X_0 = X_p - X_e\,, \qquad (7)$$
$$Y_0 = Y_p - Y_e\,.$$

Записав уравнения (7) с учетом уравнений (6) для двух точек, получим систему из четырех уравнений, в то время как количество неизвестных в них – шесть: радиус основной окружности R_b; угол поворота эвольвенты β; смещение системы координат по осям – X_0, Y_0; углы развернутости для обеих точек q_1 и q_2. Таким образом, решение этой задачи требует дополнительных условий или ограничений. В качестве такого условия предлагается взять равенство радиусов кривизны профиля и эвольвенты в точках «1» и «2». В общем случае радиус кривизны ρ произвольной кривой, заданной параметрически, определяется по формуле

$$\rho = \frac{\sqrt{\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right)^3}}{\dot{X}\ddot{Y} - \dot{Y}\ddot{X}}\,. \qquad (8)$$

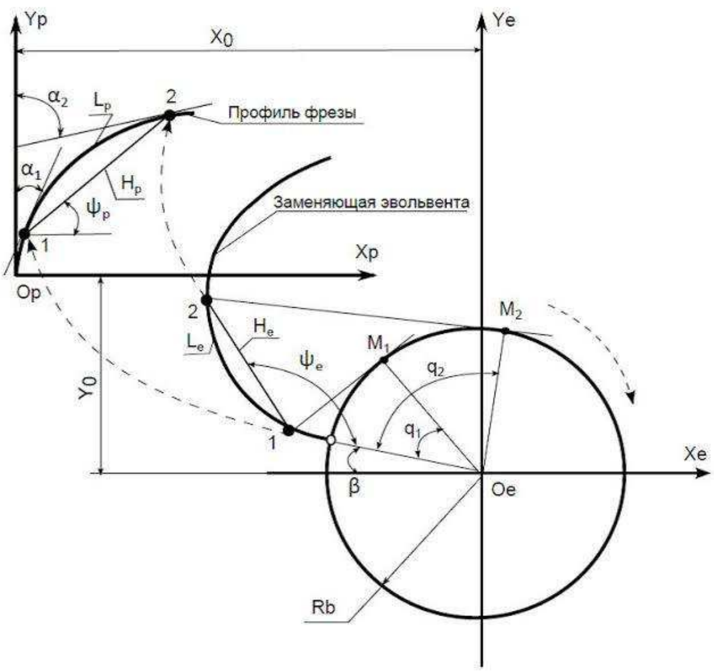

Рисунок 1 – Теоретический профиль фрезы

Используя уравнения (8), (2) и (6), после ряда преобразований были получены уравнения для радиусов кривизны профиля ρ_p и эвольвенты $\rho_в$:

$$\rho_p = R_0\left(2\cdot\sin\alpha - \sin\gamma\right), \tag{9}$$
$$\rho_e = R_b q .$$

Приравняв радиусы кривизны ρ_p и $\rho_в$ для 2 точек – «1» и «2», с учетом уравнений (7) получаем систему из шести трансцендентных уравнений, которую каким-либо численным методом необходимо решить относительно R_b, β, q_1, q_2, X_0, Y_0. Однако эта задача может быть решена и проще путем нескольких итераций, о чем говорится дальше.

Для того чтобы точки «1» и «2» эвольвенты могли совместиться с соответствующими точками профиля, длины хорд H_p и H_e (рис. 1) должны быть равны. Определение длины хорды H_p не вызывает сложности, так как координаты точек профиля задаются, а вот попытка получения аналитического выражения для H_e также приводит к трансцендентному уравнению, решаемому численно. Поэтому в первом приближении приравняем длины линий участков профиля и эвольвенты, лежащих между точками «1» и «2» – L_p и L_e. Длина участка произвольной кривой, заданной параметрически от параметра t и лежащей между двумя точками, характеризуемыми параметрами t_1 и t_2, определяется формулой

$$L = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2}\,dt . \tag{10}$$

Используя уравнения (10), (2) и (6), после ряда преобразований получены зависимости для определения длин кривых – профиля и эвольвенты, лежащих между соответствующими точками «1» и «2» – L_p и L_e:

$$L_p = R_0\left[2\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) - \sin\gamma\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\right], \tag{11}$$
$$L_e = \frac{1}{2}R_b\left(q_2^2 - q_1^2\right).$$

Из уравнений (11) и (9) может быть получено выражение для определения радиуса основной окружности эвольвенты R_b, обеспечивающего:

– равенство радиусов кривизны профиля и эвольвенты в точках «1» и «2»;

– равенство длин кривых – профиля и эвольвенты, лежащих между теми же точками,

$$R_b = \frac{\rho_{p2}^2 - \rho_{p1}^2}{2\cdot L_p}. \tag{12}$$

Имея радиус R_b, можно определить угол β (также в первом приближении), на который следует повернуть эвольвенту, для того чтобы ее точки «1» и «2» совмещались с соответствующими точками профиля. Для этого с учетом уравнений (9) определяются значения q_1 и q_2:

$$q_1 = \frac{q_{p1}}{R_b},\ q_2 = \frac{q_{p2}}{R_b}. \tag{13}$$

А далее расчет β выполняется в следующей последовательности:

$$U_1 = \cos q_1 + q_1\sin q_1,\ U_2 = \cos q_2 + q_2\sin q_2, \tag{14}$$
$$W_1 = \sin q_1 - q_1\cos q_1,\ W_2 = \sin q_2 - q_2\cos q_2,$$
$$Q = \frac{U_1 - U_2}{W_2 - W_1}.$$

Если Q > 0, то $\psi_b = arctg(Q)$.

Если Q < 0, то $\psi_b = \pi - \left|arctg(Q)\right|$.

$$\psi_p = acrtg\left(\frac{Y_{p2} - Y_{p1}}{X_{p2} - X_{p1}}\right),\ \beta = \psi_b - \psi_p .$$

Полученные в результате первого приближения значения R_b и β последовательно корректируются – с шагом ΔR_j изменяется R_b: $R_{b\,(j+1)} = R_{b\,(j)} \pm \Delta R_j$, а затем пересчитывается β. Корректировка проводится таким образом, чтобы координаты центра системы координат эвольвенты O_e (X_0, Y_0), рассчитанные по уравнениям (7) для точек «1» и «2», совпали бы с заданной точностью, что будет свидетельствовать о совпадении самих точек. Если обозначить координаты центра, рассчитанные для точек, соответственно $X_{0\,(1)}$, $Y_{0\,(1)}$, и $X_{0\,(2)}$, $Y_{0\,(2)}$, то это условие будет иметь вид:

$$\Delta = \sqrt{\left(X_{0(1)} - X_{0(2)}\right)^2 + \left(Y_{0(1)} - Y_{0(2)}\right)^2} \to 0 . \tag{15}$$

Как показывают расчеты, при точности R_b до 0,01 мм и β до 0,1° порядок величины Δ может составлять $3\cdot10^{-4}$ мм, а расхождение длин кривых при этом составит около $6\cdot10^{-5}$ мм.

Критерием эффективности предложенной методики и алгоритма является точность замены теоретического профиля. Для этого в ряде точек теоретического профиля i нужно найти кратчайшее расстояние до эвольвенты – ε_i, максимальное из которых и будет точностью замены E. Это условие записывается так:

$$E = \max\left\{\varepsilon_i = \sqrt{f(q)}\right\}, \tag{16}$$
$$f(q) = \left(X_{pi} - X_e - X_0\right)^2 + \left(Y_{pi} - Y_e - Y_0\right)^2 \to \min .$$

Условие минимума функции $f(q)$ обеспечивается при $df(q)/dq = 0$, что после ряда преобразований приводит к уравнению:

$$X_{pi}\cos(q+\beta) - Y_{pi}\sin(q+\beta) + R_b = 0 . \tag{17}$$

Уравнение (17) решается относительно q, после чего для найденного значения q по уравнениям (16) вычисляется ε_i. Определение угла развернутости q осуществляется в следующей последовательности:

$$b = \frac{2Y_{pi}}{R_b - X_{pi}},\ c = \frac{R_b + X_{pi}}{R_b - X_{pi}}, \tag{18}$$
$$Z = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2},\ q = 2arctg(Z) - \beta .$$

A

3. ВЫВОДЫ

Для оценки предлагаемой методики и алгоритма был проведен расчет параметров заменяющей эвольвенты теоретического профиля фрезы, предназначенной для обработки шлицевого вала средней серии 10х82х92х12. Некоторые из полученных результатов приведены в табл. 1

Для сопоставления полученных результатов с точностью замены теоретического профиля дугой окружности расчет был проведен по методике, изложенной в [2]. Рассчитанная погрешность замены при этом составила 12,5 мкм, что более чем в 20 раз больше, чем при замене участком эвольвенты.

Кроме того, анализ полученных в результате расчета координат точек теоретического профиля и заменяющей эвольвенты показал, что все отклонения, как того и требует стандарт, располагаются только в плюс.

Таким образом, могут быть сформулированы следующие выводы:

1. Эвольвента окружности может быть принята в качестве заменяющей кривой для аппроксимации (замены) теоретического профиля фрезы для нарезания прямобочных шлицевых валов.
2. Предложенная методика аппроксимации теоретического профиля участком эвольвенты, расчета параметров заменяющей эвольвенты и оценки точности аппроксимации позволяет достичь не только существенно более высокой точности замены по сравнению с традиционной аппроксимацией участком окружности, но и расположения заменяющего профиля в соответствии со стандартом.

Таблица 1 – Параметры заменяющей эвольвенты. Результаты расчета

Наименование	Ед. изм.	Значение
Радиус основной окружности R_b	мм	88,247
Угол поворота эвольвенты β	рад / град.	1,633 / 93,6
Углы развернутости в расчетных точках: q_1 q_2	рад / град.	 0,0679 / 3,896 0,2790 / 15,984
Координаты центра основной окружности заменяющей эвольвенты: X_0 Y_0	мм	 –5,563 –88,276
Погрешность замены (максимальная) E	мкм	0,58

Spline shaft hob cutter accuracy increase by the means of theoretical profile approximation by the circle involute section

M. V. Frolov[1)]

[1)] *Zaporizhzhya National Technical University, 64, Zhukovskogo Str., 69063, Zaporizhzhya, Ukraine*

One of the most wide spread and efficient spline shafts manufacturing methods is their cutting by the means of generating process by hob cutters. In this case, hob cutter’s theoretical profile, taking in to account its inadaptability to manufacture, traditionally is approximated by the section(s) of one or two circles. In some cases this approach do not provides necessary accuracy or increase complexity of the manufacturing process. Alternative to the traditional approximation approach is theoretical profile substitution by the circle involute section. Absence of the methods for circle involute parameters evaluation makes this work relevant. There is approach suggested for this kind of substitution, based on equality of theoretical profile’s and substituting curve’s curvature radii in rated points. Methods and algorithms for substituting circle involute parameters and substitution accuracy evaluation are suggested. Given evaluation result shows more than 20 times higher approximation accuracy in comparison with the circle section substitution.

Keywords: linear-form spline shaft, hob cutter, theoretical profile, substituting circle, circle involute, coordinate system shift, sweep angle, basic circle, approximation accuracy.

Підвищення точності черв’ячних шліцьових фрез шляхом апроксимації теоретичного профілю ділянкою евольвенти кола

М. В. Фролов[1)]

[1)] *Запорізький національний технічний університет, вул. Жуковського, 64, 69063, м. Запоріжжя, Україна*

Одним із найбільш поширених та ефективних методів виготовлення прямобічних шліцьових валів є їх нарізання черв’ячними фрезами методом обкатування. При цьому теоретичний профіль фрези з огляду на його нетехнологічність традиційно апроксимується (замінюється) ділянкою одного кола або двох кіл. У ряді випадків такий підхід не забезпечує потрібної точності заміни або ускладнює процес виготовлення фрези. Альтернативою традиційному підходу до апроксимації теоретичного профілю є його заміна ділянкою евольвенти кола. У роботі запропонований підхід до такої заміни, що базується на рівності радіусів кривизни теоретичного профілю та профілю, що замінює у розрахункових точках; розроблені методики та алгоритми розрахунку параметрів евольвенти, що замінює теоретичний профіль, а також оцінювання точності такої заміни. Наведено результат розрахунку, який демонструє вищу більше ніж у 20 разів точність апроксимації порівняно із заміною ділянкою кола.

Ключові слова: прямобічний шліцьовий вал, черв’ячна фреза, теоретичний профіль; коло, що замінює; евольвента кола, зміщення систем координат, кут разгорнутості, основне коло, точність апроксимації.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Желтобрюхов Е. М. Автоматизированное проектирование червячных шлицевых фрез / Е. М. Желтобрюхов, М. С. Кузнецов // Ползуновский вестник. – 2011. – № 3/1. – С. 22 – 25.
2. Галактионова А. П. Автоматизированное проектирование червячных шлицевых фрез [Электронный ресурс] / А. П. Галактионова. – Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2008. – 28 с. – Режим доступа : http://study.urfu.ru/Aid/Publication/7415/1/Freza-otred.pdf
3. Елисеев В. В. О методе огибания в теории зацепления [Электронный ресурс] / В. В. Елисеев, А. Н. Евграфов, Ю. А. Семенов // Теория механизмов и машин. – 2004. – Т. 2, № 1. – С. 42–50.– Режим доступа : http://tmm.spbstu.ru/3/eliseev.pdf.

REFERENCES

1. Zheltobrukhov, E. M., Kuznetsov, M. S. (2011). Avtomatizirovanoye proektironanie cherviachnyh shlitsevyh frez [Computer aided design of the hob cutters for spline shafts]. Polzunovsky Vestnik, Polzunov's Herald, 3/1, 22–25 [in Russian].
2. Galaktionova, A. P. (2008). Avtomatizirovanoye proektirovanie cherviachnyh shlitsevyh frez [Computer aided design of the hob cutters for spline shafts]. Ekaterinburg: UPI. study.urfu.ru. Retrieved from http://study.urfu.ru/Aid/Publication/7415/1/Freza-otred.pdf [in Russian].
3. Eliseev, V. V., Evgrafov, A. N., Semenov, U. A. (2004). O metode ogibaniya v teorii zatsepleniya [About envelope method in gearing theory]. Teoriya mekhanizmov i mashin, Theory of mechanisms and machines, Vol. 2, Issue 1, 42–50. tmm.spbstu.ru Retrieved from http://tmm.spbstu.ru/3/eliseev.pdf [in Russian].