

## Моделювання процесу виробництва. Економічні характеристики процесу виробництва та їх взаємозв'язок

Роман Олегович Циганчук,  
завідувач редакційного сектору видавництва  
Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ)

**Анотація.** Описано виробничий процес і його економіко-математичну модель, основні характеристики економіко-математичних моделей, економіко-статистичні моделі. Сформульовано загальне поняття виробничої функції та задачі економіко-статистичного аналізу і моделювання виробничих процесів.

Запропоновано підхід щодо узагальнення методу визначення відносних і граничних показників виробництва на основі співвідношень між абсолютними і відносними величинами на випадок багатofакторних функцій. Отримано вирази часткових і повних еластичностей виробництва, які дають змогу знаходити їх через середні значення виробничої функції.

**Ключові слова:** виробнича функція, економіко-математична модель, економічні показники, еластичність.

**Вступ.** Головним завданням підприємства, об'єднання, галузі є задоволення виробничих та інших потреб народного господарства в певних видах товарів чи послуг. Завдання виконується шляхом організації виробничого процесу – процесу переробки сировини, матеріалів, напівфабрикатів у готову продукцію, яка буде реалізована споживачеві. Для забезпечення нормального протікання цього основного процесу необхідним є ряд інших, допоміжних процесів, таких як матеріально-технічне постачання, капітальний ремонт, реконструкція і модернізація оснащення, фінансування затрат на виробництво, забезпечення його кадрами відповідної кваліфікації, а також різноманітною документацією, потрібною для виробництва продукції. Крім цього, у функції підприємства чи виробничого об'єднання входять реалізація і доставка споживачеві виготовленої продукції і т. д. У результаті будь-яка, навіть відносно мала за масштабом, господарська одиниця являє собою складну систему, в якій взаємодіють десятки економічних, технічних і соціальних процесів, які постійно змінюються під дією зовнішніх умов, у тому числі науково-технічного прогресу.

У такій ситуації управління виробничими об'єктами перетворюється в задачу, яка потребує застосування спеціальних засобів аналізу і планування. Одним із таких засобів є економіко-математичне моделювання.

Як відомо, суть математичного моделювання являє собою заміну реального об'єкта певною математичною конструкцією (математичною моделлю), яка в тому чи іншому сенсі відображає характерні риси процесу, який моделюється. При цьому між деякими характеристиками моделі і властивостями процесу встановлюється двосторонній зв'язок, завдяки якому, з одного боку, можна використовувати дані про особливості процесу для побудови та уточнення його моделі, з іншого – інтерпретувати результати його дослідження в термінах, які безпосередньо характеризують властивості процесу.

Самі по собі математичні об'єкти – матриці, функції, рівняння і т. п., будучи результатами абстрагування властивостей багатьох реальних об'єктів чи про-

цесів, втрачають зв'язок із конкретними процесами і служать вихідним «матеріалом» для моделювання. Їх також можна називати математичними моделями, якщо не вимагати роз'яснення, який реальний процес і з якою метою моделюється. Для того щоб зв'язати такий математичний об'єкт із реальним об'єктом і говорити не про модель «загалом», а про модель конкретного об'єкта, слід вказати способи використання інформації про об'єкт для побудови й уточнення моделі (ідентифікації моделі чи її компонентів), а також способи та можливості використання моделі для вивчення властивостей об'єкта (способи інтерпретації моделі чи її компонентів). Таким чином, під математичною моделлю цього процесу розуміють математичну конструкцію, яка є результатом ідентифікації та інтерпретації її компонентів.

Процес ідентифікації моделі на основі даних про реальний об'єкт, з іншого боку, може розглядатись як процес вимірювання різноманітних характеристик об'єкта; інструментом вимірювання при цьому служить сама модель, яка ідентифікується.

Для зв'язку між реальним виробничим процесом і його математичною моделлю використовується велика кількість показників. Кожен із них являє собою спосіб визначення кількісної характеристики процесу. У певних випадках значення показників даються не в числових, а в порядкових чи номінальних шкалах. Тоді показники називаються *ознаками*.

Вихідними даними для знаходження фактичних значень кількісних показників служать результати безпосередніх вимірів (спостережень) чи розраховані задалегідь значення інших показників. Для фактичних значень *економічних показників* характерно, що первинними вихідними даними є дані бухгалтерського обліку і статистичної звітності.

*Економіко-математичні моделі* виділяються серед математичних моделей тим, що об'єктом моделювання є економічні процеси, самі моделі відображають економічні зв'язки чи відношення, які існують у реальних процесах чи явищах. При ідентифікації та інтерпретації економіко-математичних моделей використовуються економічні показники.



Кожна економіко-математична модель реального явища характеризується: а) об'єктом моделювання; б) системним описом об'єкта; в) цілями побудови моделі; г) принципами моделювання; д) апаратом моделювання; е) способами ідентифікації та інтерпретації.

Об'єктом моделювання може бути або реальна господарська система, або один чи кілька процесів, які відбуваються в такій системі. Для побудови моделі потрібно не просто вказати назву об'єкта, а дати його опис у вигляді системи, визначити його границі взаємодії з навколишнім середовищем, його структуру. Моделі, які відображають один і той же об'єкт із різних точок, слід вважати різними.

Побудова моделі сама по собі не є самоціллю. Більшість економіко-математичних моделей будуються із цілком конкретними цілями, для розв'язування певних планово-аналітичних задач. Поняття адекватності моделі можна пояснювати двоюко. По-перше, можна говорити про адекватність моделі щодо реального процесу, який вивчається, розуміючи під цим ступінь відповідності між його характеристиками і характеристиками моделі. По-друге, слід оцінювати адекватність щодо поставленої задачі.

Оскільки модель являє собою суттєво спрощений образ реальності, якісь її сторони не знаходять відображення в моделі, тоді як іншим приділяється особлива увага. В основі кожної моделі – система передумов, що визначають вихідні принципи побудови моделі. Формулювання і послідовна реалізація цих принципів при побудові моделі необхідні для правильного розуміння суті результатів, отриманих за допомогою моделі.

Апарат моделювання визначається типом математичних конструкцій, які використовуються для побудови моделі. Найбільш поширеними є моделі, які побудовані за допомогою апарату матричної алгебри, лінійного програмування, регресійного аналізу. Іноді говорять про специфічний «апарат виробничих функцій». Вибір того чи іншого апарату моделювання більшою мірою опирається на передумови, які покладено в основу моделі. Останню групу характеристик моделі становлять способи ідентифікації та інтерпретації моделі.

Наведені шість груп характеристик, звичайно, не визначають економіко-математичну модель однозначно, проте вони містять достатню інформацію для класифікації моделі, яка буде проводитися в подальшому з метою виділення серед них виробничої функції.

Найближче завдання – виділити, користуючись наведеною вище класифікацією, із множини всіх економіко-математичних моделей виробничу функцію (ВР) як особливий вид економіко-математичних моделей. Розглянемо з цієї метою зміст кожного з ознак а – е:

а) **об'єкт моделювання.** Безпосереднім об'єктом моделювання для ВР є процеси виробництва продукції в реально функціонуючих протягом певного часу господарських системах – на підприємстві, в об'єднанні, галузі, регіоні чи в народному господарстві в цілому. Відповідно до рівня системи, яка моделюється, у структурі управління народним господарством виробничі функції поділяють на народногосподарські, регіональні, галузеві, а також виробничі функції об'єднань і підприємств.

Загалом, як самостійний об'єкт моделювання розглядається не вся господарська система, а її частина, яка складається з технологічно відносно однорідних виробничих одиниць. Для цієї концепції ВР у всіх випадках характерно відображення функціонування об'єкта, який моделюється як єдине ціле, без урахування його організаційної структури (у процесі побудови ВР його структурні характеристики можуть, тим не менш, прийматися до уваги);

б) **системне описання об'єкта.** У теорії виробничих функцій виробничий процес розглядається з точки зору перетворення ресурсів у продукцію. Входами при цьому є потоки ресурсів різного виду, які повністю чи частково використовуються при виробництві, виходом – готова до реалізації продукція. Функціонуючі в системі ресурси, технологія і умови організації виробництва визначають потенційні можливості і стан процесу;

в) **цілі моделювання.** Виробнича функція будується для розв'язування конкретних економічних задач, які відносять до аналізу, прогнозування і планування (у вузькому значенні слова). Застосовуються виробничі функції як самостійно, так і у складі більш складних економіко-математичних моделей. У загальному ціллі побудови виробничих функцій можна охарактеризувати як аналіз факторів росту чи прогнозування обсягу випуску продукції.

Проте в кожній конкретній ситуації ця ціль має свої особливості, які вагомо впливають на процес побудови функції. Варто розрізнити такі способи використання ВР: 1) визначення обсягу випуску за фіксованих заздалегідь значень основних ресурсів (у разі, коли ці значення не дуже відрізняються від тих, що спостерігалися в минулому); 2) те саме в разі значення ресурсів, які сильно відрізняються від усіх, що спостерігались у минулому; 3) визначення обсягу випуску за значення показників ресурсів, які належать до заданої неперервної області (зокрема, ті, що змінюються в заданих межах); 4) визначення впливу на обсяг випуску малої незалежної зміни розмірів одного чи кількох ресурсів; 5) визначення характеристик виробничого процесу, які виражаються через параметри виробничої функції;

г) **принципи моделювання.** В основі прийнятого поняття виробничої функції лежать такі принципи, відіграючи роль аксіоматематичних у теорії виробничих функцій:

1) обсяг випуску продукції, яку виробляє дана виробнича система за період, визначається розмірами засобів праці, предметів праці і власне праці, які беруть участь у процесі виробництва протягом цього періоду;

2) зв'язок між обсягом випуску і розмірами засобів праці, предметів праці та власне праці є для даної виробничої системи закономірним і відносно стійким;

3) у ряді випадків додатково приймається, що у визначених межах будь-яка незалежна зміна аргументів виробничої функції допускає реальну інтерпретацію;

д) **апарат моделювання.** Основним «матеріалом» для побудови виробничої функції служить залежність  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ , де  $y$  – об'ємний показник випуску;

$x_1, \dots, x_n$  – об'ємні показники виробничих ресурсів (число факторів виробничої функції, здебільшого не перевищує 10.) Функція  $f$  повинна бути визначеною в достатньо широкій області виробництва  $R^n$  і обчислюваною в області визначення. Останнє означає, що дослідник повинен використовувати алгоритм, який дозволяє обчислити значення  $f$  у будь-якій точці, де вона визначена. Зазвичай виробнича функція  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  будується підбором найбільш придатної функції з визначеного параметричного класу  $F = \{f_a(x_1, \dots, x_n)\}$ , де  $a = (a_1, \dots, a_k)$  – вектор параметрів. Таким чином, безпосереднім апаратом моделювання в цій концепції виробничої функції є параметричні класи обчислюваних функцій від  $n \leq 10$  змінних (в інших концепціях поняття виробничої функції як основну залежність представляють у вигляді регресії чи задачі математичного програмування). Як правило, залежність функції  $f$  від змінних і параметрів задається в явному вигляді або – рідше – як функціональні, диференціальні чи інтегральні рівняння;

е) **ідентифікація та інтерпретація моделі.** Змінні  $y, x_1, \dots, x_n$  ототожнюються з показниками обсягів випуску і основних ресурсів, які брали участь у виробництві. Пропонується можливість специфікації параметрів  $a_1, \dots, a_k$  виробничої функції на основі статистичних даних про випуск і ресурси за періоди, що минули, а також експертних, планових та якісних даних. Метод оцінки параметрів не визначається однозначно і залежить від цілі побудови функції, особливостей процесу, що моделюється, і вихідних даних. Прикладами можуть послужити методи найменших квадратів, найменших модулів і т. д. Інтерпретація параметрів, у свою чергу, залежить від методу їх оцінювання. Часто для інтерпретації отриманих параметрів застосовуються їх вираження через значення показ-

ників  $y, x_1, \dots, x_n$  і значення частинних похідних  $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ .

**Аналіз останніх наукових досліджень.** Зазвичай величини, які входять в економіко-статистичну модель, діляться на дві групи: змінні і коефіцієнти (параметри). Коефіцієнти не залежать безпосередньо від інших величин моделі і становлять ніби каркас моделі, на якому лежать усі її компоненти. Тому в економіко-статистичній літературі іноді коефіцієнти називають структурними параметрами моделі.

Розподіл величин на змінні моделі і її параметри – не є абсолютним. Залежно від того, які задачі розв'язуються за допомогою цієї моделі, одна і та ж величина може розглядатися або як змінна, отримана в результаті розв'язування моделі, або як постійна величина, визначена до використання моделі.

Процес ідентифікації моделі складається з двох частин: по-перше, змінні моделі ототожнюються з показниками діяльності об'єкта, який моделюється, по-друге, коефіцієнти отримують конкретні числові значення (або задаються за допомогою розподілу ймовірностей). Цей останній процес називають *специфікацією* коефіцієнтів.

Специфікація коефіцієнтів може здійснюватися або на основі нормативної інформації, інформації, що

міститься в нормативних актах і планах, які регламентують діяльність господарських систем, або на основі експертної інформації, або на основі статистичної і бухгалтерської інформації із застосуванням методів статистичної обробки.

Якщо параметри економіко-математичної моделі визначаються на основі статистичної інформації з використанням методів статистичної обробки даних, то модель називається *економіко-статистичною*. На практиці в більшості моделей використовуються як нормативна і експертна, так і статистична інформація. Оптимальне співвідношення між цими видами інформації залежить від конкретного об'єкта, моделі і цілі її побудови. Проте зазвичай «насичення» моделі статистичною інформацією, яка має більш об'єктивний характер, підвищує точність моделювання.

Функціонування господарських систем має цілеспрямований характер. Для цілеспрямованих процесів характерно, що кожний із них можна представити як систему із визначеним виходом і входом, яка перетворює вихідні матеріали чи дані в кінцевий результат процесу. У такій ситуації стан системи визначається сукупністю умов і засобів, які забезпечують протікання процесу.

Один із основних методологічних принципів системного аналізу процесів полягає в більш адекватному визначенні входів, виходів і станів кожного із досліджуваних процесів та визначення схеми їхньої взаємодії.

Найбільш простою та узагальненою концепцією моделі, яка відображає зв'язок між виходом, входом і станом процесу, є поняття автомата.

Математична модель виробничої системи називається *автоматом*, якщо вона включає в себе: множину  $U$ , яка інтерпретується як множина можливих вхідних впливів (різного виду ресурсів, устаткування і т. д.), множина  $Y$ , яка відповідає можливим виходам системи (продукція, послуги, вклад у приріст національного багатства і т. д.), і множина  $X$ , кожний елемент якої характеризує стан системи в даний період. Крім цього, задаються два відображення: перехідне відображення  $\varphi: U \times X \rightarrow X$  і вихідне відображення  $\psi: X \rightarrow Y$ . Кожному моменту дискретного часу  $t$  відповідає вхідний вплив  $u(t) \in U$ , стан  $x(t) \in X$  і вихід  $y(t) \in Y$ , а перехід від моменту  $t$  до  $t + 1$  задається за допомогою відображень  $\varphi$  та  $\psi$ :  $x(t + 1) = \varphi(x(t), u(t))$ ,  $y(t + 1) = \psi(x(t + 1))$ .

Зміст поняття автомата в тому, що вся тривалість процесу розбивається на окремі дискретні кроки, кожному з яких зв'язок між входом і виходом системи опосередковується за допомогою поняття стану, який акумулює в собі достатню інформацію про попередній розвиток системи. По суті, автомат є найпростішою дискретною моделлю, яка відображає поняття входу, виходу і стану (при цьому самий опис відображень  $\varphi$  та  $\psi$  може бути достатньо складним). Більшість економіко-математичних моделей, які використовуються на сьогодні, являють собою або цілий автомат, або одну з його частин – перехідне або вихідне відображення.

Для процесу виробництва продукції – головного господарського процесу в господарській системі – ви-



ходом є готова продукція, входи визначаються поставками сировини, матеріалів, комплектуючих виробів, устаткування, природом трудових і фінансових ресурсів, а стан – накопиченими запасами засобів виробництва і робочої сили.

У сучасних промислових системах вироблена продукція є результатом спільного функціонування багатьох виробничо-господарських процесів, які відчувають на собі неоднаковий вплив навколишніх обставин та які володіють різним ступенем інерційності. У цих умовах визначити кількісно залежність між виходом і входом виробничого процесу, з достатньою повнотою реконструюючи внутрішню структуру процесу, здебільшого, неможливо.

З іншого боку, відома стійкість функціонування об'єкта, який моделюється, як економічної системи дає підстави розраховувати на отримання «зовнішнього» опису процесу за допомогою опрацювання статистичних даних.

Ці обставини створюють необхідні передумови для застосування економіко-статистичного моделювання як один із засобів аналізу та управління процесом виробництва.

В економічній науці і господарській практиці встановилася така класифікація задач управління: оперативний контроль і регулювання; поточне (річні) планування; середньострокове планування; довгострокове перспективне планування; прогнозування; ретроспективний економічний аналіз.

У принципі економіко-математичні моделі можуть застосовуватися для розв'язування задач усіх перерахованих функцій управління. Проте залежно від задачі, для вирішення якої будується модель, до неї пред'являються специфічні вимоги, що стосуються її виду, параметрів, області використання.

Розроблення системи економіко-математичних моделей процесу виробництва, по суті, рівносильне створенню своєрідного «паспорта» даного господарського об'єкта, оскільки в таких моделях в узагальненому варіанті просумовані об'єктивні дані про хід цього процесу.

Економічні показники умовно поділяють на абсолютні (сумарні) і відносні (середні і граничні) величини [1].

**Метою роботи** є узагальнення методу визначення відносних і граничних показників виробництва на основі співвідношень між абсолютними і відносними величинами на випадок багатофакторних функцій та визначення часткових і повних еластичностей виробництва, які дають змогу знаходити їх через середні значення виробничої функції.

**Основний матеріал дослідження.** Для комплексного аналізу економічної ситуації і вибору найкращого рішення важливі як абсолютні, так і відносні показники. Для моделювання економічних процесів неперервних і дискретних у часі є корисним співвідношення між сумарними, середніми і граничними величинами, приведені для функції однієї змінної в роботі [2].

Покажемо можливість і доцільність таких перетворень для багаторесурсного виробництва. Для доступності і простоти викладу обмежимося функцією двох змінних, яку представимо виразом

$$y = f(x_1, x_2). \quad (1)$$

Відносні показники для кожного ресурсу виробничої функції будуть такі:

$$\mu_1 = \frac{y}{x_1}, \mu_2 = \frac{y}{x_2}. \quad (2)$$

Тепер для кожного з аргументів функцію можна представити добутками

$$y = \mu_1 x_1, y = \mu_2 x_2. \quad (3)$$

Гранична ефективність визначається похідними функції (1) щодо кожного аргументу

$$v_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1}, v_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2}. \quad (4)$$

Зовсім іншими будуть ці величини в результаті диференціювання виразів (3), а саме

$$v_1 = \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} x_1 + \mu_1, v_2 = \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} x_2 + \mu_2. \quad (5)$$

У правих частинах виразів (5) фігурують середні значення функції (1) та їхні похідні щодо кожного аргументу і відсутні похідні самої функції щодо аргументів. Зручність та ефективність представлення граничних величин у виразах (5) порівняно з виразами (4) стають очевидними в разі дискретного представлення функції відносно своїх аргументів або ж за наявності проблеми її неперервності та існування похідних.

В економічному аналізі процесу виробництва за допомогою функцій використовуються такі показники, як часткові еластичності за факторами виробництва та еластичність виробництва. Перші з них стосовно функції (1) є такими:

$$E_{x_1} = \frac{x_1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_1}, E_{x_2} = \frac{x_2}{y} \frac{\partial y}{\partial x_2}, \quad (6)$$

які з урахуванням (2) і (5) видозміняться

$$E_{x_1} = \frac{x_1}{\mu_1} \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} + 1, E_{x_2} = \frac{x_2}{\mu_2} \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} + 1. \quad (7)$$

Еластичність виробництва складається із суми часткових еластичностей, тобто

$$E(x) = E_{x_1}(y) + E_{x_2}(y). \quad (8)$$

**Висновки.** У роботі узагальнено метод визначення відносних і граничних показників виробництва на основі співвідношень між абсолютними і відносними величинами на випадок багатофакторних функцій. Отримано вирази часткових і повних еластичностей виробництва, які дають змогу знаходити їх через середні значення виробничої функції.

**Список використаних джерел**

1. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике: Учебник. – 2-е изд. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова; Изд-во «Дело и Сервис», 1999. – 368 с.
2. Білий Л. А., Дутка Г. Я., Веренько Ю. Є. Моделювання економічних характеристик процесу виробництва // Вісник УБС НБУ. – 2010. – № 2 (8). – С. 218–221.

**Summary.** This is a description of the production process and its economic and mathematical model, the main features of mathematical and economic models, economic and statistical models. The general concept of the production function and tasks of economic and statistical analysis and modeling of manufacturing processes are formulated. An approach to generalization of the method of determining the relative and critical thresholds and production based on correlations between the absolute and relative values in the case of multi-functions is introduced. The expressions of partial and total elasticity of production that let you find them through the average value of the production function are received.

**Keywords:** production function, economic and mathematical model, economic indexes, elasticity.