

## Динаміка мережевих мір складності в умовах фінансових криз

Вікторія Володимирівна Соловйова,  
доцент кафедри фінансів  
Черкаського інституту банківської справи  
Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ),  
кандидат економічних наук, доцент

**Анотація.** Досліджено мережевий підхід, що є альтернативою до методів аналізу нелінійної динаміки часових рядів і дозволяє розробити широкий спектр мережевих мір складності та адаптувати їх для дослідження кризових явищ.

**Ключові слова:** часовий ряд, складні мережі, мережевий підхід, міра складності, криза.

**Вступ.** У сучасній науці набула популярності теорія складних мереж (complex networks) [1–6], яка вивчає характеристики мереж, ураховуючи не тільки їх топологію, а й статистичні властивості, ефекти розповсюдження інформації, стійкість і т. п. До складних мереж відносять електричні, транспортні, інформаційні, соціальні, біологічні, нейронні та інші мережі [1–10]. При дослідженні складних систем мережева парадигма стала домінуючою тому, що мережева форма складної системи дозволяє ввести нові міри складності, які не існують для часового ряду.

Для окремих часових рядів уже було введено різні кількісні міри складності, зокрема: алгоритмічні [11], фрактальні [12], хаос-динамічні [13], рекурентні [14], неекстенсивні [15], нереверсивні [16] та ін.

Динамічність є суттєвою перевагою введених мір, що дає можливість відстежувати в часі зміну обраної міри та порівнювати з відповідною динамікою вихідного часового ряду. Це дозволяє зіставити критичні зміни динаміки системи, що описується часовим рядом, з характерними змінами конкретних мір складності. У процесі діагностики і прогнозування майбутніх змін виявилось, що кількісні міри складності реагують на критичні зміни в динаміці складної системи, що дозволяє використовувати їх як індикатори кризових явищ.

Проведене дослідження дозволило розглянути складні економічні системи як мережеві, а введені мережеві міри складності адаптувати для дослідження кризових явищ.

**Постановка завдання дослідження.** Останніми дослідженнями було запропоновано кілька підходів до перетворення часових послідовностей у складні мережевоподібні відображення. Ці методи умовно поділяють на два класи [17]. Перший базується на дослідженні опуклості послідовних значень часового ряду і отримав назву графів видимості (visibility graph) [18]. Другий аналізує взаємну наближеність різних сегментів часової послідовності та використовує техніку рекурентного аналізу [14; 17].

Розглянемо необхідні основні характеристики графів. Формально мережа являє собою граф  $G(N, E)$ , у якому  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  – скінчена множина вершин (агентів) і  $E$  – множина ребер, що відображають взаємодію агентів. При аналізі складних мереж, як і в теорії графів, використовують параметри окремих вузлів, параметри мережі в цілому та мережеві підструктури.

Основними термінами мереж є вузол і ребро. Кожен вузол характеризується ступенем (degree), тобто кількістю зв'язків, які входять у нього. Фактично ступінь – це мінімальна локальна інформація. Повна інформація про мережу міститься в її матриці суміжності  $S$ . Для мережі з  $N$  вузлів  $S$  є квадратною матрицею  $N \times N$ . Значення її елементів  $s_{ij}$  дорівнюють 1, якщо вузли  $i$  та  $j$  з'єднані між собою, і 0, якщо ці вузли не з'єднані. Для неспрямованих мереж  $s_{ij} = s_{ji}$  та  $s_{ii} = 0$ . Тоді для ступеня  $k_i$  вузла  $i$  отримуємо:  $k_i = \sum_j s_{ij}$ .

У мережі не всі вершини мають однакову кількість ребер. Головною характеристикою мережі, яка задає розподіл ребер вершини, тобто ступінь вершини, є розподіл ступенів вузлів  $P(k)$ , що визначає ймовірність того, що вузол  $i$  має ступінь  $k_i = k$ , інакше кажучи, випадково вибрана вершина матиме рівно  $k$  ребер. Мережі, які характеризуються різними  $P(k)$ , демонструють дуже різноманітну поведінку. До найчастіше спостережуваних прикладів розподілу ступенів вузлів належать:

- розподіл Пуассона  $P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$ , (1)
- експоненційний розподіл  $P(k) \propto e^{-k/\langle k \rangle}$ , (2)
- степеневий розподіл  $P(k) \propto \frac{1}{k^\gamma}$ ,  $k \neq 0$ ,  $\gamma > 0$ . (3)

Усі вищенаведені функції  $P(k)$  спадають за великих  $k$ , але принципова відмінність між розподілами (1), (2), з одного боку, і розподілом (3), з іншого, полягає в тому, що і (1), і (2) характеризуються певним масштабом. Це положення максимуму для розподілу Пуассона чи характерна довжина спадання для експоненційного розподілу. Степеневий розподіл (3) не характеризується типовим масштабом. Мережі зі степеневим розподілом ступенів (3) називають безмасштабними чи масштабно-інваріантними (scale-free). Саме безмасштабні мережі часто спостерігаються у складних реально існуючих системах.

У мережах із пуассонівським чи експоненційним розподілами (1), (2) практично відсутні вузли з дуже



високим ступенем (габів, hubs або концентраторів). Саме наявність концентраторів пояснює особливості поведінки і спричиняє багато різних специфічних властивостей безмасштабних мереж.

Середній ступінь розподілу  $k$  визначається так:

$$\langle k \rangle = \sum_{k=1}^{k_{\max}} p(k) \cdot k = 2M/N,$$

де  $p(k)$  нормований розподіл ступенів вузлів;

$M$  – кількість вузлів;

$N$  – кількість ребер мережі;

$k_{\max}$  – максимальний ступінь вузла.

Для кінцевого розміру випадкового графу [3] розподіл ступенів вузлів  $p(k)$  є біноміальним, який за фіксованого  $k$  у нескінченній границі стає розподілом Пуассона.

Коефіцієнт кластерності  $C$  є локальною величиною, що характеризує окремих вузол  $m$ , який відповідає рівню зв'язаності вузлів у мережі. Він характеризує тенденцію до утворення груп взаємозв'язаних вузлів, так званих клік (clique). Крім того, для кожного конкретного вузла коефіцієнт кластерності показує, скільки найближчих сусідів цього вузла є також найближчими сусідами один для одного.

Коефіцієнт кластерності  $C_m$  для окремого вузла  $m$  мережі визначається як

$$C_m = \frac{2E_m}{k_m(k_m - 1)}, \quad (4)$$

де  $m$  – вузол, з якого виходить  $k_m$  ребер, що з'єднують його з іншими  $k$  вузлами, найближчими сусідами;

$k_m(k_m - 1)/2$  – це число відповідає максимально можливій кількості ребер, якими можуть бути з'єднані найближчі сусіди обраного вузла;

$E_m$  – відношення реальної кількості ребер, які з'єднують найближчих сусідів певного вузла, до максимально можливої.

З формули (4) випливає, що коефіцієнт кластерності будь-якого з вузлів, що не містить жодних циклів, дорівнює нулеві. А коефіцієнт кластерності будь-якого вузла повністю з'єднаної мережі дорівнює одиниці. Коефіцієнт кластерності мережі  $\langle C \rangle$  означається як середнє значення  $C_m$  усіх її вузлів.

Для дослідження були розглянуті графи видимості. Для відображення часового ряду в мережу використовується алгоритм, який називається графом видимості (visibility graph). А сімейство алгоритмів видимості являє собою набір методів, які перетворюють часовий ряд у мережу відповідно до специфічного геометричного критерію [18]. Головне призначення таких методів у тому, щоб точно перетворювати інформацію, що зберігається у вигляді часового ряду в альтернативну математичну структуру, так що потужні інструменти теорії графів у кінцевому підсумку можна було б використати для характеристики часових рядів з іншої точки зору, з метою подолання розриву між нелінійним аналізом часових рядів, динамічними системами і теорією графів [17; 18].

Алгоритм графу видимості можна описати таким чином. Розглянемо часовий ряд  $Y(t) = [y_1, y_2, \dots, y_n]$

довжини  $N$ . Кожну точку даних часового ряду можна розглядати як вершину в асоційованій мережі, а ребро буде з'єднувати дві вершини, якщо дві відповідні точки даних можуть «бачити» один одного з вертикального бару (смуги) часового ряду. Схему алгоритму видимості представлено на рис. 1.

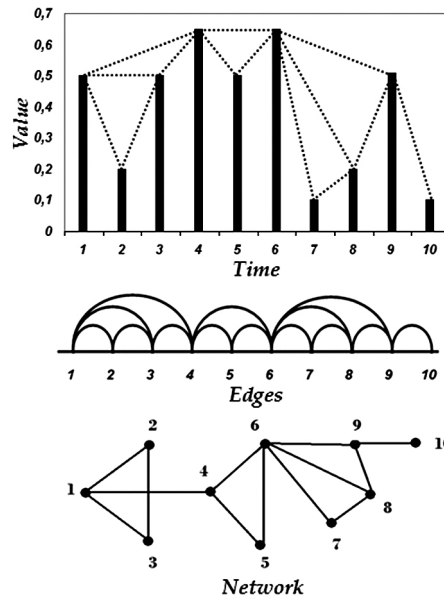


Рис. 1. Ілюстрація перетворення часового ряду в мережу за допомогою алгоритму графу видимості [18]

На рис. 1 у верхній частині зображені перші 10 значень часового ряду за допомогою вертикальних смуг (барів). Розглядаючи таке зображення як певний «ландшафт», ми зв'яжемо кожен бар (кожну точку часового ряду) з усіма тими точками, які є видимими з обраної вершини (штрихові лінії). Отримуємо відповідний графік, зображений на середній частині рисунка. На цьому графіку кожен вузол відповідає (у тому ж порядку) даним часового ряду, а два вузли з'єднані, якщо існує видимість між відповідними даними, тобто якщо є пряма лінія, яка з'єднує значення ряду даних, за умови, що ця «лінія видимості» не перетинає будь-який проміжний бар. Нарешті, на нижній частині рисунку зображено, власне, отриману мережу.

Формально два значення ряду  $y_a$  (на момент часу  $t_a$ ) і  $y_b$  (на момент часу  $t_b$ ) пов'язані, якщо для будь-якого іншого значення ( $y_c, t_c$ ), яке розміщене між ними (тобто  $t_a < t_c < t_b$ ), задовольняється умова:

$$y_c < y_a + (y_b - y_a) \frac{t_c - t_a}{t_b - t_a}.$$

Алгоритм графу видимості легко програмується і працює відносно швидко навіть для великих наборів даних. Одержана мережа потім аналізується з використанням стандартних методів, які включають розрахунок відповідних мір і показників.

Для аналізу взаємної наближеності різних сегментів часової послідовності використовуємо технологію рекурентних діаграм (РД). Технологія для візуалізації рекурентностей у фазовому просторі заснована на ідеї Анрі Пуанкаре щодо рекурентності фазового простору динамічних систем. Рекурентна діаграма

відображає наявні повторюваності у формі бінарної матриці  $R$ , де  $R_{ij} = 1$ , якщо  $\bar{x}_j$  є сусіднім до стану  $\bar{x}_i$ , і  $R_{ij} = 0$  – у протилежному разі.

Засоби аналізу рекурентностей включають комплекс мір, заснованих на розподілі дрібномасштабних рис рекурентної діаграми (окремих точок, діагональних і вертикальних лінійних структур) [17].

Перевагою цього методу є те, що чутливість показників можна регулювати, змінюючи значення не лише розміру вікна і кроку його зміщення, але й таких вхідних аргументів, як параметри вкладення, окіл і поріг. Здійснюючи комплексну оцінку послідовності, вони надають можливість визначити загальний рівень складності, тоді як особливості алгоритму дозволяють проаналізувати зміни детермінованості системи в часі. Обчислення рекурентних мір у малому рухомому вікні (підматриці рекурентної діаграми) дозволяє виявити суттєві часові залежності. Окремі дослідження, засновані на кількісних мірах, показують, що вони здатні виявити точки біфуркації, а саме системні переходи «хаос – порядок». Вертикальні структури рекурентних діаграм, у свою чергу, пов'язані з переміжністю і ламінарними станами, а їхня кількісна оцінка дозволяє визначити точки переходів «хаос – хаос». Отже, міри рекурентного аналізу дозволяють будувати передвісники кризових явищ за часовими рядами [14].

Зв'язок ідеї рекурентності та мережевої часових послідовностей будується на фундаментальній структурній аналогії між рекурентними діаграмами і складними мережами взагалі. Обидва типи структур базуються на матрицях рекурентності та суміжності

відповідно, що можуть бути використані під час вивчення основних топологічних властивостей базової складної системи, заснованої на комплексних статистичних мірах.

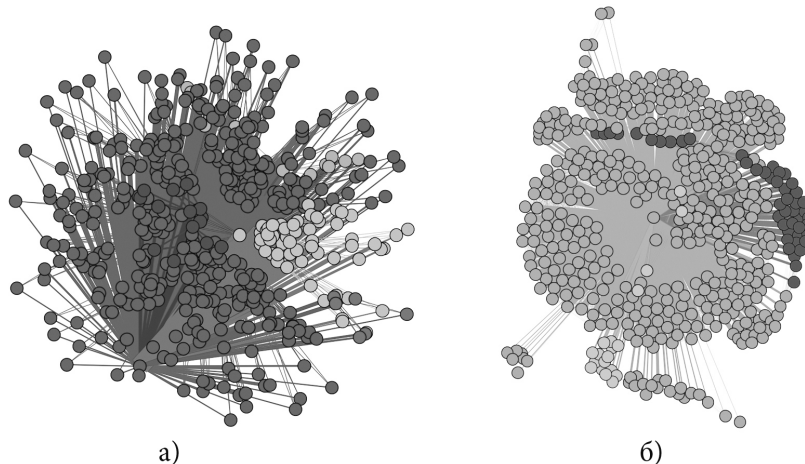
Візуалізація складних мереж є одним із напрямів їх аналізу, яка дозволяє отримати важливу інформацію про структуру і властивості мережі без точних розрахунків. Короткий опис основних популярних професійних інструментів і відповідних літературних джерел можна знайти в [19]. У цій роботі використовувався програмний засіб Gephi [20].

**Метою** нашої статті є аналіз мережевих мір складності в умовах фінансових криз.

**Результати досліджень.** Для кращого розуміння того, як працюють методи теорії графів і рекурентних діаграм, продемонструємо комплексне дослідження мережевих мір складності на прикладі відомих фінансових криз, зокрема, 1929 р. (Велика депресія), 1987 р. (Чорний понеділок), валютної кризи 1998 р., кризи «доткомів» 2001 р. і двох хвиль глобальної фінансової кризи 2008 і 2011 рр. Базами даних обрано щоденні значення індексів фондових ринків Німеччини (DAX) і США (DJIA і S&P 500) [21].

Алгоритм розрахунків складається з таких кроків. Для часового ряду обиралось вікно, розміром у 200–500 днів, для нього будувалась матриця суміжності за схемами графу видимості і рекурентного аналізу. Останні були основою для побудови графів.

На *рис. 2* представлено графи, які побудовані для 500-денного фрагмента часового ряду індексу німецького фондового ринку DAX.



*Рис. 2.* Графи, що відповідають часовому вікну у 500 днів для індексу DAX, побудовані в рамках алгоритмів графу видимості (а) і рекурентного аналізу (б)

Мережеві міри складності розраховувались із матриці суміжності.

Далі вікно зміщувалось із певним кроком і процедура повторювалась аж до повного вичерпання часового ряду.

Результати розрахунків фіксувались у формі числового ряду для порівняння з динамікою вихідного часового ряду або іншими мірами складності.

На *рис. 3* представлено максимальну ступінь вершини як одну з важливих мір складності і вона порівнюється для фінансових криз 1929 і 2008 рр.

Параметри розрахунків: ширина вікна – 500 днів, крок зміщення – 5 днів.

Моменти початку криз на рисунках відмічені стрілками.

З визначення ступеня вершини зрозуміло, що його максимальне значення досягається в масштабно-інваріантних мережах, де існують концентратори зв'язків.

З наближенням до кризи система спрощується, стає більш хаотичною, а ступінь вершини зменшується. Саме це видно на *рис. 3*.

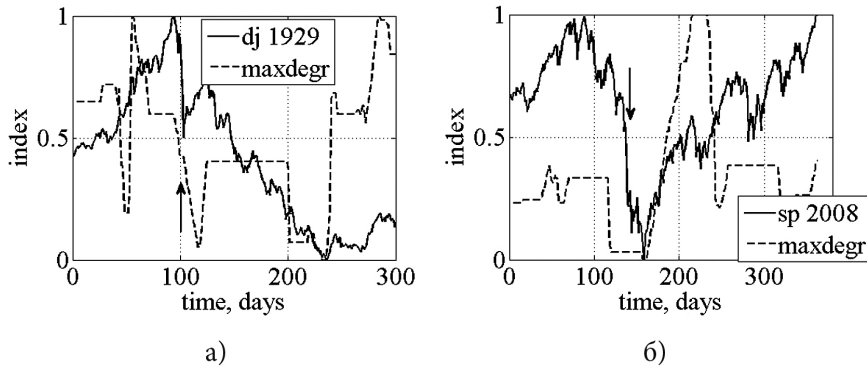


Рис. 3. Порівняльна динаміка фондових індексів DJIA (dj) і S&P 500 (sp) та максимальна ступінь вершини (maxdegr) для криз 1929 (а) і 2008 (б) років

Вихід із кризи супроводжується поверненням міри рівнів до попередніх значень. Якщо ж невдовзі має місце друга хвиля кризи [як у варіанті (б)], картина повторюється.

На рис. 4 представлено не менш важливі мережеві міри складності для більш довгого ряду індексу S&P 500 (sp). Це коефіцієнти кластерності (clust) і діаметр графу (diam).

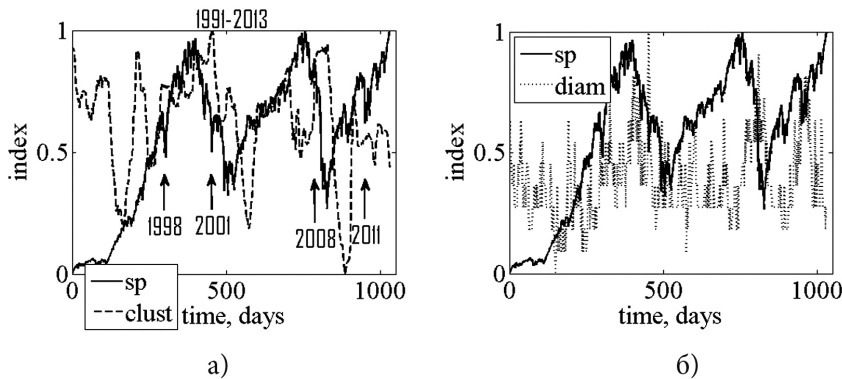


Рис. 4. Зміна з часом коефіцієнта кластерності (а) і діаметра графу (б) 1991–2013 рр. (вікно – 500 днів, крок – 5 днів. Стрілками означені періоди відомих криз)

Як видно з рисунка, вказані міри також логічно поводяться у кризові періоди. Коефіцієнт кластерності зростає в докризові періоди і помітно зменшується в період, власне, кризи. Те ж саме стосується і діаметра графу.

На рис. 5 представлено результати побудованої функції розподілу ступеня вершини для індексу DJIA за період з 1991 до 2013 рр. і які порівняли з аналогічним для перемішаного ряду (dj shuff).

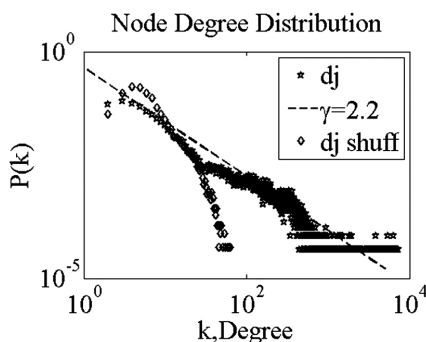


Рис. 5. Розподіл ступеня вершини для мережі, побудованої за алгоритмом графу видимості

Очевидно, що результати відповідають степеневому розподілу (3) з показником  $\gamma = 2,2$ , тоді як у варіанті перемішаного ряду спостерігається експоненціальна залежність для хвоста розподілу.

**Висновки.** Проведені дослідження показали, що мережевий підхід є альтернативою до методів аналізу нелінійної динаміки часових рядів і дозволяє розробити широкий спектр мережевих мір складності. Вказані міри є чутливими до структурних і динамічних властивостей складних систем, зокрема у стані кризи.

Подальші дослідження будемо проводити із використанням удосконалених методів аналізу адекватності та чутливості мір складності як до параметрів розрахунку, так і до властивостей самих систем.

**Список використаних джерел**

1. Barrat A. Dynamical processes on complex networks / Barrat A., Barthelemy M., Vespignani A. // Cambridge University Press, 2008. – 347 p.
2. Halvin S. Complex networks. Structure, robustness and function / Halvin S., Cohen R. // Cambridge University Press, 2010. – 238 p.

3. Albert R. Statistical Mechanics of Complex Networks [Electronic resource] / Albert R., Barabasi A.-L. // *Rev. Mod. Phys* – 2002. – V. 74. – P. 47–97. – Available from : [arXiv.org/cond-mat/0106096](http://arXiv.org/cond-mat/0106096).
4. Newman M. The Structure and Dynamics of Networks / Newman M., Watts D., Barabasi A.-L. // Princeton University Press, 2006. – 456 p.
5. Newman M. E. J. The structure and function of complex networks [Electronic resource] / Newman M. E. J. // *SIAM Reviews*. – 2003. – V. 45 (2). – P. 167–256. – Available from : [arXiv.org/cond-mat/0303516](http://arXiv.org/cond-mat/0303516).
6. Boccaletti S. Complex networks: Structure and dynamics / Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.-U. // *Phys. Rep.* – 2006. – V. 424. – P. 175–209.
7. Евин И. А. Введение в теорию сложных сетей / Е. И. Евин // *Математические основы и численные методы моделирования*. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 121–141.
8. Олескин А. В. Сетевые структуры в биосистемах / А. В. Олескин // *Журнал общей биологии*. – 2013. – Т. 74, № 2. – С. 112–138.
9. Головач Ю. Складні мережі / Ю. Головач, О. Олемський, К. фон Фербер та ін. // *Журнал фізичних досліджень*. – 2006. – Т. 10, № 4. – С. 247–289.
10. Моргунов Л. В. Сложные сети и демократия в России: новые возможности и ограничения [Электронный ресурс] / Л. В. Моргунов. – Режим доступа : [www.aspu.ru/images/File/Izdatelstvo/KR.../61-66.pdf](http://www.aspu.ru/images/File/Izdatelstvo/KR.../61-66.pdf).
11. Соловйов В. М. Кількісні методи оцінки складності в прогнозуванні соціально-економічних систем / В. М. Соловйов, К. В. Соловйова // *Прогнозування соціально-економічних процесів: сучасні підходи та перспективи* : монографія. – Бердянськ, 2012. – С. 141–155.
12. Соловйова В. В. Порівняльний аналіз динаміки фондового ринку України з використанням фрактальних мір складності / В. В. Соловйова, В. М. Соловйов, К. В. Соловйова // *Вісник Черкаського університету*. – 2012. – № 33 (246). – С. 51–58. – (Сер. «Економічні науки»).
13. Соловйов В. М. Використання масштабно-залежних показників Ляпунова для дослідження складності фінансово-економічних систем / В. М. Соловйов, І. О. Стратійчук // *Наука і економіка: науково-теоретичний журнал / Хмельницький економічний університет*. – 2012. – № 4 (28). – Т. 2. – С. 88–93.
14. Соловйов В. М. Рекурентні міри як метод кількісної оцінки складності / В. М. Соловйов, А. В. Батир // *Вісник КНУТД*. – 2012. – № 5. – С. 254–257.
15. Соловйов В. М. Ентропія Тсалліса і неекстенсивні міри складності економічних систем / В. М. Соловйов, О. А. Сердюк // *Моделі оцінки і аналізу складних соціально-економічних систем* : монографія. – Х. : ІД «ИНЖЕК», 2013. – С. 146–157.
16. Рибчинська О. М. Неревверсивні міри складності / О. М. Рибчинська, В. М. Соловйов, Д. М. Чабаненко // *Інформаційні технології та моделювання в економіці: на шляху до міждисциплінарності* : монографія. – Черкаси : Брама-Україна, 2013. – С. 100–108.
17. Donner R. V. Recurrence-based time series analysis by means of complex network methods [Electronic resource] / R. V. Donner, M. Small, J. F. Donges, N. Marwan et. al. – Available from : [arXiv:1010.6032v1](http://arXiv:1010.6032v1) [nlin.CD] 25 Oct 2010.
18. Lacasa L. From time series to complex networks: The visibility graph / L. Lacasa, B. Luque, F. Ballesteros et.al. // *PNAS*. – 2008. – V. 105, No 13. – P. 4972–4975.
19. Панченко Л. Ф. Підготовка студентів університету до аналізу соціальних мереж [Електронний ресурс] / Л. Ф. Панченко. – Режим доступу : <http://nvd.luguniv.edu.ua/archiv/NN20/12plfasm.pdf>.
20. Gephi [Electronic resource]. – Available from : <https://gephi.org>.
21. Індокси фондових ринків [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://finance.yahoo.com>.

**Summary.** Network approach is explored in the article, that is an alternative to the methods of nonlinear dynamics analysis of time series and allows to develop the wide spectrum of network complexity measures and adapt them for crisis phenomena research.

**Keywords:** time series, complex networks, network approach, measure of complexity, crisis.